UNIDAD 7

INTEGRAL INDEFINIDA

Decidimos encontrar una función F cuya derivada es $f(x) = 3x^2$

$F(x) = x^3$ porque $F'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d[x^3]}{dx} = 3x^2 = f(x)$

La función F es una antiderivada o primitiva de f

Por lo que sabemos de derivadas , es posible afirmar que :

DEFINICIÓN DE UNA ANTIDERIVADA O PRIMITIVA

Se dice que una función F es una antiderivada o primitiva de f, en un intervalo I si y solo si F'(x) = f(x) para todo x en I.

Simbólicamente

F es una primitiva de f en I $\Leftrightarrow \forall x \in I: F'(x) = f(x)$

F es ***una*** primitiva de f, ¿ por qué no decimos que es ***la*** primitiva de f ?

Sea f: x$\rightarrow 4x^3$ Df $=\mathcal{R}$

F : x $\rightarrow x^4$ Es una primitiva de f , pues $\forall x \in \mathcal{R} : F'(x) = 4x^3$

También

$$\left.\begin{aligned} F_1 &: x \to x^4 + 3 \\ F_2 &: x \to x^4 - \sqrt{2} \end{aligned}\right\}$$ Son otras primitivas de f pues $\forall x \in \mathcal{R} : F'(x) = 4x^3$

En general, $F : x \to x^4 + c$ Es una primitiva de f para cualquier número real c

PROPIEDAD

Si F es una primitiva o antiderivada de f en un intervalo I, entonces G es una antiderivada o primitiva de f en el intervalo I si y sólo si G es de la forma G(x) = F(x) +C, para todo x en I, donde C es un constante.

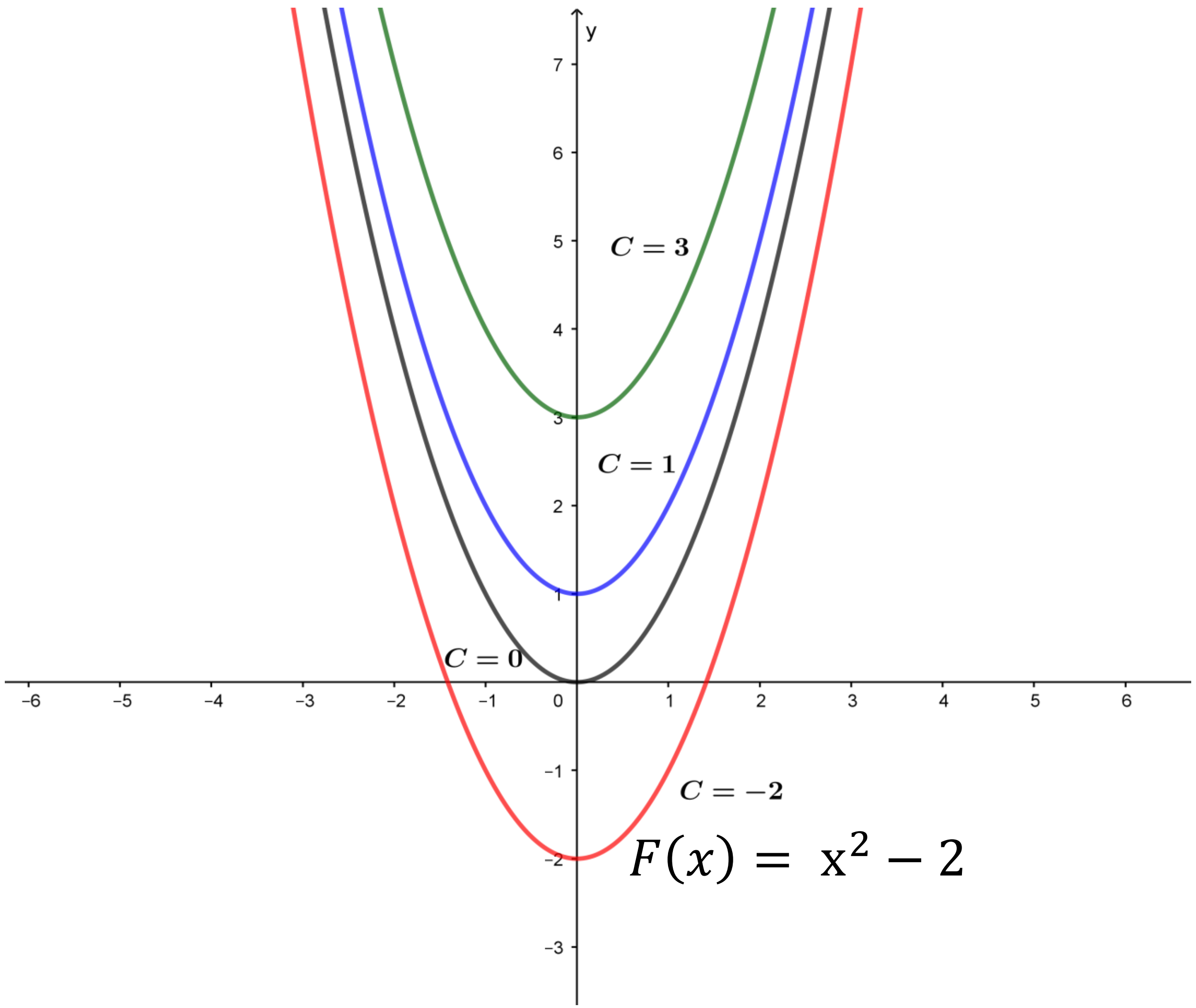
$$G(x) = x^2 + 4$$

$$F(x) = x^2 - 2$$

$$G(x) - F(x) = x^2 + 4 - x^2 + 2$$

$$G(x) - F(x) = 6$$

$$G(x) = F(x) + 6$$



Demostración

Si $G(x) = F(x) + C$

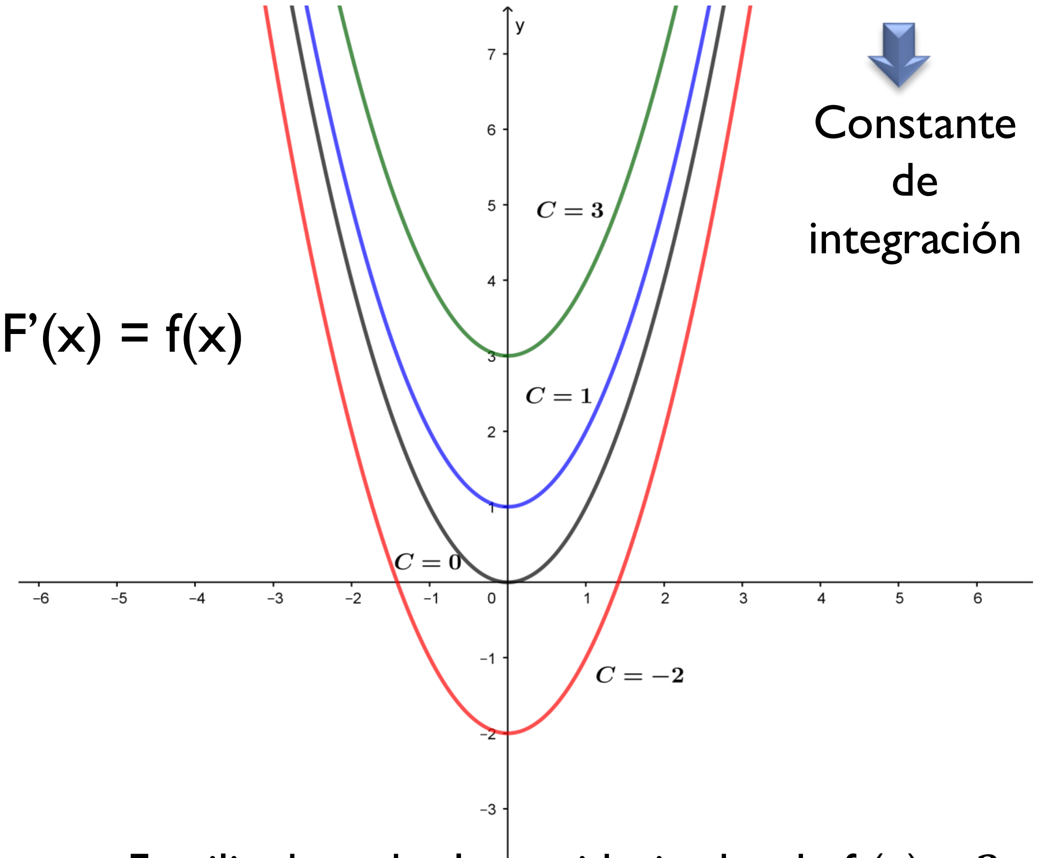
$G'(x) = F'(x) + 0 = F'(x)$

F es una primitiva de f entonces $F'(x) = f(x)$

$G'(x) = F'(x) = f(x)$

$\therefore$ G(x) es una primitiva de f

Funciones de la forma $F(x) = x^2 + C$

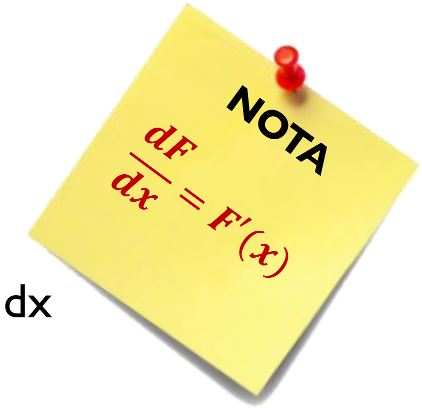


Constante de integración

Familia de todas las antiderivadas de $f(x) = 2x$

Notación para antiderivadas o primitivas

La operación para determinar el conjunto de las **infinitas primitivas** que puede tener una función se denomina **antiderivación o integración indefinida.**



Símbolo $\int$ denota la operación y se escribe:

$\boxed{\int f(x)\,dx} = F(x) + c$ tal que F ’(x) = $f(x)$ o d(F(x)) = f(x) dx

Se lee “ *primitiva* de f o antiderivada de f
de f con respecto a x “

INTEGRAL INDEFINIDA DE f

$\int f\,(x)$ dx	Integral indefinida de la función f
$\int$	Símbolo para la integración
f	Integrando
C	Constante de integración
dx	Identifica a x como variable de integración

Propiedades de la Integral Indefinida

a) $\int k.f(x)dx = k\int f(x)dx$

b) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

c) $\frac{d}{dx}\boxed{\left[\int f(x)dx\right]} = \frac{d\boxed{[F(x)+c]}}{dx} = F'(x) = f(x)$

Reglas básicas de integración – Integrales inmediatas

Como la integración es la operación inversa de la derivación, se pueden obtener las siguientes antiderivadas directamente.

TABLA DE INTEGRALES-INTEGRALES INMEDIATAS	
$\int dx = x + C \quad pues \;\; d(x + C) = dx$	
$\int k\ dx = kx + C \;\; pues \;\; d(kx + C) = k\ dx$	$\int 4\,\mathrm{dx} = 4x + C$
$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \;\; pues \;\; d\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) = \cancel{(n+1)}\dfrac{x^{n+\cancel{1}-\cancel{1}}}{\cancel{n+1}} dx$ $\boldsymbol{n \neq -1}$	$\int x^3\ dx = \dfrac{x^{3+1}}{3+1} = \dfrac{x^4}{4} + C$
$\int sen\ x\ dx = -\cos x + C \;\; \text{pues}\ d(-cosx + C) = -(-sen\ x) = sen\ x$	

TABLA DE INTEGRALES-INTEGRALES INMEDIATAS

$\int \frac{1}{x} dx = ln\lvert x\rvert + c \quad pues \quad d(\ln x + c) = \frac{1}{x}\, dx$
$\int \cos x\, dx = sen\ x + C \quad pues \quad d(sen\ x + C) = \cos x\, dx$
$\int sec^2\, x\, dx = \operatorname{tg} x + C \quad pues \quad d\left(\frac{sen\ x}{\cos x} + C\right) = sec^2 x\, dx$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arc\ \operatorname{tg} x + C \quad \text{pues}\ d(\operatorname{arctg} x + C) = \frac{1}{1+x^2} dx$
$\int e^x dx = e^x + C \quad pues \quad d(e^x + C) = e^x\, dx$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arc\ sen\ x + C\ pues \quad d(arc\ sen\ x + C) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{dx}$

EJEMPLOS

$$a)\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \boxed{\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C}$$

$$b)\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} = \frac{x^{-2}}{-2} = \boxed{-\frac{1}{2x^2} + C}$$

$$c)\int \frac{x^2-1}{x-1}dx = \int \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}dx = \int (x+1)dx =$$

$$\int x\,dx + \int dx = \boxed{\frac{x^2}{2} + x + C}$$

Para tener en cuenta

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\int dx = x + C$
$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Integral original → Reescribir → Integrar → Integral Indefinida con su expresión más simple

$$d)\ \int \frac{2x+\sqrt{x}}{x^3}\,dx = \int\left(\frac{2x}{x^3}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^3}\right)dx = \int \frac{2}{x^2}\,dx + \int x^{-\frac{5}{2}}\,dx =$$

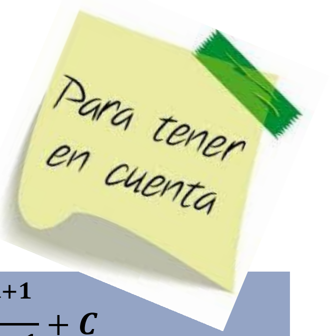
$$2\int x^{-2}\,dx + \int x^{-\frac{5}{2}}\,dx = 2\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + \frac{x^{\frac{-5}{2}+1}}{\frac{-5}{2}+1} = \boxed{-\frac{2}{x}-\frac{2}{3}x^{\frac{-3}{2}}+C}$$

$$e)\ \underline{\int \frac{2x^3+2x+1}{x^2+1}\,dx} \quad \int\left(2x+\frac{1}{x^2+1}\right)dx =$$

$$=$$

$$2\int x\,dx + \int \frac{1}{1+x^2}\,dx \quad 2\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1} + arc\,\mathrm{tg}\,x$$

$$= 2\cdot\frac{x^2}{2} + arc\,\mathrm{tg}\,x = \boxed{x^2 + arc\,\mathrm{tg}\,x + C}$$



$\int \boldsymbol{x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$
$\int \boldsymbol{dx = x + C}$
$\int \boldsymbol{[f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx}$
$\int \boldsymbol{k.f(x)dx = k\int f(x)dx}$

$$f)\ \int tg^2\,x\,dx = \int \frac{sen^2 x}{cos^2 x}\,dx = \int \frac{1 - cos^2 x}{cos^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{cos^2 x} - \frac{cos^2 x}{cos^2 x}\right) dx =$$

$$\int sec^2 x\,dx + \int dx = \boxed{\operatorname{tg} x + x + C}$$

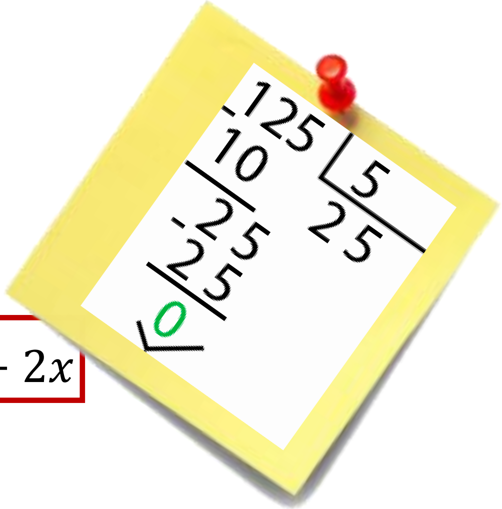
$$\int sec^2\,x\,dx = \operatorname{tg} x + C$$

Cálculos Auxiliares

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 2x^3 + 2x + 1 & x^2 + 1 \\
\cline{3-3}
- & \boxed{2x^3 + 2x} & \boxed{2x} \\
\cline{1-2}
 & 1 &
\end{array}
$$

$$2x^3 \div x^2 = \boxed{2x}$$

$$\boxed{2x} \cdot (x^2 + 1) = \boxed{2x^3 + 2x}$$



$$\frac{P(x)}{Q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$$

$$\frac{2x^3 + 2x + 1}{x^2 + 1} = 2x + \frac{1}{x^2 + 1}$$

$Si\ gr\ P(x) \geq gr\ Q(x)$ **SIEMPRE REALIZAMOS LA DIVISION**

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

❖ MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

a) $\underbrace{\int 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx}_{\text{Integral no inmediata}}$

Integral no inmediata → **Transformamos en** → Integral inmediata → **¿cómo?** → Mediante una sustitución de variable

El integrando corresponde al patrón $f(g(x))g'(x)$

g'(x) ← $3x^2\sqrt{x^3+1}$ → g(x)

f(x) = $\sqrt{x}$

Sustituimos g(x) por la variable t

t$= x^3 + 1$ ⇒ $dt = 3x^2 dx$ ⇒ $\dfrac{dt}{3x^2} = dx$

$$\int \boldsymbol{x^n dx} = \frac{\boldsymbol{x^{n+1}}}{\boldsymbol{n+1}} + \boldsymbol{C}$$

Sustituimos en la integral dada

a) $\int 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$

$$\int \cancel{3x^2}\sqrt{t}\,\frac{dt}{\cancel{3x^2}} = \int \sqrt{t}\,dt = \int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C = \boxed{\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C}$$

Integral inmediata
según la variable t

b) $\int 5\cdot\cos(5x)\,dx = \int \cancel{5}\cos t\,\frac{dt}{\cancel{5}} = \int \cos t\,dt = -sen\ t + C = -sen\ (5x) + C$

Reconocemos el patrón $f(g(x))g'(x)$

g'(x) $5\cdot\cos(5x)$

g(x)

$f(x) = \cos x$

$$\int \cos x\,dx = sen\ x + C$$

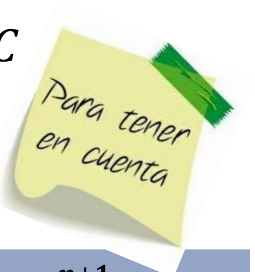
Sustituimos g(x) por la variable t

$t = 5x \quad dt = 5dx \quad \frac{dt}{5} = dx$

c) $\int x\cdot(x^2+1)^2dx = \int \cancel{x}\cdot t^2\frac{dt}{2\cancel{x}} = \int\frac{t^2}{2}dt = \frac{1}{2}\int t^2\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{2+1}}{2+1} = \frac{1}{6}t^3 + C$

$= \frac{1}{6}(x^2+1)^3 + C$

$t = x^2+1 \Rightarrow dt = 2x\,dx \Rightarrow \frac{dt}{2x} = dx$



$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

d) $\int\sqrt{(2x-1)}$ $= \int\sqrt{t}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = 3t^{\frac{3}{2}} + C$

$= 3\sqrt{t^3} + C = \boxed{3\sqrt{(2x-1)^3} + C}$

$t = 2x-1 \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow \frac{dt}{2} = dx$

ESTRATEGIA PARA REALIZAR UN CAMBIO DE VARIABLE

- Elegir una sustitución $t = g(x)$. Usualmente, es mejor utilizar la parte interna de una función compuesta.
- Calcular $dt = g'(x)\, dx$
- Reescribir la integral en términos de la variable t
- Encontrar la integral resultante en términos de t
- Reemplazar t por $g(x)$para obtener una primitiva en términos de x
- Verificar la respuesta por derivación

d)

$$\int sen^2(3x)\cdot\cos(3x)\,dx = \int t^2\cdot \cancel{\cos(3x)}\frac{dt}{3.\cancel{\cos(3x)}} = \frac{1}{3}\int t^2\,dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{2+1}}{2+1}+C$$

$$= \frac{1}{9}t^3 + C = \boxed{\frac{1}{9}sen^3(3x)+C}$$

$$t = sen\,(3x) \Rightarrow dt = \cos(3x).3\,dx \Rightarrow \frac{dt}{3.\cos(3x)} = dx$$

e)

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx = \int\left(\frac{t^2}{2}+1\right)\frac{1}{\cancel{t}}\cdot\cancel{t}\cdot dt = \frac{1}{2}\int t^2\,dt + \int dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{2+1}}{2+1}+t+C = \frac{1}{6}t^3+t+C$$

$$= \boxed{\frac{1}{6}\left(\sqrt{2x-1}\right)^3+\sqrt{2x-1}+C}$$

Consideramos t $=\sqrt{2x-1} \Rightarrow t^2 = 2x-1 \Rightarrow \frac{t^2}{2}+1 = x \Rightarrow \frac{2t}{2}dt = t\,dt = dx$