Álgebra y Geometría Analítica

Clase 29: Autovalores y Autovectores

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

Unidad 5 – Clase 29

Repaso de Clases Anteriores

TRANSFORMACIONES

Definición:

Una Transformación entre dos espacios vectoriales es una función que a cada elemento del primer EV le hace corresponder un elemento del segundo EV.

Características:

$f: V \rightarrow W$ es inyectiva $\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in V, \forall \vec{y} \in V: \vec{x} \neq \vec{y} \Rightarrow f(\vec{x}) \neq f(\vec{y})$.

$f: V \rightarrow W$ es Subyectiva $\Leftrightarrow \forall \vec{y} \in W: \exists \vec{x} \in V / f(\vec{x}) = \vec{y}$

$f: V \rightarrow W$ es biyectiva $\Leftrightarrow \forall f$ es inyectiva y subyectiva .

Por ser función, tiene su dominio y su codominio, con la particularidad de que éstos son espacios vectoriales.

Ejemplos:

Traslación, Traza de una matriz.

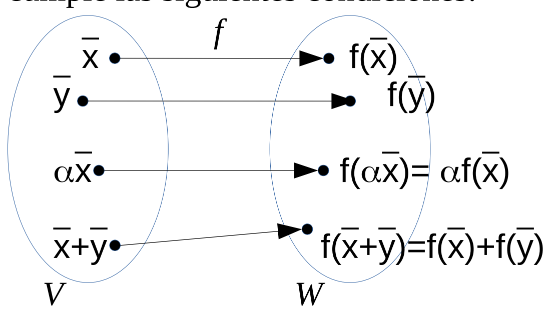
Repaso de Clases Anteriores

TRANSFORMACIONES LINEALES (TL)

Definición:

Una Transformación $f: V \rightarrow W$ es TL si cumple las siguientes condiciones:

1) $f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$
2) $f(\alpha \vec{x}) = \alpha f(\vec{x})$



Ambas condiciones pueden resumirse en: $f(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})$

Generalizando: $f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\vec{x}_i)$

CL de vectores de V

CL de vectores de W

Repaso de Clases Anteriores

TRANSFORMACIONES LINEALES (TL)

Propiedades:

1) $f(\vec{0}_v)=\vec{0}_w$
2) $f(-\vec{x}_v)=-f(\vec{x}_v)$

Clasificación:

1) $f:V\rightarrow W$ es TL $\Rightarrow f$ es MORFISMO (Mantiene la forma ya que los escalares de la CL son los mismos).
2) Si f es inyectiva $\rightarrow f$ es MONOMORFISMO.
   Si f es monomorfismo $\Rightarrow Nu(f)=\{\vec{0}_v\}$
3) Si f es subyectiva $\rightarrow f$ es EPIMORFISMO.
   Si f es epimorfismo $\Rightarrow \mathrm{Im}(f)\equiv W$
4) Si f es biyectiva $\rightarrow f$ es ISOMORFISMO.
5) Si $f:V\rightarrow V\Rightarrow f$ es ENDOMORFISMO.
6) Si $f:V\rightarrow V\wedge f$ función biyectiva $\Rightarrow f$ es AUTOMORFISMO.

Repaso de Clases Anteriores

TRANSFORMACIONES LINEALES (TL)

Operaciones entre TL:

Dadas las siguientes transformaciones lineales: $f:V\rightarrow W, g:V\rightarrow W, h:W\rightarrow U$

1) SUMA: $(f+g):V\rightarrow W / \forall\vec{x}\in V:(f+g)(\vec{x})=f(\vec{x})+g(\vec{x})$
2) DIFERENCIA: $(f-g):V\rightarrow W / \forall\vec{x}\in V:(f-g)(\vec{x})=f(\vec{x})-g(\vec{x})$
3) PRODUCTO DE UN ESCALAR Y UNA TL: $\forall\vec{x}\in V\wedge\forall k\in\mathbb{R}:(kf)(\vec{x})=kf(\vec{x})$
4) COMPOSICIÓN: $h\circ f:V\rightarrow U/\forall\vec{x}\in V\,(h\circ f)(\vec{x})=h(f(\vec{x}))$
5) INVERSA: $f:V\rightarrow V, f$ es biyectiva $\Rightarrow\exists f^{-1}$(la TL inversa de f) / $\forall\vec{x}\in V$:
   $(f^{-1}\circ f)(\vec{x})=(f\circ f^{-1})(\vec{x})=\vec{x}$

Repaso de Clases Anteriores

TRANSFORMACIONES LINEALES (TL)

Núcleo de una TL:

$f: V \to W$

$Nu(f) = \{\vec{x} \in V / f(\vec{x}) = \vec{0}_w\}$

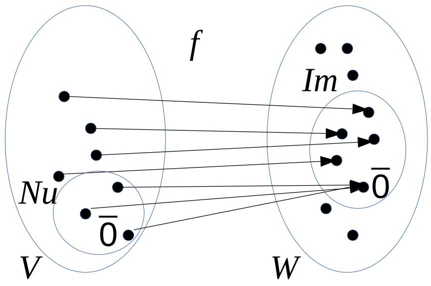


Imagen de una TL:

$f: V \to W$

$\mathrm{Im}(f) = \{\vec{y} \in W / \exists \vec{x} \in V \wedge f(\vec{x}) = \vec{y}\}$

Teorema de la Dimensión:

Sea f: V → W una TL:

dim(Nu(f)) + dim(Im(f)) = dim(V)

Repaso de Clases Anteriores

MATRIZ ASOCIADA A UNA TL

Definición:

Sea $f(\vec{x}): V \to W$ una TL. La TL f puede expresarse matricialmente:

$\boxed{f(\vec{x}) = F.\vec{x}}$ donde F: es la matriz asociada a la TL f

Si: $f: V \to W$ con: $dim(V) = n \wedge dim(W) = m \Rightarrow F \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Es decir: la matriz F asociada a la TL f será de orden $m \times n$.

Si: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \Rightarrow F \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Si: $f: \mathbb{R}^{n \times m} \to \mathbb{R}^p \Rightarrow F \in \mathbb{R}^{p \times (m \times n)}$

Repaso de Clases Anteriores

MATRIZ ASOCIADA A UNA TL

Cómo hallar F utilizando las bases canónicas:

Cada columna de la matriz F asociada a la TL f está dada por los transformados de los vectores canónicos del primer espacio.

Es decir: la primer columna de F se obtiene tras aplicar *f* al primer vector de la base canónica. Luego se repite para la segunda columna. Se repite *n* veces (con *n*: dimensión del espacio de partida)

Repaso de Clases Anteriores

MATRIZ ASOCIADA A UNA TL

Cómo hallar F utilizando las bases canónicas: Ejemplo.

Sea: $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 / f(x_1;x_2;x_3;x_4)=(x_1-3x_2+5x_4;x_1+x_2-2x_3-3x_4)$. Hallar F: la matriz asociada a f utilizando la base canonica de $\mathbb{R}^4$.

$B_{\mathbb{R}^4}=\{(1;0;0;0),(0;1;0;0),(0;0;1;0),(0;0;0;1)\}$

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\ f\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix};\ f\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix};\ f\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{F=\begin{pmatrix}1&-3&0&5\\1&1&-2&-3\end{pmatrix}}$$

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=F.\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&0&5\\1&1&2&-3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-3x_2+5x_4\\x_1+x_2-2x_3-3x_4\end{pmatrix}$$

Repaso de Clases Anteriores

MATRIZ ASOCIADA A UNA TL

Cómo hallar F a partir de los transformados de una base (Extensión por linealidad)

Sea f: $R^n \rightarrow R^m$ pero no se conoce la expresión de *f*.
Se conoce B = $\{\overline{v}_1 ; \overline{v}_2 ; \dots \overline{v}_n\}$ una base de R^n.
Se conocen: $\overline{y}_i = f(\overline{v}_i)$ los transformados de la base B, con $\overline{y}_i \in R^m$.
La matriz F asociada a la TL *f* puede hallarse como sigue:
Hallamos los escalares α_i / la CL de B resulta en el vector genérico: $\overline{x} \in R^n$.

Aplicando $f: f(\vec{x}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\vec{v}_i)$

Por ser TL, valen las condiciones de linealidad: aplicarlas.
Luego, como $\vec{y} = f(\vec{v}_i)$ es conocido $\Rightarrow$ se lo reemplaza.
Finalmente F puede hallarse.

Repaso de Clases Anteriores

MATRIZ ASOCIADA A UNA TL

Ejemplo: Hallar $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sabiendo que: $f\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}; f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}; f\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$

1) Verificar que $B = \{(3;1;0)^T ; (1;0;1)^T ; (2;1;1)^T\}$ es LI $\Rightarrow \mathbb{R}^3 = gen(B)$

$$det(B) = \begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{vmatrix} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{vmatrix} = -2 \Rightarrow \text{ B es LI}$$

Repaso de Clases Anteriores

MATRIZ ASOCIADA A UNA TL

Ejemplo: Hallar $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sabiendo que: $f\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}; f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}; f\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$

2) Hallar los $\alpha_i / \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{v}_1 = \vec{x}$ $\qquad \alpha_1\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&1&2&x_1\\1&0&1&x_2\\0&1&1&x_3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&-1&x_1-3x_2\\1&0&1&x_2\\0&1&1&x_3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&-2&x_1-3x_2-x_3\\1&0&1&x_2\\0&1&1&x_3\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&1&-\frac{1}{2}x_1+\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\\1&0&1&x_2\\0&1&1&x_3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&1&-\frac{1}{2}x_1+\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\\1&0&0&\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\\0&1&0&\frac{1}{2}x_1-\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\\\alpha_2=\frac{1}{2}x_1-\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\\\alpha_3=\frac{-1}{2}x_1+\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\end{cases}$$

Repaso de Clases Anteriores

MATRIZ ASOCIADA A UNA TL

Ejemplo: Hallar $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sabiendo que: $f\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}; f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}; f\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$

3) Con los α_i armamos la CL igualada al vector genérico: $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{v}_1 = \vec{x}$

$$\left(\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right).\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{2}x_1-\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right).\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\left(\frac{-1}{2}x_1+\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right).\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

4) Aplico f a ambos miembros

$$f\left[\left(\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right).\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{2}x_1-\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right).\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\left(\frac{-1}{2}x_1+\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right).\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right]=f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

Repaso de Clases Anteriores

MATRIZ ASOCIADA A UNA TL

Ejemplo: Hallar $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sabiendo que: $f\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix};\ f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix};\ f\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$

Por 1er condición de linealidad:

$$f\left[\left(\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right).\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\right]+f\left[\left(\frac{1}{2}x_1-\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right).\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]+f\left[\left(\frac{-1}{2}x_1+\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right).\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right]=f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

Por 2da condición de linealidad:

$$\left(\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right).f\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{2}x_1-\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right).f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\left(\frac{-1}{2}x_1+\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right).f\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

Por Hipótesis:

$$\left(\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right).\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{2}x_1-\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right).\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}+\left(\frac{-1}{2}x_1+\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right).\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

Repaso de Clases Anteriores

MATRIZ ASOCIADA A UNA TL

Ejemplo: Hallar $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sabiendo que: $f\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix};\ f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix};\ f\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$

Multiplicando los escalares α_i por los vectores:

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\\ \frac{-1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}x_1-\frac{9}{2}x_2-\frac{3}{2}x_3\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2x_1+6x_2+2x_3\\ x_1-3x_2-x_3\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2+3x_3\\ \frac{1}{2}x_1-\frac{5}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\end{pmatrix}\Rightarrow \underbrace{\boxed{f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&3\\ \frac{1}{2}&\frac{-5}{2}&\frac{-1}{2}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}}}_{F}$$

Repaso de Clases Anteriores

ALGUNAS TL PARTICULARES

1) Nula: $f: V \to W / f(\vec{x}) = 0_w$

Ejemplo: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 / f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) Identidad: $f: V \to V / f(\vec{x}) = I_v . \vec{x} = \vec{x}$

Ejemplo: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

3) Contracción / estiramiento: $f: V \to V / f(\vec{x}) = E\,\vec{x}$

En $\mathbb{R}^2$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,x_1 \\ b\,x_2 \end{pmatrix}$

Si a = b > 1: estiramiento uniforme.
Si a = b y |a| < 1: contracción uniforme.
Si a ≠ 1: contracción / estiramiento en el eje x.
Si b ≠ 1: contracción / estiramiento en el eje y.

Nota:
Si se desea aplicar la misma TL a un conjunto de vectores, es posible hacerlo en una única operación.
Esto se logra multiplicando a la matriz de la transformación por una matriz que en sus columnas contenga a cada uno de los vectores.
Resulta en otra matriz donde los vectores transformados se presentan en las columnas.

Repaso de Clases Anteriores

ALGUNAS TL PARTICULARES

4) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Proyecciones ortogonales sobre los ejes:

a. Sobre eje x:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

b. Sobre eje y:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

c. Sobre eje z:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

5) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Proyecciones ortogonales sobre los planos coordenados:

a. Sobre plano xy:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

b. Sobre plano yz:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

c. Sobre plano xz:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Repaso de Clases Anteriores

ALGUNAS TL PARTICULARES

6) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Reflexiones respecto a los ejes:

a. respecto al eje x:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

b. respecto al eje y:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

c. respecto al eje z:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

7) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Reflexiones respecto de los planos coordenados:

a. Respecto al plano xy:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

b. Respecto al plano yz:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

c. Respecto al plano xz:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Repaso de Clases Anteriores

ALGUNAS TL PARTICULARES

8) Proyección ortogonal sobre un subespacio:

$f:V \to W$ con $B_s = \{\vec{w}_1; \vec{w}_2; \ldots; \vec{w}_n\}$ base ortogonal de $S, S \subset W$.

$f:V \to W / f(\vec{x}) = proy_S \vec{x} \, [dim(V) = m; dim(W) = n]$

$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \vec{x}; \vec{w}_i \rangle}{\langle \vec{w}_i; \vec{w}_i \rangle} \vec{w}_i$ Observación: Si B es base ortonormal $\Rightarrow f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x}; \vec{w}_i \rangle \vec{w}_i$

9) Cizallante:

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / f(x;y) = (x + \alpha y; y)$ (de factor α en la dirección del eje x)

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / f(x;y) = (x, y + \beta x)$ (de factor β en la dirección del eje y)

10) Rotación en el plano de ángulo α en sentido anti-horario:

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\,\alpha \\ sen\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Repaso de Clases Anteriores

ALGUNAS TL PARTICULARES

10) Rotación en el espacio de ángulo α en sentido anti-horario alrededor de un eje :

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 / f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) Alrededor de eje x: $R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -sen\,\alpha \\ 0 & sen\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

b) Alrededor de eje y: $R=\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & sen\,\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\,\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$

c) Alrededor de eje z: $R=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\,\alpha & 0 \\ sen\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Repaso de Clases Anteriores

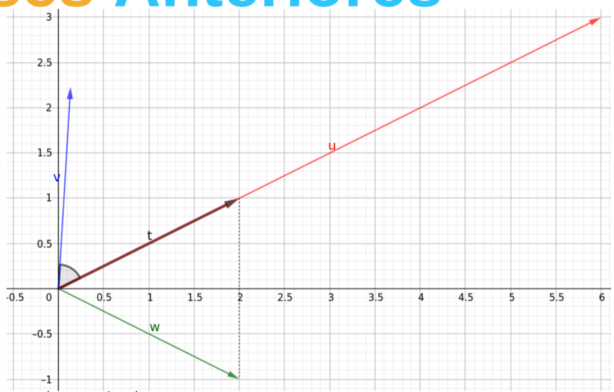
ALGUNAS TL PARTICULARES

Ejemplo: Sea $\vec{t}=(2;1)$

a) Estirar el vector homogeneamente al triple.

b) Rotarlo $\frac{\pi}{3}$ en sentido antihorario.

c) Reflejarlo respecto del eje x



a) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}=\vec{u}$

b) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{3}+\frac{1}{2} \end{pmatrix}=\vec{v}$

c) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\vec{w}$

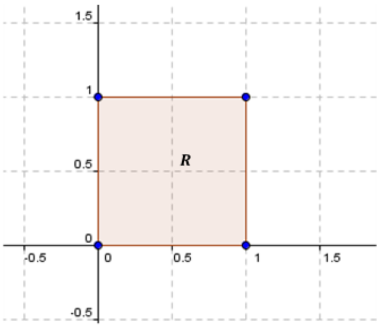
Autovalores y Autovectores

INTRODUCCIÓN

Ejemplo: Se desea conocer el efecto que la matriz A realiza sobre los vectores no nulos de R².

$$A=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}\Rightarrow f(\vec{x})=A\vec{x}=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\text{Sea el recinto } R=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$



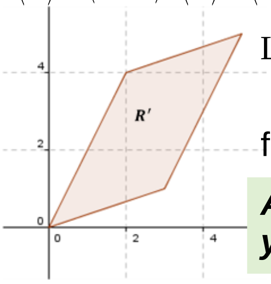
Ejemplo extraído del sitio de la UTN FRBA: https://aga.frba.utn.edu.ar/autovalores-autovectores-definiciones-propiedades/

Autovalores y Autovectores

INTRODUCCIÓN

R': el recinto R luego de la transformación *f*.

$$f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\quad f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\quad f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}\quad f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$$



$$\text{Luego: } R'=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\right\}$$

¿Habrá vectores que después de la deformación conservan la dirección?

f $(1,1)^T = (5,5)^T$. Conservó la dirección y se estiró con un factor 5.

Al vector que mantuvo su dirección se denomina autovector, y el factor por el cual se lo estiró es su autovalor.

$$A\vec{v}=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}\boxed{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}=5\boxed{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}=\lambda\vec{v}$$

$$\lambda=5 \quad \text{Autovalor}$$
$$\vec{v}=(1;1)^T \quad \text{Autovector}$$

Ejemplo extraído del sitio de la UTN FRBA: https://aga.frba.utn.edu.ar/autovalores-autovectores-definiciones-propiedades/

Autovalores y Autovectores

DEFINICIÓN

Sea la TL: $f: V \rightarrow V$ (endomorfismo) $\Rightarrow f(\vec{x}) = A\vec{x}$

Sea $\vec{v} \in V \wedge \vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow [\vec{v}$ es autovector $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \wedge f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}]$

λ: Autovalor, valor propio, eigenvalor, valor característico.

$\vec{v}$: Autovector, vector propio, eigenvector, vector característico.

$f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$	Definición de autovector
$A\vec{v} = \lambda \vec{v}$	Expresión matricial de la TL
$A\vec{v} - \lambda \vec{v} = \vec{0}$	Operaciones con vectores
$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$	Anti-distributiva de $\vec{v}$ a derecha
$P(\lambda) = det(A - \lambda I)$	Polinomio característico

Como se debe resolver un sistema homogéneo que debe resultar SCI, luego:

$P(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$	Ecuación característica
$P(\lambda)$:	Polinomio característico.
λ:	Autovalores.

Autovalores y Autovectores

EJEMPLO:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

1) Buscamos autovalores: Ecuación Característica

$$det[A - \lambda I] = det\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$P(\lambda) = [det(A - \lambda I)] = 0 \Rightarrow P(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$$

Los autovalores de A:

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \longrightarrow$ Multiplicidad algebraica = 2 (raiz doble de P(λ))

$\lambda_3 = 1 \longrightarrow$ Multiplicidad algebraica = 1 (raiz simple de P(λ))

Autovalores y Autovectores

EJEMPLO (CONT.):

2) Buscamos autovectores: a partir de los autovalores hallados.

2.1. Para: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$$

Reemplazamos: $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A)=r(A')=1,\ \#inc=3\ \Rightarrow \text{SCI(2gl)} \begin{cases} x+z=0 \Rightarrow x=-z \\ y=y\ \forall\ y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

El subespacio generado por los autovectores asociados a los autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$:

$$S_{\lambda=2}=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3\ /\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -z \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\} \quad \text{Una base: } B_{S_{\lambda=2}}=\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

autovectores asociados a los autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$dim(S_{\lambda=2}) \Rightarrow mg=2$ mg: Multiplicidad Geométrica

Autovalores y Autovectores

EJEMPLO (CONT.):

2) Buscamos autovectores: a partir de los autovalores hallados.

2.2. Para: $\lambda_3 = 1$

$$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$$

Reemplazamos: $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{cases} y-z=0 \Rightarrow y=z \\ x+2z=0 \Rightarrow x=-2z \end{cases} \qquad r(A)=r(A')=2,\ \#inc=3\ \Rightarrow \text{SCI(1gl: } z\text{)}$$

El subespacio generado por los autovectores asociados al autovalor $\lambda_3 = 1$:

$$S_{\lambda=1}=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3\ /\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2z \\ z \\ z \end{pmatrix}\right\} \quad \text{Una base: } B_{S_{\lambda=1}}=\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

autovector asociados al autovalor $\lambda_3 = 1$

$dim(S_{\lambda=1}) \Rightarrow mg=1$

Autovalores y Autovectores

OBSERVACIONES:

1) La Multiplicidad Algebraica (ma) siempre resulta mayor o igual a la Multiplicidad Geométrica (mg): $ma \geq mg$

2) Si $\forall \lambda_i : ma = mg \Rightarrow$ la matriz A resulta diagonalizable.

Autovalores y Autovectores

PROPIEDADES:

1) Si λ es autovalor de A $\Rightarrow \lambda^k$ es autovalor de A^k
2) Si $\lambda = 0$ no es autovalor de A $\Rightarrow$ A es inversible.
3) Si λ es autovalor de una TL y S_λ conjunto de autovectores asociados a λ:
   $\Rightarrow S = S_\lambda \cup \vec{0}$ es subespacio.
4) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(A)$
5) $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = det(A)$

Autovalores y Autovectores

MATRICES SEMEJANTES

Dos matrices A_1 y A_2 son semejantes $\Leftrightarrow P_1(\lambda)=P_2(\lambda)$

Ejemplo:

$$A_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix} \quad A_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ -5 & 5 & 2\end{pmatrix}$$

$$P_1(\lambda)=det\left[\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\right]=det\begin{pmatrix}-\lambda & 0 & -2\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 1 & 0 & 3-\lambda\end{pmatrix}=(2-\lambda).(\lambda^2-3\lambda+2)$$

$$\Rightarrow P_1(\lambda)=(1-\lambda).(2-\lambda).(2-\lambda)$$

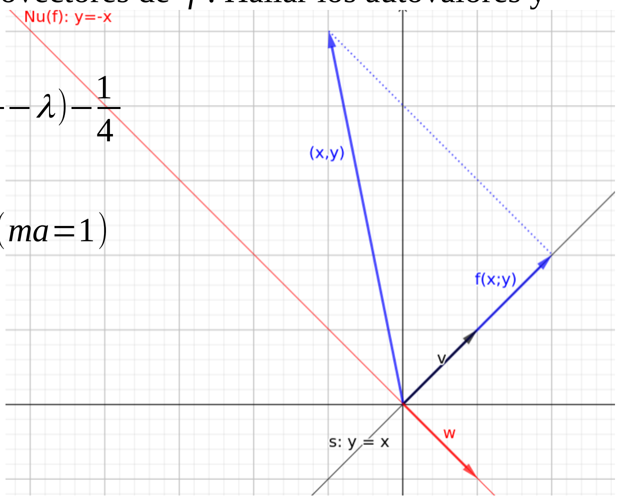
$$P_2(\lambda)=det\left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ -5 & 5 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\right]=det\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 1 & 2-\lambda & 0\\ -5 & 5 & 2-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda).(2-\lambda).(2-\lambda)$$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 6.1:

Sea la TL $f:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$ tal que le haga corresponder a cada vector $(x;y)$ del plano su proyección ortogonal sobre la recta $y=x$, como indica la figura. Describir geométricamente cuáles son los autovalores y autovectores de f. Hallar los autovalores y autovectores.

$$P(\lambda)=det[A-\lambda I]=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda\end{pmatrix}=(\frac{1}{2}-\lambda).(\frac{1}{2}-\lambda)-\frac{1}{4}$$



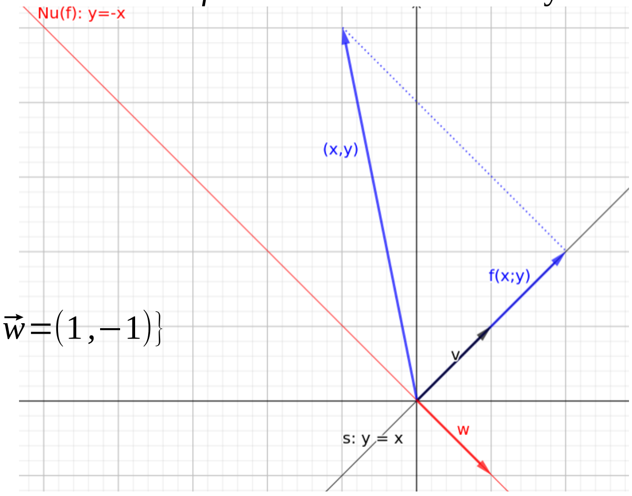
Autovalores:

$$P(\lambda)=\lambda^2-\lambda=\lambda(\lambda-1)\Rightarrow\lambda_1=0(ma=1)\wedge\lambda_2=1(ma=1)$$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 6.1:

Sea la TL $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que le haga corresponder a cada vector $(x;y)$ del plano su proyección ortogonal sobre la recta $y=x$, como indica la figura. Describir geométricamente cuáles son los autovalores y autovectores de f. Hallar los autovalores y autovectores.



Autovectores: $(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$

Para λ₁ = 0:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y=-x$$

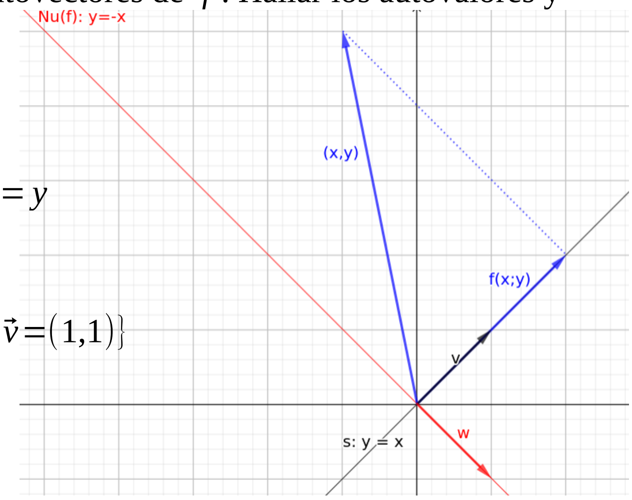
$S_{\lambda=0}=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^2 / (x;y)=(x;-x)\}$ $\quad B_{S_{\lambda=0}}=\{\vec{w}=(1,-1)\}$

$dim(S_{\lambda=0})=1 \ (mg=1)$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 6.1:

Sea la TL $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que le haga corresponder a cada vector $(x;y)$ del plano su proyección ortogonal sobre la recta $y=x$, como indica la figura. Describir geométricamente cuáles son los autovalores y autovectores de f. Hallar los autovalores y autovectores.



Autovectores: $(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$

Para λ₂ = 1:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x=y$$

$S_{\lambda=1}=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^2 \ / \ (x;y)=(x;x)\}$ $\quad B_{S_{\lambda=1}}=\{\vec{v}=(1,1)\}$

$dim(S_{\lambda=1})=1 \ (mg=1)$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 6.4: Sea *f*: $R^3 \to R^3$ una tal que representa la proyección ortogonal de cualquier vector del espacio en un plano π que pasa por el origen.

a) Describir geométricamente: Nu(f) y Im(f).

b) Describir geométricamente cuáles son los autovectores y autovalores de *f*.

c) Hallar la ecuación del plano π si la matriz asociada a f es $A = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 6.4: Sea *f*: $R^3 \to R^3$ una tal que representa la proyección ortogonal de cualquier vector del espacio en un plano π que pasa por el origen.

a) Describir geométricamente: Nu(f) y Im(f).

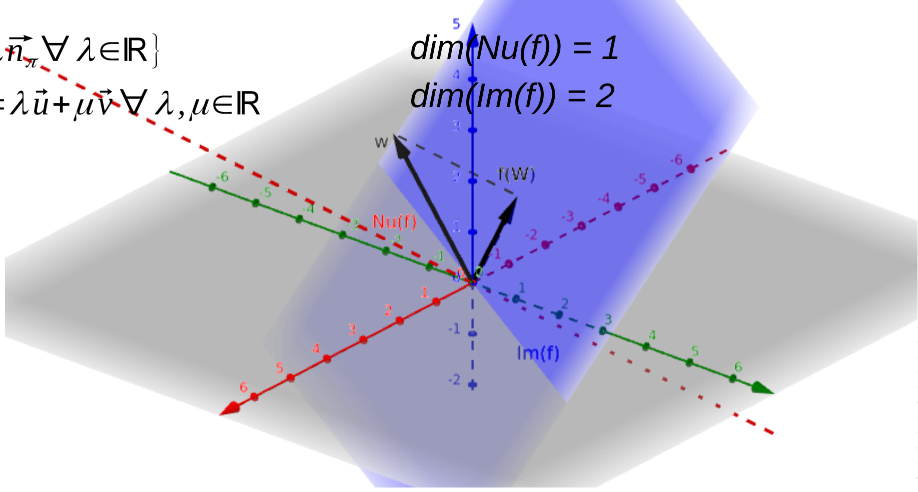
b) Describir geométricamente cuáles son los autovectores y autovalores de *f*.

a) $Nu(f)=\{\vec{x}\in \mathbb{R}^3 / \vec{x}=\lambda \vec{n}_\pi \; \forall \lambda\in \mathbb{R}\}$

$\mathrm{Im}(f)\equiv \pi : \vec{x}\in \mathbb{R}^3 / \vec{x}=\lambda \vec{u}+\mu \vec{v} \; \forall \lambda,\mu\in \mathbb{R}$

dim(Nu(f)) = 1

dim(Im(f)) = 2



Ejercicios de la Guía

Ejercicio 6.4: Sea *f*: $R^3 \rightarrow R^3$ una tal que representa la proyección ortogonal de cualquier vector del espacio en un plano π que pasa por el origen.

a) Describir geométricamente: Nu(f) y Im(f).

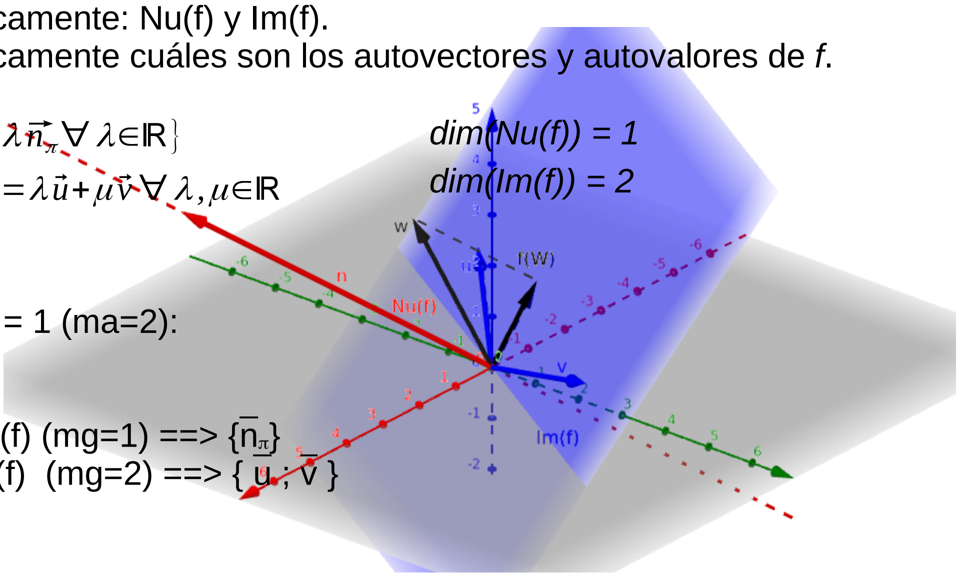
b) Describir geométricamente cuáles son los autovectores y autovalores de *f*.

a) $Nu(f)=\{\vec{x}\in \mathbb{R}^3 / \vec{x}=\lambda \vec{n}_\pi \;\forall\, \lambda\in \mathbb{R}\}$

$\mathrm{Im}(f)\equiv \pi : \vec{x}\in \mathbb{R}^3 / \vec{x}=\lambda \vec{u}+\mu \vec{v} \;\forall\, \lambda ,\mu \in \mathbb{R}$

dim(Nu(f)) = 1

dim(Im(f)) = 2



b) Autovalores:

$\lambda_1 = 0$ (ma=1): y $\lambda_2 = 1$ (ma=2):

Autovectores:

$\lambda_1 = 0$: $S_{\lambda=0} \equiv$ Nu(f) (mg=1) ==> $\{\overline{n}_\pi\}$

$\lambda_2 = 1$: $S_{\lambda=1} \equiv$ Im(f) (mg=2) ==> $\{\, \overline{u} \,;\, \overline{v} \,\}$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 6.4: Sea *f*: $R^3 \rightarrow R^3$ una tal que representa la proyección ortogonal de cualquier vector del espacio en un plano π que pasa por el origen.

c) Hallar la ecuación del plano π si la matriz asociada a f es $A=\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

$$A.\vec{X}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z \\ \frac{-1}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z \\ \frac{-1}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z \end{pmatrix}$$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 6.4: Sea *f*: R³ → R³ una tal que representa la proyección ortogonal de cualquier vector del espacio en un plano π que pasa por el origen.

Buscamos la Im(f):

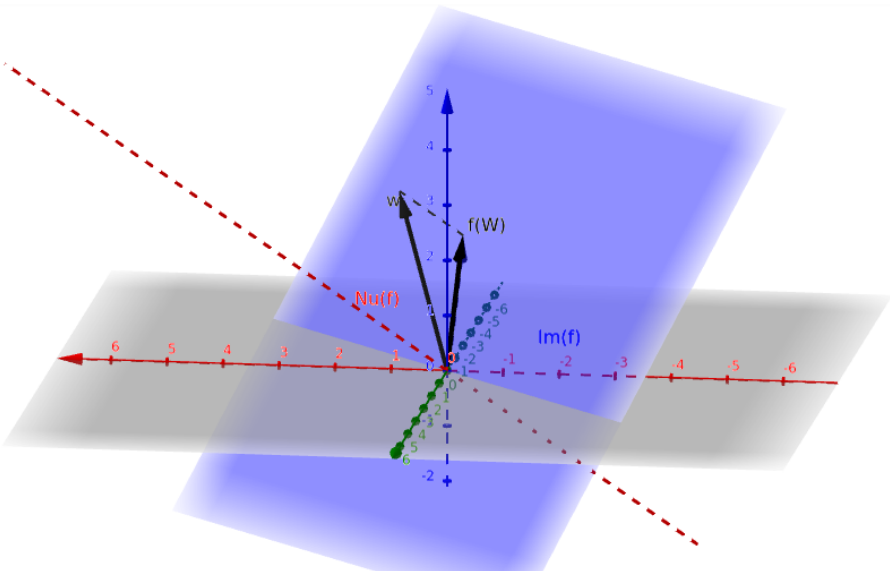
$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & y_1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & y_2 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} & y_3 \end{array}\right) \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & y_1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & y_2 \\ 1 & 1 & -2 & -3y_3 \end{array}\right) \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & y_1+2y_3 \\ 0 & 1 & -1 & y_2-y_3 \\ 1 & 1 & -2 & -3y_3 \end{array}\right)$$

$$\simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & y_1+y_2+y_3 \\ 0 & 1 & -1 & y_2-y_3 \\ 1 & 0 & -1 & y_2-2y_3 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{\pi: x+y+z=0} \longleftarrow \text{Im(f)}$$

$$B_\pi = \{\vec{u}=(-1;1;0);\vec{v}=(-1;0;1)\}$$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 6.4: Sea *f*: R³ → R³ una tal que representa la proyección ortogonal de cualquier vector del espacio en un plano π que pasa por el origen.



Ejercicios de la Guía

Ejercicio 6.4: Sea *f*: $R^3 \to R^3$ una tal que representa la proyección ortogonal de cualquier vector del espacio en un plano π que pasa por el origen.