Enunciado:

1) En $\mathbb{R}^3$ **se define:** $S=\{(x\,;y\,;x)\in\mathbb{R}^3/x+z=0\}$

a) Hallar una base ortonormal para $S: B_{ON}(S)$

b) Hallar una base ortonormal para su complemento ortogonal $S^{\perp}: B_{ON}(S^{\perp})$

c) Escribir al vector $\vec{w}=(2\,;-1\,;1)$ **como:** $\vec{w}=\vec{p}+\vec{q}\ /\ \vec{p}\in S\ \wedge\ \vec{q}\in S^{\perp}$

Resolución:

Abordaje:

Tras hallar las bases ortonormales de S y de su complemento ortogonal, podremos expresar al vector $\overline{w}$ como la suma de dos vectores $\overline{p}$ y $\overline{q}$. A $\overline{p}$ lo calcularemos como la proyección de $\overline{w}$ sobre S y a $\overline{q}$ lo obtendremos como la proyección de $\overline{w}$ sobre el complemento ortogonal de S. Luego puede presentarse a $\overline{w}$ como la suma de $\overline{p}$ y $\overline{q}$.

a) Hallar una base ortonormal para $S: B_{ON}(S)$

Para empezar, tenemos que hallar una base para S. Como es un plano escrito en forma general implícita, esto no es tan directo como si hubiera estado escrito en forma vectorial paramétrica. Por ello, lo convertiremos.

Hallar una base para *S*:

$S: x+z=0 \Rightarrow S: x=-z \wedge y=y$

$S:\{(x:y:z)\in\mathbb{R}^3/(x:y:z)=(-z\,;y\,;z)\}$

$S:\{(x:y:z)\in\mathbb{R}^3/(x:y:z)=(-z\,;0\,;z)+(0\,;y\,;0)\}$

$S:\{(x:y:z)\in\mathbb{R}^3/(x:y:z)=z(-1\,;0\,;1)+y(0\,;1\,;0)\}$

Luego: $B(S)=\{\vec{u_1}=(-1\,;0\,;1),\vec{u_2}=(0\,;1\,;0)\}$

Ortonormalizar la base de *S*:

Se aplica el proceso de Gram–Schmith sobre la base de S:

Sea $B(S)=\{\vec{u_1},\vec{u_2}\}\Rightarrow B_{ON}(S)=\{\vec{v_1},\vec{v_2}\}$

$$\vec{v_1}=\frac{1}{|\vec{u_1}|}\vec{u_1}$$

$$\vec{v_2}=\frac{\vec{u_2}-\langle\vec{u_2};\vec{v_1}\rangle\vec{v_1}}{|\vec{u_2}-\langle\vec{u_2};\vec{v_1}\rangle\vec{v_1}|}$$

Luego $B_{ON}(S)=\{\vec{v_1},\vec{v_2}\}$

Calculo de $\overline{v}_1$:

$$\vec{v_1}=\frac{1}{|\vec{u_1}|}\Rightarrow\vec{v_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1\,;0\,;1)\Rightarrow\vec{v_1}=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\,;0\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

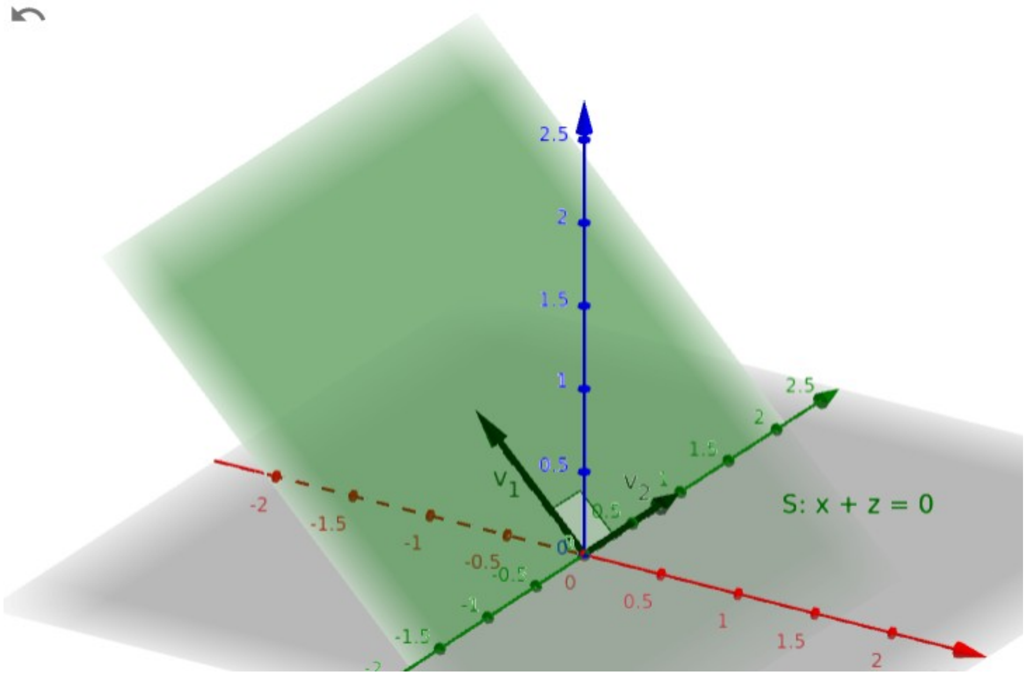
Calculo de $\overline{v}_2$:

$$\vec{v_2}=\frac{\vec{u_2}-\langle\vec{u_2};\vec{v_1}\rangle\vec{v_1}}{|\vec{u_2}-\langle\vec{u_2};\vec{v_1}\rangle\vec{v_1}|}$$

$$\vec{v_2}=\frac{(0\,;1\,;0)-\left\langle(0\,;1\,;0);\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\,;0\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\rangle\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\,;0\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left|(0\,;1\,;0)-\left\langle(0\,;1\,;0);\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\,;0\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\rangle\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\,;0\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|}=(0\,;1\,;0)$$

Notar que como $\overline{u}_1$ y $\overline{u}_2$ son ortogonales, $\overline{v}_2$ lo podemos obtener solo normalizando $\overline{u}_2$.

Luego: $\boxed{B_{ON}(S)=\left\{\vec{v_1}=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\vec{v_2}=(0;1;0)\right\}}$



b) Hallar una base ortonormal para su complemento ortogonal $S^{\perp}:B_{ON}(S^{\perp})$

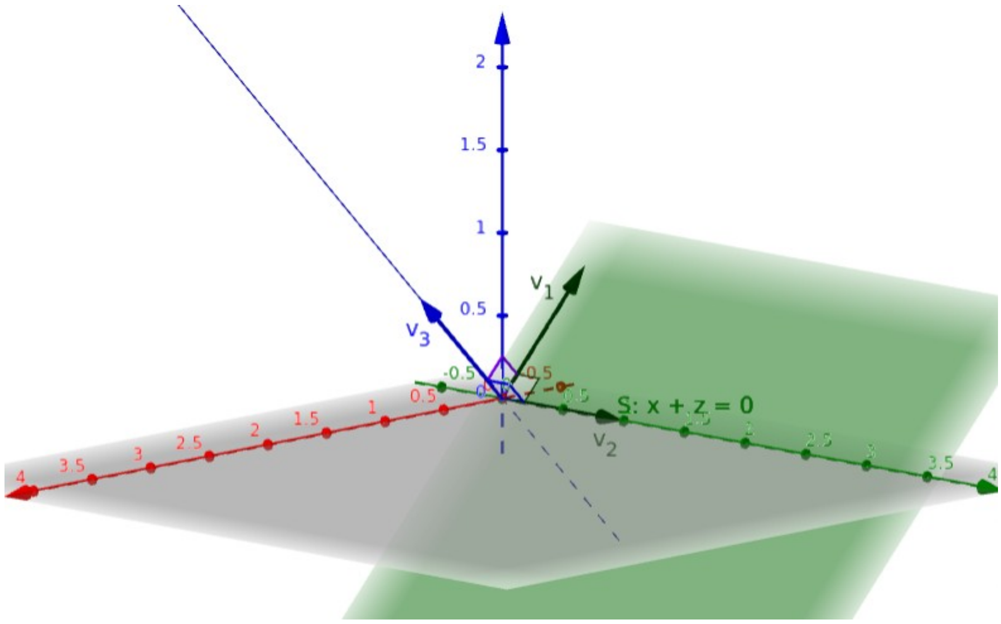
Este ejercicio es muy sencillo (y en general en $\mathbb{R}^3$ el abordaje es similar): Dado que S es un plano, su complemento ortogonal es una recta que pasa por el origen y que es perpendicular al plano. Como tenemos la ecuación general del plano, los coeficientes que acompañan a x, y y z nos dan las coordenadas del vector normal al plano, lo que hallar la base ortonormal del complemento ortogonal consiste simplemente en la normalización del vector normal.

El vector normal a *S*:

$\vec{n}=(1;0;1)$

$S^{\perp}=\{(x,y;z)\in\mathbb{R}^3/(x,y;z)=\lambda(1;0;1)\forall\lambda\in\mathbb{R}\}$

$\boxed{B_{ON}(S^{\perp})=\left\{v_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}}$



Observación: **El conjunto** $B=\{\vec{v_1};\vec{v_2};\vec{v_3}\}$ **es una base ortonormal de** $\mathbb{R}^3$

c) Escribir al vector $\vec{w}=(2;-1;1)$ **como:** $\vec{w}=\vec{p}+\vec{q}\ /\ \vec{p}\in S\ \wedge\ \vec{q}\in S^{\perp}$
Sea $\overline{p}$ el vector proyección ortogonal del vector $\overline{w}$ sobre el subespacio *S*.
Sea $\overline{q}$ el vector proyección ortogonal del vector $\overline{w}$ sobre el subespacio complemento ortogonal de *S*.

Cálculo de $\overline{p}$:

$$\vec{p}=\langle\vec{w};\vec{v_1}\rangle\vec{v_1}+\langle\vec{w};\vec{v_2}\rangle\vec{v_2}$$

$$\vec{p}=\left\langle(2;-1;1);\left(\frac{-1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\rangle\left(\frac{-1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\langle(2;-1;1);(0;1;0)\rangle(0;1;0)$$

$$\vec{p}=\frac{-1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+(-1)(0;1;0)$$

$$\vec{p}=\left(\frac{1}{2};-1;-\frac{1}{2}\right)$$

Cálculo de $\overline{q}$:

$$\vec{q}=\langle\vec{w};\vec{v_3}\rangle\vec{v_3}$$

$$\vec{q}=\left\langle(2;-1;1);\left(\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\rangle\left(\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\vec{q}=\frac{3}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\vec{q}=\left(\frac{3}{2};0;\frac{3}{2}\right)$$

Luego:

$$\vec{w}=\vec{p}+\vec{q}$$

$$\vec{w}=\left(\frac{1}{2};-1;-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{2};0;\frac{3}{2}\right)$$

$$\vec{w}=(2;-1;1)$$

Otra forma más sencilla para resolver c):

- Calculamos $\overline{q}$ que es más sencillo (como ya se hizo, no se repite el procedimiento)
- Luego: $\overline{p} = \overline{w} - \overline{q}$

Cálculo de $\overline{p}$:

$$\vec{p}=\vec{w}-\vec{q}$$

$$\vec{p}=(2;-1;1)-\left(\frac{1}{2};-1;-\frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{p}=\left(\frac{3}{2};0;\frac{3}{2}\right)$$