Álgebra y Geometría Analítica

Clase 30:
Diagonalización de una Matriz

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

Unidad 5 – Clase 30

Repaso de Clases Anteriores

TRANSFORMACIONES

Definición:

Una Transformación entre dos espacios vectoriales es una función que a cada elemento del primer EV le hace corresponder un elemento del segundo EV.

Características:

$f: V \rightarrow W$ es inyectiva $\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in V, \forall \vec{y} \in V: \vec{x} \neq \vec{y} \Rightarrow f(\vec{x}) \neq f(\vec{y})$.

$f: V \rightarrow W$ es Subyectiva $\Leftrightarrow \forall \vec{y} \in W: \exists \vec{x} \in V / f(\vec{x}) = \vec{y}$

$f: V \rightarrow W$ es biyectiva $\Leftrightarrow \forall f$ es inyectiva y subyectiva .

Por ser función, tiene su dominio y su codominio, con la particularidad de que éstos son espacios vectoriales.

Ejemplos:

Traslación, Traza de una matriz.

Repaso de Clases Anteriores

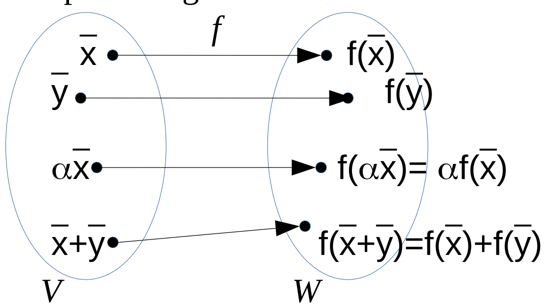
TRANSFORMACIONES LINEALES (TL)

Definición:

Una Transformación $f: V \rightarrow W$ es TL si cumple las siguientes condiciones:

1) $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$

2) $f(\alpha \vec{x}) = \alpha f(\vec{x})$



Ambas condiciones pueden resumirse en: $f(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})$

Generalizando: $f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\vec{x}_i)$

CL de vectores de V

CL de vectores de W

Repaso de Clases Anteriores

TRANSFORMACIONES LINEALES (TL)

Propiedades:

1) $f(\vec{0}_v) = \vec{0}_w$
2) $f(-\vec{x}_v) = -f(\vec{x}_v)$

Clasificación:

1) $f: V \to W$ es TL $\Rightarrow f$ es MORFISMO (Mantiene la forma ya que los escalares de la CL son los mismos).
2) Si f es inyectiva $\to f$ es MONOMORFISMO.
   Si f es monomorfismo $\Rightarrow Nu(f) = \{\vec{0}_v\}$
3) Si f es subyectiva $\to f$ es EPIMORFISMO.
   Si f es epimorfismo $\Rightarrow \operatorname{Im}(f) \equiv W$
4) Si f es biyectiva $\to f$ es ISOMORFISMO.
5) Si $f: V \to V \Rightarrow f$ es ENDOMORFISMO.
6) Si $f: V \to V \wedge f$ función biyectiva $\Rightarrow f$ es AUTOMORFISMO.

Repaso de Clases Anteriores

TRANSFORMACIONES LINEALES (TL)

Operaciones entre TL:

Dadas las siguientes transformaciones lineales: $f: V \to W, g: V \to W, h: W \to U$

1) SUMA: $(f+g): V \to W / \forall \vec{x} \in V : (f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x})$
2) DIFERENCIA: $(f-g): V \to W / \forall \vec{x} \in V : (f-g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) - g(\vec{x})$
3) PRODUCTO DE UN ESCALAR Y UNA TL: $\forall \vec{x} \in V \wedge \forall k \in \mathbb{R} : (kf)(\vec{x}) = k f(\vec{x})$
4) COMPOSICIÓN: $h \circ f : V \to U / \forall \vec{x} \in V \; (h \circ f)(\vec{x}) = h(f(\vec{x}))$
5) INVERSA: $f: V \to V, f$ es biyectiva $\Rightarrow \exists f^{-1}$ (la TL inversa de f) / $\forall \vec{x} \in V$:
   $(f^{-1} \circ f)(\vec{x}) = (f \circ f^{-1})(\vec{x}) = \vec{x}$

Repaso de Clases Anteriores

TRANSFORMACIONES LINEALES (TL)

Núcleo de una TL:

$f: V \to W$

$Nu(f) = \{\vec{x} \in V / f(\vec{x}) = \vec{0}_w\}$

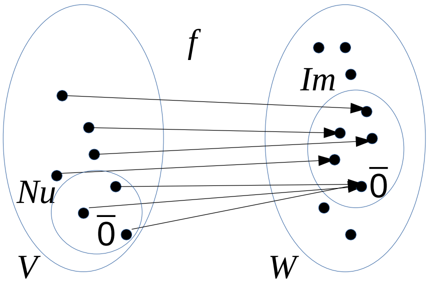


Imagen de una TL:

$f: V \to W$

$\mathrm{Im}(f) = \{\vec{y} \in W / \exists \vec{x} \in V \wedge f(\vec{x}) = \vec{y}\}$

Teorema de la Dimensión:

Sea f: V → W una TL:

dim(Nu(f)) + dim(Im(f)) = dim(V)

Repaso de Clases Anteriores

MATRIZ ASOCIADA A UNA TL

Definición:

Sea $f(\vec{x}): V \to W$ una TL. La TL f puede expresarse matricialmente:

$\boxed{f(\vec{x}) = F.\vec{x}}$ donde F: es la matriz asociada a la TL f

Si: $f: V \to W$ con: $dim(V) = n \wedge dim(W) = m \Rightarrow F \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Es decir: la matriz F asociada a la TL f será de orden $m \times n$.

Si: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \Rightarrow F \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Si: $f: \mathbb{R}^{n \times m} \to \mathbb{R}^p \Rightarrow F \in \mathbb{R}^{p \times (m \times n)}$

Repaso de Clases Anteriores

MATRIZ ASOCIADA A UNA TL

Cómo hallar F utilizando las bases canónicas:

Cada columna de la matriz F asociada a la TL f está dada por los transformados de los vectores canónicos del primer espacio.

Es decir: la primer columna de F se obtiene tras aplicar *f* al primer vector de la base canónica. Luego se repite para la segunda columna. Se repite *n* veces (con *n*: dimensión del espacio de partida)

Repaso de Clases Anteriores

MATRIZ ASOCIADA A UNA TL

Cómo hallar F a partir de los transformados de una base (Extensión por linealidad): Teorema Fundamental de las TL

Sea f: $R^n \rightarrow R^m$ pero no se conoce la expresión de *f*.
Se conoce $B = \{\bar{v}_1 ; \bar{v}_2 ; \ldots \bar{v}_n\}$ una base de R^n.
Se conocen: $\bar{y}_i = f(\bar{v}_i)$ los transformados de la base B, con $\bar{y}_i \in R^m$.
La matriz F asociada a la TL *f* puede hallarse como sigue:
Hallamos los escalares α_i / la CL de B resulta en el vector genérico: $\bar{x} \in R^n$.

Aplicando $f: f(\vec{x}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\vec{v}_i)$

Por ser TL, valen las condiciones de linealidad: aplicarlas.
Luego, como $\vec{y} = f(\vec{v}_i)$ es conocido $\Rightarrow$ se lo reemplaza.
Finalmente F puede hallarse (y la TL es única).

Repaso de Clases Anteriores

ALGUNAS TL PARTICULARES

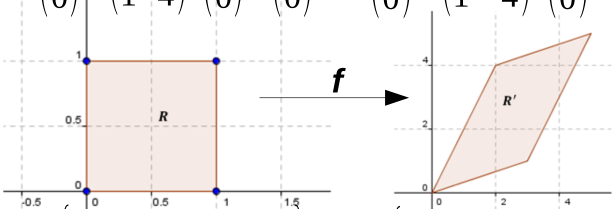
1) Nula: $f: V \rightarrow W / f(\vec{x}) = 0_w$
2) Identidad: $f: V \rightarrow V / f(\vec{x}) = I_v . \vec{x} = \vec{x}$
3) Contracción / estiramiento: $f: V \rightarrow V / f(\vec{x}) = E\,\vec{x}$
4) Proyecciones ortogonales sobre los ejes cartesianos.
5) Proyecciones ortogonales sobre los planos coordenados.
6) Reflexiones respecto de los ejes cartesianos.
7) Reflexiones respecto de los planos coordenados cartesianos.
8) Proyección ortogonal sobre un subespacio.
9) Transformación Cizallante.
10) Rotaciones.

Repaso de Clases Anteriores

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES: INTRODUCCIÓN

Sea el recinto R={(0,0)^T,(1,0)^T ,(1,1)^T ,(0,1)^T } R': luego de la transformación *f*.

$$f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$$



¿Habrá vectores que después de la deformación conservan la dirección?

f (1,1)^T = (5,5)^T. Conservó la dirección y se estiró con un factor 5.

$$R=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} \quad R'=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\right\}$$

Al vector que mantuvo su dirección se denomina <u>autovector</u>, y el factor por el cual se lo estiró es su <u>autovalor</u>.

$$A\vec{v}=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}\boxed{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}=5\boxed{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}=\lambda\vec{v}$$

$\lambda = 5$ *Autovalor*

$\vec{v} = (1;1)^T$ *Autovector*

Ejemplo extraído del sitio de la UTN FRBA: https://aga.frba.utn.edu.ar/autovalores-autovectores-definiciones-propiedades/

Repaso de Clases Anteriores

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES: DEFINICIÓN

Sea la TL: $f: V \rightarrow V$ (endomorfismo) $\Rightarrow f(\vec{x}) = A\vec{x}$

Sea $\vec{v} \in V \wedge \vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow [\vec{v}$ es autovector $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \wedge f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}]$

λ: Autovalor, valor propio, eigenvalor, valor característico.

$\vec{v}$: Autovector, vector propio, eigenvector, vector característico.

$f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$	Definición de autovector
$A\vec{v} = \lambda \vec{v}$	Expresión matricial de la TL
$A\vec{v} - \lambda \vec{v} = \vec{0}$	Operaciones con vectores
$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$	Anti-distributiva de $\vec{v}$ a derecha
$P(\lambda) = det(A - \lambda I)$	Polinomio característico

Como se debe resolver un sistema homogéneo que debe resultar SCI, luego:

$P(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$	Ecuación característica
$P(\lambda)$:	Polinomio característico.
λ:	Autovalores.

Repaso de Clases Anteriores

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES: EJEMPLO

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

1) Buscamos autovalores: Ecuación Característica

$$det[A - \lambda I] = det\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$P(\lambda) = [det(A - \lambda I)] = 0 \Rightarrow P(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$$

Los autovalores de A:

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \longrightarrow$ Multiplicidad algebraica = 2 (raiz doble de P(λ))

$\lambda_3 = 1 \longrightarrow$ Multiplicidad algebraica = 1 (raiz simple de P(λ))

Repaso de Clases Anteriores

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES: EJEMPLO

2) Buscamos autovectores: a partir de los autovalores hallados.

2.1. Para: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$$

Reemplazamos: $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad r(A)=r(A')=1,\ \#inc=3\ \Rightarrow \text{SCI(2gl)}$$

$$x+z=0 \Rightarrow x=-z$$

$$y=y$$

El subespacio generado por los autovectores asociados a los autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$:

$$S_{\lambda=2}=\left\{\vec{x}\in \mathbb{R}^3 \ / \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -z \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\} \quad \text{Una base: } B_{S_{\lambda=2}}=\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

autovectores asociados a los autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

Multiplicidad Geométrica= $dim(S_{\lambda=2})$ $\Rightarrow$ Multiplicidad Geométrica = 2

Repaso de Clases Anteriores

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES: EJEMPLO

2) Buscamos autovectores: a partir de los autovalores hallados.

2.2. Para: $\lambda_3 = 1$

$$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$$

Reemplazamos: $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{cases} y-z=0 \Rightarrow y=z \\ x+2z=0 \Rightarrow x=-2z \end{cases}$$

$$r(A)=r(A')=2,\ \#inc=3 \Rightarrow \text{SCI(1gl: } z\text{)}$$

El subespacio generado por los autovectores asociados al autovalor $\lambda_3 = 1$:

$$S_{\lambda=3}=\left\{\vec{x}\in \mathbb{R}^3 \ / \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2z \\ z \\ z \end{pmatrix}\right\} \quad \text{Una base: } B_{S_{\lambda=1}}=\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

autovector asociados al autovalor $\lambda_3 = 1$

Multiplicidad Geométrica= $dim(S_{\lambda=1})$ $\Rightarrow$ Multiplicidad Geométrica = 1

Repaso de Clases Anteriores

OBSERVACIONES:

1) La Multiplicidad Algebraica (ma) siempre resulta mayor o igual a la Multiplicidad Geométrica (mg): $ma \geq mg$
2) Si $\forall \lambda_1 : ma = mg \Rightarrow$ la matriz A resulta diagonalizable.

PROPIEDADES:

1) Si λ es autovalor de A $\Rightarrow \lambda^k$ es autovalor de A^k
2) Si $\lambda = 0$ no es autovalor de A $\Rightarrow$ A es inversible.
3) Si λ es autovalor de una TL y S_λ conjunto de autovectores asociados a λ:
   $\Rightarrow S = S_\lambda \cup \vec{0}$ es subespacio.
4) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(A)$
5) $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = det(A)$

Repaso de Clases Anteriores

MATRICES SEMEJANTES

Dos matrices A_1 y A_2 son semejantes $\Leftrightarrow P_1(\lambda) = P_2(\lambda)$

Ejemplo:
$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_1(\lambda) = det\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right] = det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda).(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$$

$$\Rightarrow P_1(\lambda) = (1-\lambda).(2-\lambda).(2-\lambda)$$

$$P_2(\lambda) = det\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -5 & 5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right] = det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ -5 & 5 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda).(2-\lambda).(2-\lambda)$$

Diagonalización de Matrices

DEFINICION

Una matriz A cuadrada es diagonalizable si existe una matriz P Inversible de modo que: $D = P^{-1}.A.P$ *es una matriz diagonal.*

P: matriz de pasaje.

Se dice que la matriz P diagonaliza a la matriz A.

PROPIEDAD

La matriz A de orden n es diagonalizable <==> admite n autovectores independientes. Esta afirmación es equivalente a que si f tiene n autovalores diferentes.

La matriz A es diagonalizable si: $\forall \lambda_i : ma = mg$

Diagonalización de Matrices

COMO DIAGONALIZAR UNA MATRIZ

1) Determinar los autovalores y autovectores de la matriz A.
2) Armar la matriz de pasaje P: se construye tomando como sus columnas las bases de los autovectores de A.
3) Calcular: P^{-1}.
4) Calcular: $D = P^{-1}.A.P$

Diagonalización de Matrices

EJEMPLO Diagonalizar la matriz A con $A=\begin{pmatrix}0&0&-2\\1&2&1\\1&0&3\end{pmatrix}$

1) Autovalores y autovectores de A:

Como A es la matriz del ejemplo anterior ==> Ya tenemos sus autovalores y autovectores.

2) Armado de la matriz de pasaje P:

$$P=\begin{pmatrix}-1&0&-2\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

Pregunta: ¿Existirá P^{-1}?

det(P) = 1 ==> P es inversible.

Diagonalización de Matrices

EJEMPLO Diagonalizar la matriz A con $A=\begin{pmatrix}0&0&-2\\1&2&1\\1&0&3\end{pmatrix}$

3) Calcular P^{-1}

$$P=\begin{pmatrix}-1&0&-2\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow Cof(P)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\2&1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow Adj(P)=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$$

4) Calcular D = P^{-1}.A.P

$$D=P^{-1}.A.P=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0&0&-2\\1&2&1\\1&0&3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1&0&-2\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}2&0&4\\2&2&2\\-1&0&-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1&0&-2\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$$

En la diagonal se puede observar a los autovalores extraídos de A.

Diagonalización de Matrices

DIAGONALIZACION ORTOGONAL

Si A es simétrica ==> A se puede diagonalizar ortogonalmente.

Las bases de los autovectores asociados a cada autovalor serán ortogonales con las bases de los autovectores asociados a los otros autovalores.

PROPIEDAD:

Cualquier matriz ortogonal se puede diagonalizar. Entonces, se dice que las matrices ortogonales son diagonalizables ortogonalmente.

Todos los autovalores de una matriz ortogonal son de módulo igual a 1.

Diagonalización de Matrices

EJEMPLO

Sea $A=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Calcular autovalores, autovectores, y diagonalizar A.

1) Autovalores y Autovectores:

1.1. Autovalores:

$$P(\lambda)=det(A-\lambda I)=det\left[\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right]=det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda)=(-3-\lambda)^2-16=0 \Rightarrow P(\lambda)=\lambda^2+6\lambda+9-16=0$$

$$P(\lambda)=\lambda^2+6\lambda-7=0 \quad \begin{cases} \lambda_1=1 \longrightarrow \text{ma} = 1 \\ \lambda_2=-7 \longrightarrow \text{ma} = 1 \end{cases}$$

Diagonalización de Matrices

EJEMPLO

Sea $A=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}$. Calcular autovalores, autovectores, y diagonalizar A.

1) Autovalores y Autovectores:

1.2.1. Autovectores para λ₁ = 1 (ma = 1)

$$(A-\lambda I).\vec{x}=\vec{0}$$

$$\begin{pmatrix}-4 & 4\\ 4 & -4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & -4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\longrightarrow x_1=x_2$$

$$S_{\lambda=1}=\left\{\vec{X}\in\mathbb{R}^2/\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\ x_2\end{pmatrix}\right\}\Rightarrow B_{S_{\lambda=1}}=\left\{\boxed{\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}}\right\}$$

autovector asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$

$$mg=dim(S_{\lambda=1})=1$$

Diagonalización de Matrices

EJEMPLO

Sea $A=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}$. Calcular autovalores, autovectores, y diagonalizar A.

1) Autovalores y Autovectores:

1.2.2. Autovectores para λ₂ = –7 (ma = 1)

$$(A-\lambda I).\vec{x}=\vec{0}$$

$$\begin{pmatrix}4 & 4\\ 4 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\longrightarrow x_1=-x_2$$

$$S_{\lambda=-7}=\left\{\vec{X}\in\mathbb{R}^2/\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x_2\\ x_2\end{pmatrix}\right\}\Rightarrow B_{S_{\lambda=-7}}=\left\{\boxed{\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}}\right\}$$

autovector asociado al autovalor $\lambda_2 = -7$

$$mg=dim(S_{\lambda=-7})=1$$

Y además:

$$\langle\vec{u};\vec{v}\rangle=0\Rightarrow S_{\lambda=1}\perp S_{\lambda=-7}$$

Diagonalización de Matrices

EJEMPLO

Sea $A=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}$. Calcular autovalores, autovectores, y diagonalizar A.

2) Obtener P:

$$P=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

3) Calcular P^{-1}:

$$Cof(P)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow Adj(P)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

4) Hallar D:

$$D=P^{-1}.A.P=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 7 & -7\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -14\end{pmatrix}$$

$D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -7\end{pmatrix}$ Observar que en la diagonal están los autovalores $\lambda = 1$ y $\lambda = -7$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 12: Diagonalización

Para cada una de las matrices A correspondientes a unaTL encontrar el polinomio característico, la ecuación característica, los autovalores, autovectores, obtener la matriz de pasaje P y si es posible, hallar D la diagonalización de A.

12.1. Para $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

$$P(\lambda)=det\left[\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\right]=det\begin{pmatrix}3-\lambda & 2\\ -1 & -\lambda\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{P(\lambda)=\lambda^2-3\lambda+2}$$

Polinomio característico

Ecuación caracteristica: $P(\lambda)=0\Rightarrow\lambda^2-3\lambda+2=0$

1. Autovalores y Autovectores:

1.1. Autovalores: las raíces de la ecuación característica

$\lambda_1 = 1$ (ma = 1)

$\lambda_2 = 2$ (ma = 1)

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 12: Diagonalización

Autovector asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$

1.2. Autovectores: $(A - \lambda I).\bar{x} = \bar{0}$

1.2.1. Autovectores asociados al autovalor $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow x = -y \qquad S_{\lambda_1=1} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 / \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} \right\} \qquad B_{S_{\lambda=1}} = \left\{ \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

mg = 1

1.2.2. Autovectores asociados al autovalor $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow x = -2y \qquad S_{\lambda_2=2} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 / \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} \right\} \qquad B_{S_{\lambda=2}} = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

mg = 1

Autovector asociado al autovalor $\lambda_2 = 2$

Como $\forall \lambda : ma = mg \Rightarrow$ A es diagonalizable.

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 12: Diagonalización

2. Armado de la matriz de pasaje P:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Cálculo de P^{-1}:

$$Cof(P) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(P) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Con } det(P) = 1 \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Verificación: $P.P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Cálculo de D:

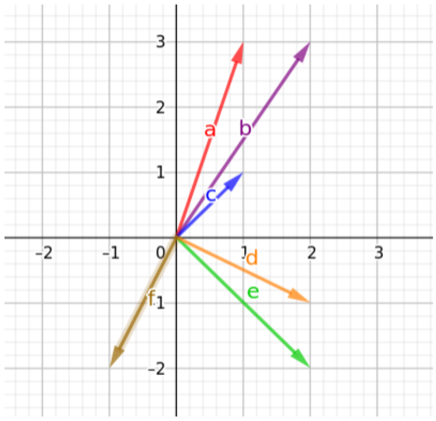
$$D = P^{-1}.A.P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] . \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

Pueden observarse los autovalores en la diagonal

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 12: Diagonalización

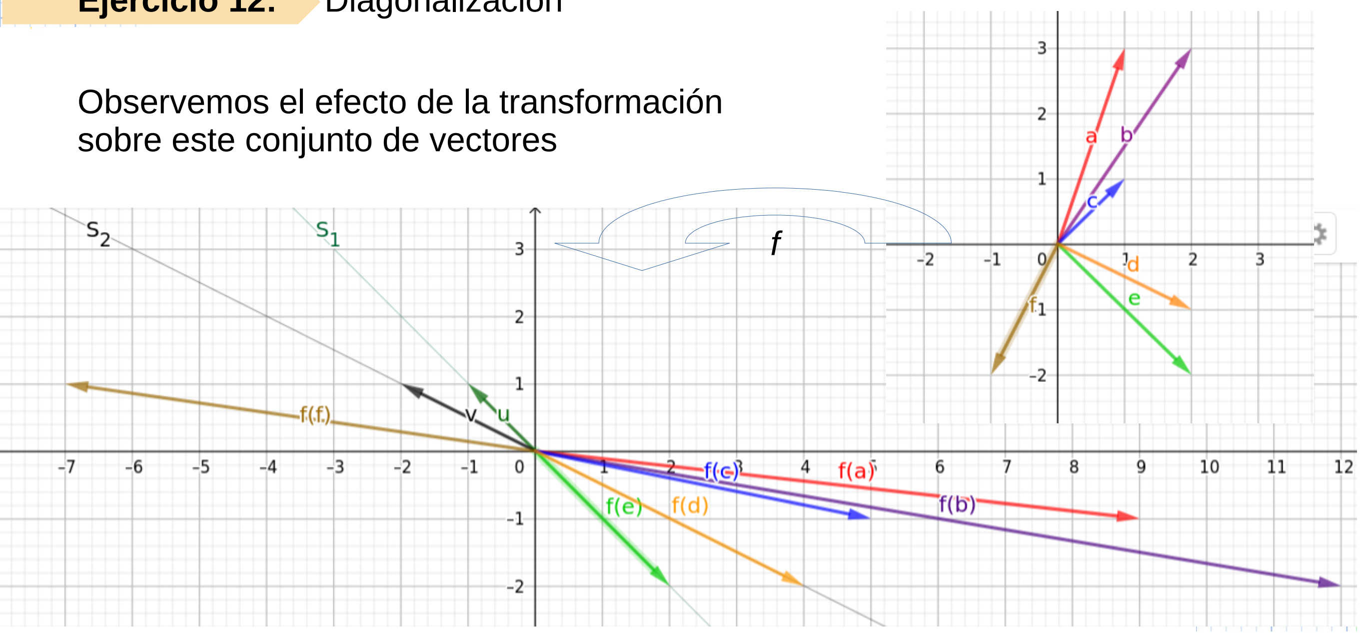
Observemos el efecto de la transformación
sobre este conjunto de vectores



Ejercicios de la Guía

Ejercicio 12: Diagonalización

Observemos el efecto de la transformación
sobre este conjunto de vectores



Ejercicios de la Guía

Ejercicio 14.1: Hallar los subespacios propios de las TL. ¿Para qué valor de k la matriz es diagonalizable?

$$A=\begin{pmatrix}1&2&k\\0&1&0\\0&4&3\end{pmatrix}\quad P(\lambda)=det(A-\lambda I)=det\begin{pmatrix}1-\lambda&2&k\\0&1-\lambda&0\\0&4&3-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda).\begin{vmatrix}1-\lambda&k\\0&3-\lambda\end{vmatrix}$$

$P(\lambda)=(1-\lambda).(1-\lambda).(3-\lambda)\ \Rightarrow$ Autovalores: $P(\lambda)=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=1(ma=2)\wedge\lambda_3=3(ma=1)$

Autovectores para $\lambda=1$

$$\begin{pmatrix}0&2&k\\0&0&0\\0&4&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&2&k\\0&0&0\\0&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&2-2k&0\\0&0&0\\0&2&1\end{pmatrix}$$

Si $k=1: r(A)=r(A')=1$

$\Rightarrow$ SCI con 2gl $(z=-2y\wedge x=x)$

$$S_{\lambda=1}=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3/\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\-2y\end{pmatrix}\right\},B_{S_{\lambda=1}}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

Con: mg = 2

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 15.1: Hallar los subespacios propios de las TL. ¿Para qué valor de k la matriz es diagonalizable?

Autovectores para $\lambda=3$ (con k=1)

$$\begin{pmatrix}-2&2&1\\0&-2&0\\0&4&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2&2&1\\0&1&0\\0&4&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$r(A)=r(A')=1\Rightarrow$ SCI con 1gl $(z=2x)$

$$S_{\lambda=3}=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3/\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\2x\end{pmatrix}\right\},B_{S_{\lambda=3}}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$$

Con: mg = 1

k=1 $\Rightarrow\forall\lambda_i: ma=mg\Rightarrow$ A es diagonalizable

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 15.1: Diagonalización Ortogonal de Matrices

Diagonalizar ortogonalmente si es posible: $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

Observo: A es simétrica <==> es diagonalizable, los autovectores serán ortogonales.

1. Autovalores y Autovectores:
1.1. Autovalores: las raíces de la ecuación característica

$$P(\lambda)=det\left[\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\right]=det\begin{pmatrix}3-\lambda & 1\\ 1 & 3-\lambda\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{P(\lambda)=\lambda^2-6\lambda+8} \longleftarrow \text{Polinomio característico}$$

Ecuación caracteristica: $P(\lambda)=0\Rightarrow\lambda^2-6\lambda+8=0$

$\lambda_1 = 2$ (ma = 1)
$\lambda_2 = 4$ (ma = 1)

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 15.1: Diagonalización Ortogonal de Matrices

1.2. Autovectores: $(A-\lambda I).\overline{x}=\overline{0}$

1.2.1. Autovectores asociados al autovalor $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\longrightarrow x=-y \quad S_{\lambda_1=2}=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^2/\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y\\ y\end{pmatrix}\right\} \quad B_{S_{\lambda=2}}=\left\{\vec{u}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\right\} \quad \textbf{mg = 1}$$

Autovector asociado al autovalor $\lambda_1 = 2$

1.2.2. Autovectores asociados al autovalor $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\longrightarrow x=y \quad S_{\lambda_2=4}=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^2/\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\ y\end{pmatrix}\right\} \quad B_{S_{\lambda=4}}=\left\{\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right\} \quad \textbf{mg = 1}$$

Autovector asociado al autovalor $\lambda_2 = 4$

Además:

$$\begin{cases}\forall\lambda: ma=mg\\ \langle\vec{u};\vec{v}\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle=0\end{cases}$$

$\Rightarrow$ A es diagonalizable Ortogonalmente.

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 15.1: Diagonalización Ortogonal de Matrices

2. Armado de la matriz de pasaje P:

$$P=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

3. Cálculo de P^{-1}:

$$Cof(P)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow Adj(P)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}.\text{Con } det(P)=-2\Rightarrow P^{-1}=\left(\frac{-1}{2}\right)\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

4. Cálculo de D:

$$D=P^{-1}.A.P=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\right].\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 4 & 4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{D=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}}$$

Pueden observarse los autovalores en la diagonal

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 15.1: Diagonalización Ortogonal de Matrices

Un enfoque más sencillo:

¿Qué pasa si los vectores que ya son ortogonales, los normalizamos (PGS)?

Tenemos una matriz ortogonal. Entonces, su inversa es su traspuesta, lo cual facilita los cálculos, lo que presenta a continuación.

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 15.1: Diagonalización Ortogonal de Matrices

2. Armado de la matriz de pasaje P:

$$P=\begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Cálculo de P^{-1}:

$$P^{-1}=P^{T}=\begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Cálculo de D:

$$D=P^{-1}.A.P=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right].\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

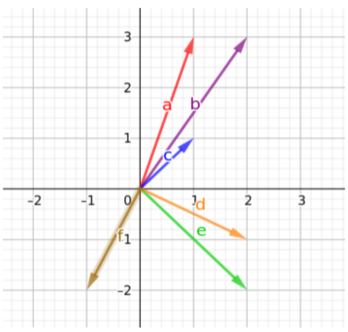
$$D=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{D=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

Pueden observarse los autovalores en la diagonal

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 15.1: Diagonalización Ortogonal de Matrices

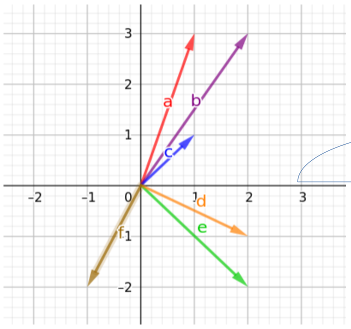
Observemos el efecto de la transformación sobre este conjunto de vectores



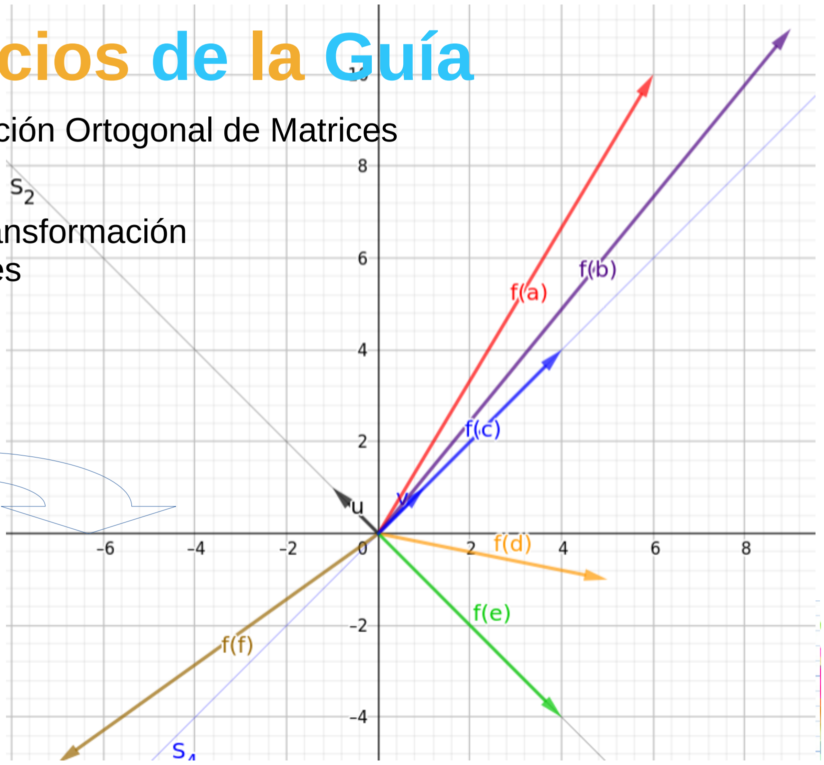
Ejercicios de la Guía

Ejercicio 15.1: Diagonalización Ortogonal de Matrices

Observemos el efecto de la transformación
sobre este conjunto de vectores



f



Ejercicios de la Guía

En el campus colocaremos la resolución del ejercicio 13.2, el cual fue realizado por las docentes titulares de la cátedra.

En el campus hallarán un documento llamado “Apunte Autovalores y autovectores” que además de conceptos del tema, contiene las demostraciones pedidas en el ejercicio 16.

Sugerimos su análisis.