U6 – 2º Parte : Polinomios de aproximación: Notación de sumatoria- Propiedades - Fórmula del Resto

Polinomios de aproximación: Notación de sumatoria

Recordemos las expresiones de los polinomios definidos hasta aquí:

Polinomio de Taylor, en potencias de (x-c) para una función y=f(x) continua y derivable:

$$\boldsymbol{P(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots\cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n}$$

Reduciendo la notación con la simbología de sumatoria, podemos expresarlo así:

$$\boldsymbol{P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(c)}{i!}\ (x-c)^i}$$

Polinomio de Mac Laurin, en potencias de x para una función y=f(x) continua y derivable:

$$\boldsymbol{P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots\cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}$$

En simbología de sumatoria:

$$\boldsymbol{P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}\ (x)^i}$$

Polinomios de aproximación: Propiedades

Muchas veces el cálculo de derivadas de una función puede resultar un tanto tedioso. Las propiedades que enunciaremos a continuación nos permiten obtener Polinomios de Taylor de ciertas funciones a partir de otros polinomios de Taylor.

Sean las constantes p,q $\in \Re$ y las funciones f y g derivables hasta el orden n en x=c:

1) Linealidad: P(p.f + q.g)=p.P(f) + q. P(g)

   Ejemplo: P[Sh x] = P[$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$] = ½ P[e^x] – ½ P[e^{-x}]

2) Derivación (e Integración) : P [f ’(x)] = [P[f(x)]’
   Ejemplo: P[cos(x)] = P[sen(x)]’

3) Sustitución: Si g(x)= f(p.x) → P[g(x)] = p. P[f(x)]

   Ejemplos: P[2.Ln(x)] = 2. P[Ln(x)]

   P[x.cos(x)] = x. P[cos(x)]

Resto O Término Complementario (Error De Aproximación)

Recordemos también que ambos polinomios nos entregan una buena aproximación de la función f, en un entorno al centro c, y que obviamente existe un error en dicha aproximación respecto del valor exacto de la función.

Hemos estimado el error en algún ejercicio teniendo en cuenta que

Error cometido = Valor de la función en x – Valor del polinomio en x

Es decir:

$$\boldsymbol{R(x) = f(x) - P(x)}$$

O bien

$$f(x) = P(x) + R(x)$$

El R(x) resto o T(x) término complementario depende de la proximidad entre x y c, y además, de la cantidad de términos que se desarrollen del polinomio.

El matemático Lagrange demostró que, el **término complementario** que representa el error cometido en la aproximación, se puede calcular mediante la fórmula:

$$\boxed{\boldsymbol{T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}} \quad con \quad c < \varepsilon < x \quad \text{para Taylor}}$$

(x es el valor cercano a c donde se calcula la aproximación mediante el polinomio P)

$$\boxed{\boldsymbol{T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x)^{n+1}} \quad con \quad 0 < \varepsilon < x \quad \text{para Mac Laurin}}$$

Finalmente podemos escribir la **Fórmula de Taylor** que resulta de sumar el Polinomio de Taylor con el término complementario:

$$\underbrace{\boldsymbol{f(x)}}_{\boldsymbol{La\ función}} = \underbrace{\boldsymbol{f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots\cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n}}_{\boldsymbol{Polinomio\ de\ Taylor}} + \underbrace{\boldsymbol{\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}}}_{\boldsymbol{Término\ Complementario}}$$

O bien la **Fórmula de Mac Laurin**:

$$\underbrace{\boldsymbol{f(x)}}_{\boldsymbol{La\ función}} = \underbrace{\boldsymbol{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots\cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}}_{\boldsymbol{Polinomio\ de\ Mac\ Laurin}} + \underbrace{\boldsymbol{\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x)^{n+1}}}_{\boldsymbol{Término\ Complementario}}$$

Presentadas ambas fórmulas, veremos algunos ejemplos de cómo se usan.

Ejemplo 1: Utilizar el polinomio de Mac Laurin hasta el término de grado 5 para aproximar el cos(0,1). Acotar el término complementario.

$f(x) = cosx$	$f(0) = cos0 = 1$
$f'(x) = -senx$	$f'(0) = -sen0 = 0$
$f''(x) = -cosx$	$f''(0) = -cos0 = -1$
$f'''(x) = senx$	$f'''(0) = sen0 = 0$
$f^{(iv)}(x) = cosx$	$f^{(iv)}(0) = cos0 = 1$
$f^{(v)}(x) = -senx$	$f^{(v)}(0) = -sen0 = 0$
$f^{(vi)}(x) = -cosx$	$f^{(vi)}(\varepsilon) = -cos\varepsilon$

Armamos el polinomio de Mac Laurin:

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(iv)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(v)}(0)}{5!}x^5$$

$$P(x) = 1 + 0x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5$$

$$\boldsymbol{P(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4}$$

Y la Fórmula de Mac Laurin para f(x) será:

$$\boldsymbol{cosx = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{f^{(6)}(\varepsilon)}{6!}x^6 \quad con \quad 0 < \varepsilon < x}$$

$$\boldsymbol{cosx = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{(-cos\varepsilon)}{720}x^6 \quad con \quad 0 < \varepsilon < x}$$

Entonces, el polinomio en x=0,1 será:

$$\boldsymbol{P(0,1) = 1 - \frac{1}{2}(0,1)^2 + \frac{1}{24}(0,1)^4 = 0,995004166} \ldots.$$

Y el error cometido se acota mediante el término complementario, que según la fórmula vista quedará armado así:

$$\boldsymbol{T_6(x) = \frac{(-cos\varepsilon)}{720}x^6 \quad con \quad 0 < \varepsilon < x}$$

$$\boldsymbol{T_6(0,1) = \frac{(-cos\varepsilon)}{720}0,1^6 \quad con \quad 0 < \varepsilon < 0,1}$$

¿Cómo acotamos el error?

- **Opción 1**: Reemplazando en su fórmula por la cota mayor de f. En este caso es sencillo saber que la cota mayor del cos(x) es 1, debido a la imagen de su gráfica. Por lo que la cota del término complementario será:

  $$\boldsymbol{|T_6(0,1)| = \frac{|-cos\varepsilon|}{720}0,1^6 \le \frac{1}{720}.0,1^6 = 1,39.10^{-9}}$$

  Reemplazamos el valor del coseno por el mayor valor que puede tomar la función en valor absoluto, esto nos asegura que sea el mayor valor que puede dar el error. En este caso tendremos 8 cifras decimales exactas.

- **Opción 2**:Otra forma de analizarlo sería, reemplazar en 0 y en 0,1 y ver como varía el error

  Si $\varepsilon = 0 \;\rightarrow\;$ $\boldsymbol{|T_6(0,1)| = \frac{|-cos0|}{720}0,1^6 \le \frac{1}{720}.0,1^6 = 1,39.10^{-9}}$

  Si $\varepsilon = 0{,}1 \;\rightarrow\;$ $\boldsymbol{|T_6(0,1)| = \frac{|-cos0,1|}{720}0,1^6 \le 1,382.10^{-9}}$

  Luego, el error cometido estará acotado entre:

  $$\boldsymbol{1,382.10^{-9} < \underbrace{T6 < 1,39.10^{-9}}}$$

  Justamente obtenemos la misma cota superior que en el procedimiento anterior.

- **Opción** 3: Otra forma, menos fácil pero igualmente válida, es partir de la desigualdad que condiciona al ε para construir de a poco mediante operaciones algebraicas al término complementario:

$$0 < \varepsilon < 0{,}1$$

$$-\cos(0) > -cos\varepsilon > -\cos(0{,}1)$$

$$-1 > -\cos(\varepsilon) > -\cos(0{,}1)$$

$$-\frac{1}{6!} > \frac{-\cos(\varepsilon)}{6!} > \frac{-\cos(0{,}1)}{6!}$$

$$\frac{-1}{720} > \frac{-\cos(\varepsilon)}{720} > \frac{-\cos(0{,}1)}{720}$$

$$\frac{-1}{720}(0{,}1)^6 > \frac{-\cos(\varepsilon)}{720}(0{,}1)^6 > \frac{-\cos(0{,}1)}{720}(0{,}1)^6$$

$$|1{,}39.10^{-9}| > |Tn| > |1{,}382.10^{-9}|$$

$$\boldsymbol{|1,382.10^{-9}| < \underbrace{|Tn| < |1,39.10^{-9}|}_{cota\ superior}}$$

De las tres opciones vistas, en general usaremos la segunda, ya que es la más sencilla.

Otro caso que debe tenerse en cuenta: ¿Cómo resolvemos la situación cuando nos piden que hallemos un polinomio de aproximación con determinado margen de error, pero no nos dan el grado del polinomio, sino que debemos calcularlo para el error pedido?

Ejemplo: **Calcular el valor de $\sqrt{10}$ con un error menor que 1.10^{-4}**.

Sea la función $f(x) = \sqrt{x}$, desarrollaremos el polinomio de Taylor en c=9

Derivamos sucesivamente hasta un cierto orden (acá lo haremos hasta n=5, decidimos nosotros)

$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$	$f(9) = 3$
$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$	$f'(9) = \frac{1}{2}9^{-1/2} = 1/6$
$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$	$f''(9) = -\frac{1}{4}9^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{108}$
$f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}$	$f'''(9) = \frac{3}{8}9^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{648}$
$f'^{v}(x) = -\frac{15}{16}x^{-7/2}$	$f'^{v}(9) = -\frac{15}{16}9^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{34992}$
$f^{v}(x) = \frac{105}{32}x^{-9/2}$	$f^{v}(9) = \frac{105}{32}9^{-9/2} = \frac{105}{629856}$

El desarrollo de Taylor será:

$$P(x) = f(9) + \frac{f'(9)}{1!}(x-9) + \frac{f''(9)}{2!}(x-9)^2 + \frac{f'''(9)}{3!}(x-9)^3 + \frac{f'^{v}(9)}{4!}(x-9)^4 + \frac{f^{v}(9)}{5!}(x-9)^5$$

$$P(x) = 3 + \frac{1}{6}(x-9) - \frac{1}{216}(x-9)^2 + \frac{1}{3888}(x-9)^3 - \frac{1}{93312}(x-9)^4 + \frac{7}{629856}(x-9)^5$$

Si n=1 → $f(10) = \sqrt{10} \cong 3 + \frac{1}{6}(10-9) = 3 + \frac{1}{6} = 3{,}1\hat{6}$

Si n=2 → $f(10) = \sqrt{10} \cong P(10) = 3 + \frac{1}{6}(10-9) - \frac{1}{216}(10-9)^2 = 3{,}162037$

Si n=3 → $f(10) = \sqrt{10} \cong P(10) = 3 + \frac{1}{6}(10-9) - \frac{1}{216}(10-9)^2 + \frac{1}{3888}(10-9)^3 = 3{,}1622294\ldots$

Si n=4 → $f(10) = \sqrt{10} \cong P(10) = 3 + \frac{1}{6}(10-9) - \frac{1}{216}(10-9)^2 + \frac{1}{3888}(10-9)^3 - \frac{1}{93312}(10-9)^4 = 3{,}16228352\ldots$

No necesito desarrollar el polinomio a un grado mayor, porque ya logré el nivel de error pedido.

De lo contrario, debería repetir las cuentas con un polinomio de grado n=5, 6, ….etc.

Aplicaciones del Polinomio de Taylor

- Cálculo de límites:

Si f(x) es infinitésima para x=a, y además $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\beta.(x-a)^\alpha} = 1$ entonces f(x) y $\beta.(x-a)^\alpha$ son infinitésimos de igual orden y equivalentes en x=a.

Aplicaremos este concepto para resolver algunos límites:

Ejemplo 1:

Resolver $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{senx - x}$

Este límite es indeterminado 0/0. Con lo cual debemos buscar la manera de resolver dicha indeterminación. Utilizaremos el polinomio de Mac Laurin de las funciones trascendentes tanto de numerador como del denominador, puesto que la variable x tiende a 0.

La pregunta será, desarrollo de Mac Laurin ¿hasta qué grado?

Sabiendo que los desarrollos son:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + T_3(x)$$

$$sen\,x = x - \frac{1}{6}x^3 + T_3(x)$$

Dado que la parte polinómica del numerador y denominador del límite tiene como mayor grado x^2 , tomaremos los desarrollos hasta el grado 3, quedando:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\boldsymbol{e^x} - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{\boldsymbol{senx} - x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left[\boldsymbol{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + T_3(x)}\right] - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{\left[\boldsymbol{x - \frac{1}{6}x^3 + T_3(x)}\right] - x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\boldsymbol{\cancel{1} + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + T_3(x) - \cancel{1} - x} - \frac{x^2}{2}}{\boldsymbol{\cancel{x} - \frac{1}{6}x^3 + T_3(x)} - \cancel{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{+\frac{1}{6}x^3 + T_3(x)}{-\frac{1}{6}x^3 + T_3(x)} = \frac{0}{0}\ indet$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{+\frac{1}{6}x^3}{\boldsymbol{x^3}}+\dfrac{T_3(x)}{\boldsymbol{x^3}}}{\dfrac{-\frac{1}{6}x^3}{\boldsymbol{x^3}}+\dfrac{T_3(x)}{\boldsymbol{x^3}}}=\lim_{x\to 0}\frac{+\frac{1}{6}+\overbrace{\left(\dfrac{T_3(x)}{x^3}\right)}^{\to 0}}{-\frac{1}{6}+\underbrace{\left(\dfrac{T_3(x)}{x^3}\right)}_{\to 0}}=-\mathbf{1}$$

De esta manera hemos salvado la indeterminación del ejercicio.

Ejemplo 2: Resolver: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-senx}{x(1-cos3x)}$

Armamos los polinomios de las funciones sen(x) y cos(3x):

$$f(x)=senx \qquad f(0)=0 \qquad senx=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\mu_5(x)$$

$$f'(x)=cosx \qquad f'(0)=1 \qquad cosx=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\mu_5(x)$$

$$f''(x)=-senx \qquad f''(0)=0 \qquad \cos(3x)=1-\frac{1}{2!}(3x)^2+\frac{1}{4!}(3x)^4-\mu_5(3x)$$

$$f'''(x)=-cosx \qquad f'''(0)=-1 \qquad \cos(3x)=1-\frac{9}{2!}x^2+\frac{3^4}{4!}x^4-3\mu_5(x)$$

Luego, reemplazando en el límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-senx}{x(1-cos3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\mu_5(x)\right)}{x\left(1-\left(1-\frac{9}{2!}x^2+\frac{3^4}{4!}x^4-3\mu_5(x)\right)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{3!}x^3-\frac{1}{5!}x^5+\mu_5(x)\right)}{x\left(\frac{9}{2!}x^2-\frac{3^4}{4!}x^4+3\mu_5(x)\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}x^2+\frac{\mu_5(x)}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{9}{2!}-\frac{3^4}{4!}x^2+3\frac{\mu_5(x)}{x^2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}x^2+\frac{\mu_5(x)}{x^3}\right)}{\left(\frac{9}{2!}-\frac{3^4}{4!}x^2+3\frac{\mu_5(x)}{x^2}\right)}=\frac{2!}{3!\,9}=\boxed{\frac{1}{27}}$$

- Generalización para el Cálculo de extremos:

Dado el desarrollo de Taylor para la función y=f(x):

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\mu_2(x-x_0)$$

Entonces:

$a)\ Si\ f''(x_0)>0\ y\ f'(x_0)=0 \qquad x_0\ es\ un\ mínimo$

$b)\ Si\ f''(x_0)<0\ y\ f'(x_0)=0 \qquad x_0\ es\ un\ máximo$

$c)\ Si\ \ f'(x_0)=0\ f''(x_0)=0\ \ldots\ldots\ldots\ y\ f^{(n)}(x_0)\neq 0$

$$n\ es\ la\ primer\ derivada\ que\ no\ se\ anula\ en\ x_0\begin{cases} n\ es\ impar\ \nexists\ extremo \\ n\ es\ par\ es\ extremo \begin{cases} f^{(n)}(x_0)>0 & x_0\ es\ un\ mínimo \\ f^{(n)}(x_0)<0 & x_0\ es\ un\ máximo \end{cases}\end{cases}$$

Ejemplo:

Demuestre que la función $f(x) = e^x - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$ tiene un mínimo en x=0.

Realizamos las n derivadas de la función en x=0:

$$f'(x) = e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2\Big]_{x\,=\,0} = 0$$

$$f''(x) = e^x - 1 - x\big]_{x\,=\,0} = 0$$

$$f'''(x) = e^x - 1\big]_{x\,=\,0} = 0$$

$$f'^{v}(x) = e^x\big]_{x\,=\,0} = 1 > 0$$

Como la derivada que no se anula es de orden par → x=0 es extremo, y como es mayor que cero entonces x=0 es mínimo de f(x).