Álgebra y Geometría Analítica

Clase 27: Introducción a Transformaciones Lineales

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

Unidad 5 – Clase 27

Breve Repaso de las Unidades Anteriores

UNIDAD 1: VECTORES GEOMÉTRICOS

En esta unidad vimos los siguientes temas

- Vectores: definición.
- Vectores geométricos y no geométricos.
- Operaciones Básicas: Suma y producto de escalar y vector.
- Producto escalar
- Producto vectorial
- Doble Producto Vectorial
- Doble Producto mixto.
- Rectas en el plano y en el espacio.
- Posiciones relativas entre rectas.
- Planos
- Geometría Métrica

Breve Repaso de las Unidades Anteriores

UNIDAD 2: MATRICES

En esta unidad vimos los siguientes temas

- Matrices: definición.
- Clasificación de Matrices
- Operaciones Básicas: Suma de matrices y producto de escalar con matriz.
- Producto entre matrices (¿la conmutatividad?)
- El Determinante de una matriz
- Matriz inversa

Breve Repaso de las Unidades Anteriores

UNIDAD 3: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

En esta unidad vimos los siguientes temas

- Qué es un sistema de ecuaciones Lineales
- Notación Matricial
- Rango de una Matriz
- Teorema de Rouche-Frobenius
- Resolución de Sistemas de Ecuaciones: El método de Gauss-Jordan
- Sistemas homogéneos
- Sistemas Cuadrados: métodos de la Matriz Inversa y método de Cramer.

Breve Repaso de las Unidades Anteriores

UNIDAD 4: ESPACIOS VECTORIALES REALES

En esta unidad vimos los siguientes temas

- Espacios vectoriales (EV) y Subespacios
- Combinación Lineal (un vector como CL de un conjunto de vectores)
- Subespacio generado (por un conjunto de vectores).
- Sistema generador de un EV.
- Dependencia e independencia lineal.
- Base y dimensión de un EV.
- Norma Vectorial
- Producto Interior
- Conjunto y Base ortogonal: Beneficios de su uso.
- Conjunto y base ortonormal: Beneficios de su uso.
- El PGS para la ortonormalización de bases
- Subespacios Fundamentales de una matriz

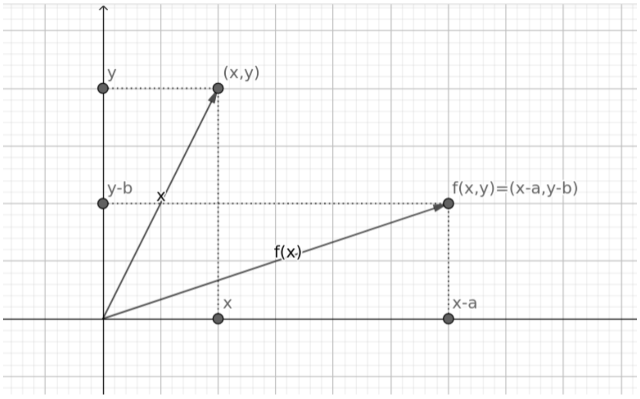
Introducción a Transformaciones Lineales

DEFINICIÓN: TRANSFORMACIÓN

Una Transformación entre dos espacios vectoriales es una función que a cada elemento del primer EV le hace corresponder un elemento del segundo EV .

Ejemplo: Traslación

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / f(x; y) = (x - a; y - b)$



Introducción a Transformaciones Lineales

DEFINICIÓN: TRANSFORMACIÓN

Una Transformación entre dos espacios vectoriales es una función que a cada elemento del primer EV le hace corresponder un elemento del segundo EV .

Ejemplo: Traza de una matriz

Traza de una Matriz: $f: \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R} / f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$

Introducción a Transformaciones Lineales

CARACTERÍSTICAS DE UNA TRANSFORMACIÓN

$f: V \rightarrow W$ es inyectiva $\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in V, \forall \vec{y} \in V: \vec{x} \neq \vec{y} \Rightarrow f(\vec{x}) \neq f(\vec{y})$.

$f: V \rightarrow W$ es Sobreyectiva $\Leftrightarrow \forall \vec{y} \in W: \exists \vec{x} \in V / f(\vec{x}) = \vec{y}$

$f: V \rightarrow W$ es biyectiva $\Leftrightarrow \forall f$ es inyectiva y sobreyectiva .

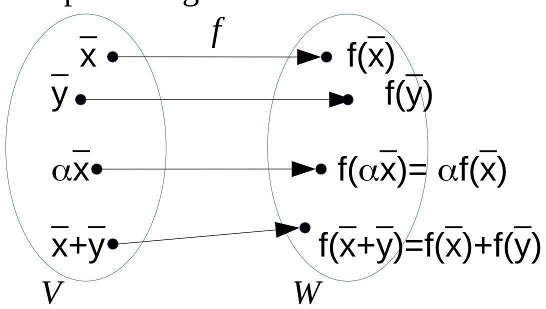
Por ser función, tiene su dominio y su codominio, con la particularidad de que éstos son espacios vectoriales.

Introducción a Transformaciones Lineales

DEFINICIÓN: TRANSFORMACIONES LINEALES (TL)

Una Transformación $f: V \rightarrow W$ es TL si cumple las siguientes condiciones:

1) $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$
2) $f(\alpha \vec{x}) = \alpha f(\vec{x})$



Ambas condiciones pueden resumirse en: $f(\boxed{\alpha}\vec{x} + \boxed{\beta}\vec{y}) = \boxed{\alpha} f(\vec{x}) + \boxed{\beta} f(\vec{y})$ f

Generalizando: $f\left(\sum_{i=1}^{n} \boxed{\alpha_i} \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \boxed{\alpha_i} f(\vec{x}_i)$ f

Los escalares de la CL se mantienen en la TL

Introducción a Transformaciones Lineales

DEFINICIÓN: TRANSFORMACIONES LINEALES (TL)

Una Transformación $f: V \to W$ es TL si cumple las siguientes condiciones:

1) $f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$
2) $f(\alpha \vec{x}) = \alpha f(\vec{x})$

Ejemplo:

Sea la transformación $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 / f(x_1; x_2) = (2x_1 + x_2; 3x_1; x_1 - x_2)$. Probar que f es TL

1) $f(\vec{x}+\vec{y}) = f[(x_1; x_2) + (y_1; y_2)]$	Reemplazo $\bar{x}$ por $(x_1;x_2)$ e $\bar{y}$ por $(y_1;y_2)$
$f(\vec{x}+\vec{y}) = f(x_1 + y_1; x_2 + y_2)$	Suma de vectores.
$f(\vec{x}+\vec{y}) = [2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2); 3(x_1 + y_1); (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)]$	Aplicación de la TL
$f(\vec{x}+\vec{y}) = (2x_1 + 2y_1 + x_2 + y_2; 3x_1 + 3y_1; x_1 + y_1 - x_2 - y_2)$	Prop. Distributiva
$f(\vec{x}+\vec{y}) = (2x_1 + x_2; 3x_1; x_1 - x_2) + (2y_1 + y_2; 3y_1; y_1 - y_2)$	Suma de vectores
$f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$	

Introducción a Transformaciones Lineales

DEFINICIÓN: TRANSFORMACIONES LINEALES (TL)

Una Transformación $f: V \to W$ es TL si cumple las siguientes condiciones:

1) $f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$
2) $f(\alpha \vec{x}) = \alpha f(\vec{x})$

Ejemplo:

Sea la transformación $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 / f(x_1; x_2) = (2x_1 + x_2; 3x_1; x_1 - x_2)$. Probar que f es TL

2) $f(\alpha \vec{x}) = f(\alpha x_1; \alpha x_2)$	Reemplazo x por $(x_1;x_2)$
$f(\alpha \vec{x}) = (2\alpha x_1 + \alpha x_2; 3\alpha x_1; \alpha x_1 - \alpha x_2)$	Aplicación de la TL
$f(\alpha \vec{x}) = \alpha(2x_1 + x_2; 3x_1; x_1 - x_2)$	Transformo al vector como Producto del escalar α y el vector
$f(\alpha \vec{x}) = \alpha f(\vec{x})$	

Como *f* cumple las dos condiciones de linealidad, ==> *f* es TL

Introducción a Transformaciones Lineales

PROPIEDADES:

1) $f(\vec{0}_v)=\vec{0}_w$
2) $f(-\vec{x}_v)=-f(\vec{x}_v)$

D1) $f(\vec{0}_v)=f(0\,\vec{x}_v)$ — Expreso al vector nulo como 0 por cualquier vector.
$f(\vec{0}_v)=0\,f(\vec{x}_v)$ — Aplico Segunda condición de linealidad.
$f(\vec{0}_v)=0\,\vec{y}_w$ — Aplico TL en el miembro de la derecha
$f(\vec{0}_v)=\vec{0}_w$ — Propiedad de prod. de escalar nulo y vectores

D2) $f(-\vec{x})=f(-1\,\vec{x})$ — 1 elemento neutro del producto de escalar y vector.
$f(-\vec{x})=-1\,f(\vec{x})$ — Aplico Segunda condición de linealidad.
$f(-\vec{x})=-f(\vec{x})$

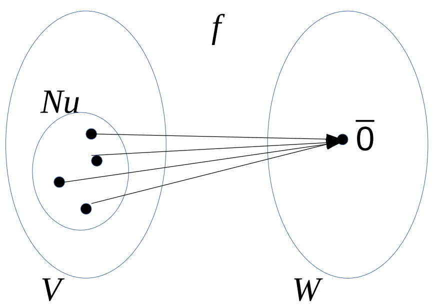
Introducción a Transformaciones Lineales

NUCLEO E IMAGEN DE UNA TL

Núcleo de una TL (o kernel):

$f: V \rightarrow W$

$Nu(f)=\{\vec{x}\in V \,/\, f(\vec{x})=\vec{0}_w\}$



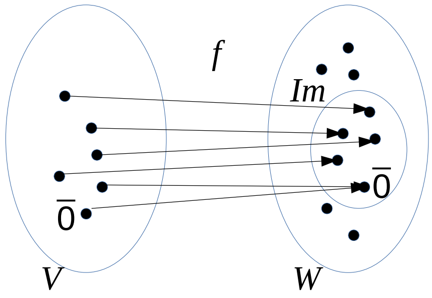
Introducción a Transformaciones Lineales

NUCLEO E IMAGEN DE UNA TL

Imagen de una TL:

$f: V \rightarrow W$

$\operatorname{Im}(f) = \{\vec{y} \in W / \exists \vec{x} \in V / f(\vec{x}) = \vec{y}\}$



Introducción a Transformaciones Lineales

TEOREMA DE LA DIMENSIÓN

Sea $f: V \rightarrow W$ una TL:

$\dim(Nu(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(V)$

Introducción a Transformaciones Lineales

NUCLEO E IMAGEN DE UNA TL

Ejemplo:

Sea $f:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 / f(x_1;x_2)=(x_1-2x_2;x_1+x_2;x_1-5x_2)$. Hallar su núcleo e imagen

$Nu(f)=\{(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2 / f(x_1;x_2)=(0;0;0)\}$

Si: $f(x_1;x_2)=(0;0;0)\Rightarrow(x_1-2x_2;x_1+x_2;x_1-5x_2)=(0;0;0)$

$$\begin{cases} x_1-2x_2=0 \\ x_1+\ \ x_2=0 \\ x_1-5x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A)=r(A')=2=\#\text{ incógnitas}\Rightarrow \text{SCD (Por RF).}$$

Luego: $\boxed{Nu(f)=\{(0;0)\}}\Rightarrow dim(Nu(f))=0$

Introducción a Transformaciones Lineales

NUCLEO E IMAGEN DE UNA TL

Ejemplo (cont.):

$\text{Im}(f)=\{(y_1;y_2;y_3)\in\mathbb{R}^3 / \exists(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2 \wedge f(x_1;x_2)=(y_1;y_2;y_3)\}$

Si: $f(x_1;x_2)=(y_1;y_2;y_3)\Rightarrow(x_1-2x_2;x_1+x_2;x_1-5x_2)=(y_1;y_2;y_3)$

$$\begin{cases} x_1-2x_2=y_1 \\ x_1+\ \ x_2=y_2 \\ x_1-5x_2=y_3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & y_1 \\ 1 & 1 & y_2 \\ 1 & -5 & y_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & y_1 \\ 0 & 3 & y_2-y_1 \\ 0 & -3 & y_3-y_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}y_2-\frac{1}{3}y_1 \\ 0 & 0 & -2y_1+y_2+y_3 \end{array}\right)$$

Para que el sistema sea SC: r(A)=r(A') $\Rightarrow -2y_1+y_2+y_3=0\Rightarrow y_3=2y_1-y_2$

$\boxed{\text{Im}(f)=\{(y_1;y_2;y_3)\in\mathbb{R}^3 / (y_1;y_2;y_3)=(y_1;y_2;2y_1-y_2)\}}$

Luego: $\text{Im}(f)=\pi$ con $\pi:\{\vec{y}\in\mathbb{R}^3 / \vec{y}=\lambda(1;0;2)+\mu(0;1;-1)\ \forall\lambda\in\mathbb{R}\ \forall\mu\in\mathbb{R}\}$

$B(\text{Im}(f))=\{(1;0;2);(0;1;-1)\}\Rightarrow dim(\text{Im}(f))=2\equiv dim(V)$

Se verifica el teorema de la dimensión .

Introducción a Transformaciones Lineales

CLASIFICACION:

1) $f: V \rightarrow W$ es TL $\Rightarrow f$ es MORFISMO (Mantiene la forma ya que los escalares de la CL son los mismos).

2) Si f es inyectiva $\rightarrow f$ es MONOMORFISMO.
   Si f es monomorfismo $\Rightarrow Nu(f) = \{\vec{0}_v\}$

3) Si f es sobreyectiva $\rightarrow f$ es EPIMORFISMO.
   Si f es epimorfismo $\Rightarrow \operatorname{Im}(f) \equiv W$

4) Si f es biyectiva $\rightarrow f$ es ISOMORFISMO.

5) Si $f: V \rightarrow V \Rightarrow f$ es ENDOMORFISMO.

6) Si $f: V \rightarrow V \wedge f$ función biyectiva $\Rightarrow f$ es AUTOMORFISMO.

Introducción a Transformaciones Lineales

OPERACIONES DEFINIDAS ENTRE TL:

Dadas las siguientes transformaciones lineales: $f: V \rightarrow W, g: V \rightarrow W, h: W \rightarrow U$

1) SUMA: $(f+g): V \rightarrow W / \forall \vec{x} \in V: (f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x})$

2) DIFERENCIA: $(f-g): V \rightarrow W / \forall \vec{x} \in V: (f-g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) - g(\vec{x})$

3) PRODUCTO DE UN ESCALAR Y UNA TL: $\forall \vec{x} \in V \wedge \forall \alpha \in \mathbb{R}: (\alpha f)(\vec{x}) = \alpha f(\vec{x})$

4) COMPOSICIÓN: $h \circ f: V \rightarrow U / \forall \vec{x} \in V\ (h \circ f)(\vec{x}) = h(f(\vec{x}))$

5) INVERSA: $f: V \rightarrow V, f$ es biyectiva $\Rightarrow \exists f^{-1}$ (la TL inversa de f) / $\forall \vec{x} \in V$:
   $(f^{-1} \circ f)(\vec{x}) = (f \circ f^{-1})(\vec{x}) = \vec{x}$

Introducción a Transformaciones Lineales

OPERACIONES DEFINIDAS ENTRE TL:

Ejemplo: Sean las TL f y g.

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / f(x;y)=(2x;y)$
$g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / g(x;y)=(x;3y)$

$(f+g)(\vec{x})=f(\vec{x})+g(\vec{x})=(2x;y)+(x;3y)=(3x;4y)$
$(f\circ g)(\vec{x})=f(g(\vec{x}))=f(x;3y)=(2x;3y)$
$(f^{-1}\circ f)(\vec{x})=(f^{-1}(f(\vec{x})))=f^{-1}(2x;y)=(x;y)$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 1: Determinar cuál de las siguientes transformaciones es TL. En caso de tratarse de transformaciones simples, dar interpretación geométrica.

1) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / f(x_1;x_2)=(x_2,0)$

I) $f(\vec{x}+\vec{y})=f[(x_1;x_2)+(y_1;y_2)]$ Presento las componentes de los vectores $\bar{x}$ e $\bar{y}$.
$f(\vec{x}+\vec{y})=f(x_1+y_1;x_2+y_2)$ Sumando los vectores $\bar{x}$ e $\bar{y}$.
$f(\vec{x}+\vec{y})=(x_2+y_2;0)$ Aplicando TL.
$f(\vec{x}+\vec{y})=(x_2;0)+(y_2;0)$ Separo al resultado como suma de vectores.
$f(\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{x})+f(\vec{y})$

II) $f(\alpha\vec{x})=f(\alpha x_1;\alpha x_2)$ Producto de escalar y vector.
$f(\alpha\vec{x})=(\alpha x_2;0)$ Aplicando TL.
$f(\alpha\vec{x})=\alpha(x_2;0)$ Aplico Segunda condición de linealidad.
$f(\alpha\vec{x})=\alpha f(\vec{x})$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 1: Determinar cuál de las siguientes transformaciones es TL. En caso de tratarse de transformaciones simples, dar interpretación geométrica.

1) $f:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / f(x_1;x_2)=(x_2,0)$

I) $f(\vec{x}+\vec{y})=f[(x_1;x_2)+(y_1;y_2)]$

$f(\vec{x}+\vec{y})=f(x_1+y_1;x_2+y_2)$

$f(\vec{x}+\vec{y})=(x_2+y_2;0)$

$f(\vec{x}+\vec{y})=(x_2;0)+(y_2;0)$

$f(\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{x})+f(\vec{y})$

II) $f(\alpha\vec{x})=f(\alpha x_1;\alpha x_2)$

$f(\alpha\vec{x})=(\alpha x_2;0)$

$f(\alpha\vec{x})=\alpha(x_2;0)$

$f(\alpha\vec{x})=\alpha f(\vec{x})$

Como cumple con las 2 condiciones de linealidad ==> f es TL

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 1: Determinar cuál de las siguientes transformaciones es TL. En caso de tratarse de transformaciones simples, dar interpretación geométrica.

1) $f:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / f(x_1;x_2)=(x_2,0)$

I) $f(\vec{x}+\vec{y})=f[(x_1;x_2)+(y_1;y_2)]$

$f(\vec{x}+\vec{y})=f(x_1+y_1;x_2+y_2)$

$f(\vec{x}+\vec{y})=(x_2+y_2;0)$

$f(\vec{x}+\vec{y})=(x_2;0)+(y_2;0)$

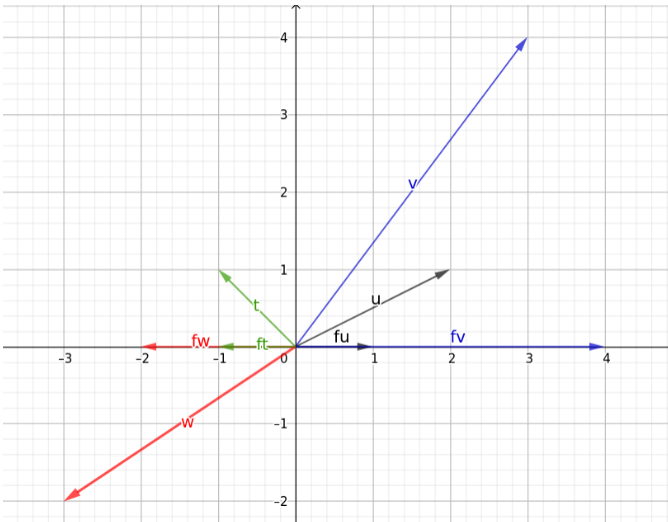
$f(\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{x})+f(\vec{y})$

II) $f(\alpha\vec{x})=f(\alpha x_1;\alpha x_2)$

$f(\alpha\vec{x})=(\alpha x_2;0)$

$f(\alpha\vec{x})=\alpha(x_2;0)$

$f(\alpha\vec{x})=\alpha f(\vec{x})$



Ejercicios de la Guía

Ejercicio 1: Determinar cuál de las siguientes transformaciones es TL. En caso de tratarse de transformaciones simples, dar interpretación geométrica.

3) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 / f(x_1;x_2)=(x_1;x_2;0)$

I) $f(\vec{x}+\vec{y})=f[(x_1;x_2)+(y_1;y_2)]$ Presento las componentes de los vectores $\bar{x}$ e $\bar{y}$.

$f(\vec{x}+\vec{y})=f(x_1+y_1;x_2+y_2)$ Sumando los vectores $\bar{x}$ e $\bar{y}$.

$f(\vec{x}+\vec{y})=(x_1+y_1;x_2+y_2;0)$ Aplicando TL.

$f(\vec{x}+\vec{y})=(x_1;x_2;0)+(y_1;y_2;0)$ Separo al resultado como suma de vectores.

$f(\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{x})+f(\vec{y})$

II) $f(\alpha\vec{x})=f(\alpha x_1;\alpha x_2)$ Producto de escalar y vector.

$f(\alpha\vec{x})=(\alpha x_1;\alpha x_2;0)$ Aplicando TL.

$f(\alpha\vec{x})=\alpha(x_1;x_2;0)$ Aplico Segunda condición de linealidad.

$f(\alpha\vec{x})=\alpha f(\vec{x})$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 1: Determinar cuál de las siguientes transformaciones es TL. En caso de tratarse de transformaciones simples, dar interpretación geométrica.

4) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / f(x_1;x_2)=(x_1-1;x_2+2)$

I) $f(\vec{x}+\vec{y})=f[(x_1;x_2)+(y_1;y_2)]$

$f(\vec{x}+\vec{y})=f(x_1+y_1;x_2+y_2)$

$f(\vec{x}+\vec{y})=(x_1+y_1-1;x_2+y_2+2)$

$f(\vec{x}+\vec{y})=(x_1-1;x_2+2)+(y_1;y_2)$

$f(\vec{x}+\vec{y})\neq f(\vec{x})+f(\vec{y})$

Como NO cumple con las 2 condiciones de linealidad ==> f NO es TL

II) $f(\alpha\vec{x})=f(\alpha x_1;\alpha x_2)$

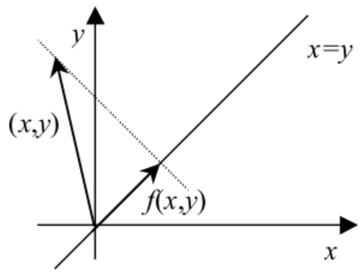
$f(\alpha\vec{x})=(\alpha x_1-1;\alpha x_2+2)$

$f(\alpha\vec{x})\neq\alpha f(\vec{x})$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 6: Caso I

Caso 1. Sea la transformación lineal f: $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ tal que le haga corresponder a cada vector (x, y) del plano su proyección ortogonal sobre la recta $x=y$, como indica la figura.



a) Describir geométricamente cuáles son los subespacios imagen de f y núcleo de f. Dar para cada uno de ellos una base.

b) Describir geométricamente cuáles son los autovectores y autovalores de f, esto es los vectores no nulos $\vec{v} \in \mathbf{R}^2$ tales que su imagen es un múltiplo escalar de sí mismo, $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$. Indicar los valores posibles de λ y el subespacio asociado a los autovectores para cada uno de ellos, S_λ.

c) Escribir la forma explícita de f y su matriz asociada.

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 6: Caso I

a) Im(f): Recta sobre la que se proyectan los vectores del plano.

$$\mathrm{Im}(f)=\{(x;y)\in \mathbb{R}^2 / y=x\}$$

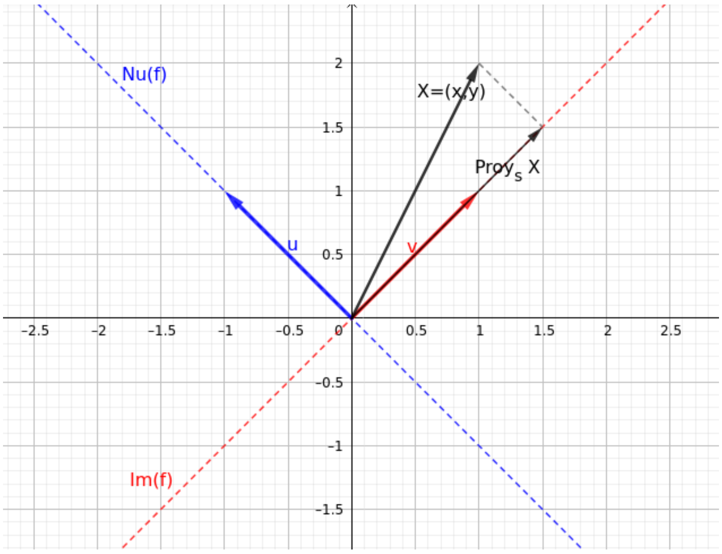
Nu(f): Recta que pasa por el origen. Se proyecta sobre el origen.

$$\mathrm{Nu}(f)=\{(x;y)\in \mathbb{R}^2 / y=-x\}$$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 6: Caso I

a)



Ejercicios de la Guía

Ejercicio 6: Caso I

b)

<u>Autovalores:</u> Son los λ / $f(\bar{v}) = \lambda\bar{v}$

$\lambda = 0$

$\lambda = 1$

<u>Autovectores:</u> Subespacio asociado a los diferentes autovalores

$S_{\lambda=0}$: Nu(f)

$S_{\lambda=1}$: Im(f):

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 6: Caso I

c) $S=(x;y)\in\mathbb{R}^2 / y=x \Rightarrow B_S=\{\vec{u}=(1;1)\}$

$$f(\vec{x})=Proy_S\vec{x}=\frac{<\vec{x};\vec{u}>}{<\vec{u};\vec{u}>}\vec{u}$$

$$f(\vec{x})=\frac{<(x;y);(1;1)>}{<(1;1);(1;1)>}(1;1)=(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y)(1;1)\Rightarrow f(\vec{x})=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y;\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)$$

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 8: Para cada una de las siguientes transformaciones lineales, hallar el núcleo y la imagen. Indicar la dimensión de los mencionados subespacios y una base para cada uno de ellos.

9.1) $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2 \,/\, f(x_1,x_2)=(x_1+x_2,2x_1+2x_2)$

$$Nu(f)=\{(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2 / f(x_1;x_2)=(0;0)\}$$

$$f(x_1;x_2)=(0;0)\Rightarrow(x_1+x_2;2x_2+2x_2)=(0;0)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2=0\\ 2x_1+2x_2=0\end{cases} \Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow x_1=-x_2$$

$$Nu(f)=\{(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2 / (x_1;x_2)=x_2(-1;1)\}$$

$$B_{Nu}(f)=\{\vec{u}=(-1;1)\}\Rightarrow dim(Nu(f))=1$$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 8: Para cada una de las siguientes transformaciones lineales, hallar el núcleo y la imagen. Indicar la dimensión de los mencionados subespacios y una base para cada uno de ellos.

9.1) $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \,/\, f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2)$

$$\mathrm{Im}(f) = \{(y_1; y_2) \in \mathbb{R}^2 / \exists (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2 : f(x_1; x_2) = (y_1; y_2)\}$$

$$f(x_1; x_2) = (y_1; y_2) \Rightarrow (x_1 + x_2; 2x_2 + 2x_2) = (y_1; y_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ 2x_1 + 2x_2 = y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | y_1 \\ 2 & 2 & | y_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & | y_1 \\ 0 & 0 & | y_2 - 2y_1 \end{pmatrix} \Rightarrow y_2 = 2y_1$$

$$\mathrm{Im}(f) = \{(y_1; y_2) \in \mathbb{R}^2 / (y_1; y_2) = y_1(1; 2)\}$$

$$B_{\mathrm{Im}}(f) = \{\vec{v} = (1; 2)\} \Rightarrow dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 8: Para cada una de las siguientes transformaciones lineales, hallar el núcleo y la imagen. Indicar la dimensión de los mencionados subespacios y una base para cada uno de ellos.

9.1) $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \,/\, f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2)$