Unidad 6: Polinomios de Taylor y Mac Laurin

Fórmulas de Aproximación de Funciones

ORDEN DE CONTACTO ENTRE DOS CURVAS

Dadas dos funciones reales f y g, diremos que tienen orden de contacto “n” en x=a si :

$$\begin{gathered} f(a) = g(a) \\ f'(a) = g'(a) \\ f''(a) = g''(a) \\ f'''(a) = g'''(a) \\ \ldots\ldots \\ f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a) \\ f^{(n+1)}(a) \neq g^{(n+1)}(a) \end{gathered}$$

Graficamente el orden de contacto nos indicará cuál parecidas son las curvas de f y g en cercanías al punto x=a, a mayor orden de contacto mayor similitud. En especial porque:

Contacto de orden 0	$f(a) = g(a)$	Iguales ordenadas en x=a
Contacto de orden 1	$f'(a) = g'(a)$	Iguales tangentes en x=a
Contacto de orden 2	$f''(a) = g''(a)$	Igual concavidad en x=a

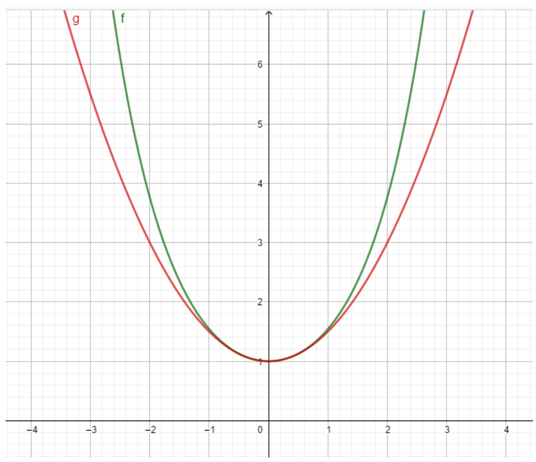
Ejemplo:

¿Qué orden de contacto tienen las curvas de las funciones $f(x) = Chx \;\; y \;\; g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$?

La primer dificultad que encontraremos en este ejercicio será encontrar algún punto de contacto de orden cero, es decir hallar los puntos de intersección entre las curvas.

Podríamos igualar sus ecuaciones pero $Chx = \frac{1}{2}x^2 + 1$ nos quedaría una ecuación trascendente, (aquí podríamos aplicar el método de Newton-raphson).

Pero como el ejercicio apunta a la similitud gráfica de las curvas, resolveremos el sistema por el método gráfico:



Observamos claramente que el único punto de contacto entre las curvas de f y de g es el punto P(0; 1).

A partir de aquí ya tenemos contacto de orden cero en x=0, investigaremos ahora que ocurre con las n derivadas:

$f(x) = Chx$ → f(0)=1	$g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ → g(0)=1	Contacto de orden 0
$f'(x) = Shx$ →f'(0)=0	$g'(x) = x$ → g'(0)=0	Contacto de orden 1
$f''(x) = Chx$ → f''(0)=1	$g''(x) = 1$ → g''(0)=1	Contacto de orden 2
$f'''(x) = Shx$ →f'''(0)=0	$g'''(x) = 0$ →g'''(0)=0	Contacto de orden 3
$f^{(iv)}(x) = Chx$ → $f^{(iv)}$ (0)=1	$g^{(iv)}(x) = 0$ →$g^{(iv)}$ (0)=0	No hay contacto de orden 4

Nuestra conclusión final es que las curvas de las funciones dadas tienen contacto de orden 3 en x=0.

Hemos trabajado en la unidad 3 con aproximación lineal mediante la recta tangente de la función, y podemos asegurar que una función y su recta tangente en x=a tendrán contacto de orden 1 siempre.

Pero en esta unidad nos interesa encontrar un polinomio de mayor orden que nos permita aproximar a cualquier función no polinómica. De eso se trata el siguiente planteo:

Consideraremos una función real f con n derivadas finitas en x=c y queremos construir un polinomio P(x) de grado n que tenga contacto de orden n con la función en x=c. Para esto planteamos un polinomio en potencias de (x-c):

$$P(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots\cdots + a_n(x-c)^n$$

Pero en este polinomio tenemos a todos los coeficientes desconocidos, debemos hallarlos. Trataremos de deducir dichos coeficientes en términos de las n derivadas no nulas de P(x) sabiendo que P(x) debe coincide en el orden de contacto con f(x)

Deben ser iguales f y P en x=c, entonces:

$P(c) = a_0 = f(c) \rightarrow \quad a_0 = f(c)$

Deben ser iguales las primeras derivadas en x=c, entonces:

$P'(x) = a_1 + 2a_2(x-c)^1 + 3a_3(x-c)^2 + \cdots\cdots + n\, a_n(x-c)^{n-1}$

$P'(c) = a_1 = f'(c) \rightarrow \quad a_1 = f'(c)$

Deben ser iguales las segundas derivadas en x=c, entonces:

$P''(x) = 2.1.a_2 + 3.2.a_3(x-c)^1 + \cdots\cdots + n.(n-1).a_n(x-c)^{n-2}$

$P''(c) = 2!\, a_2 = f''(c) \rightarrow \quad a_2 = \frac{f''(c)}{2!}$

Deben ser iguales las terceras derivadas en x=c, entonces:

$P'''(x) = 3.2.1.a_3 + \cdots\cdots + n.(n-1).(n-2)\, a_n(x-c)^{n-3}$

$P'''(c) = 3!\, a_3 = f'''(c) \rightarrow \quad a_3 = \frac{f'''(c)}{3!}$

Y así sucesivamente hasta llegar a la derivada n-ésima, ultima derivada no nula del polinomio P:

$P^{(n)}(x) = n.(n-1).(n-2) \ldots .3.2.1\, a_n = n!\ a_n$

$P^{(n)}(c) = n!\, a_n = f^{(n)}(c) \rightarrow \quad a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$

Calculados los n coeficientes del polinomio, sólo nos queda reemplazarlos en su ecuación:

El polinomio:

$$P(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots\cdots + a_n(x-c)^n$$

Ahora quedará así:

$$\boldsymbol{P(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots\cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n}$$

Polinomio de Taylor de grado n para f en x=c

Un caso particular, muy usado en la práctica, es el polinomio para f en c=0 que toma nombre propio y es el siguiente:

$$\boldsymbol{P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots\cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}$$

Polinomio de Mac Laurin de grado n para f en x=c=0

Ambos polinomios permiten calcular el valor aproximado de una función para valores cercanos a x=c, cuanto más cercanos sean mejor será la aproximación.

Pregunto ahora, ¿en qué influye el grado que tome del polinomio al calcular una aproximación? La pista está en el concepto de orden de contacto…

Ejemplo:

Determinar el polinomio de Taylor P de grado 3 para la función $f(x) = \sqrt{x}$, y usarlo para calcular en forma aproximada el valor de $\sqrt{4{,}5}$, $\sqrt{4{,}3}$ y $\sqrt{4{,}1}$

Resolución:

Como pide polinomio de grado n=3, debemos calcular hasta la tercer derivada de la función:

$$f(x) = x^{1/2}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}\, x^{-1/2}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{4}\, x^{-3/2}$$
$$f'''(x) = \frac{3}{8}\, x^{-5/2}$$

Ahora, debemos decidir qué valor de c tomar, como los tres valores a calcular son cercanos a $\sqrt{4}$ que es un valor conocido de la función, tomaremos c=4 para calcular luego por aproximación los valores pedidos.

$$f(4) = 4^{1/2} = 2$$
$$f'(4) = \frac{1}{2}\, 4^{-1/2} = 1/4$$
$$f''(4) = -\frac{1}{4}\, 4^{-\frac{3}{2}} = -1/32$$
$$f'''(4) = \frac{3}{8}\, 4^{-5/2} = 3/256$$

Entonces armamos el polinomio de Taylor de grado 3 para la función dada:

$$\boldsymbol{P(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3}$$

$$P(x) = f(4) + f'(4)(x-4) + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2 + \frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3$$

$$P(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) + \frac{-\frac{1}{32}}{2}(x-4)^2 + \frac{\frac{3}{256}}{6}(x-4)^3$$

$$P(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3$$

Con el polinomio obtenido, calcularemos en forma aproximada las raíces del enunciado:

$$\sqrt{4,9} \cong P(4,9) = 2 + \frac{1}{4}(4,9-4) - \frac{1}{64}(4,9-4)^2 + \frac{1}{512}(4,9-4)^3 = 2,2137675781\ldots$$

$$\sqrt{4,9} = 2,2135943621\ldots$$

$$\sqrt{4,5} \cong P(4,5) = 2 + \frac{1}{4}(4,5-4) - \frac{1}{64}(4,5-4)^2 + \frac{1}{512}(4,5-4)^3 = 2,1213378906\ldots$$

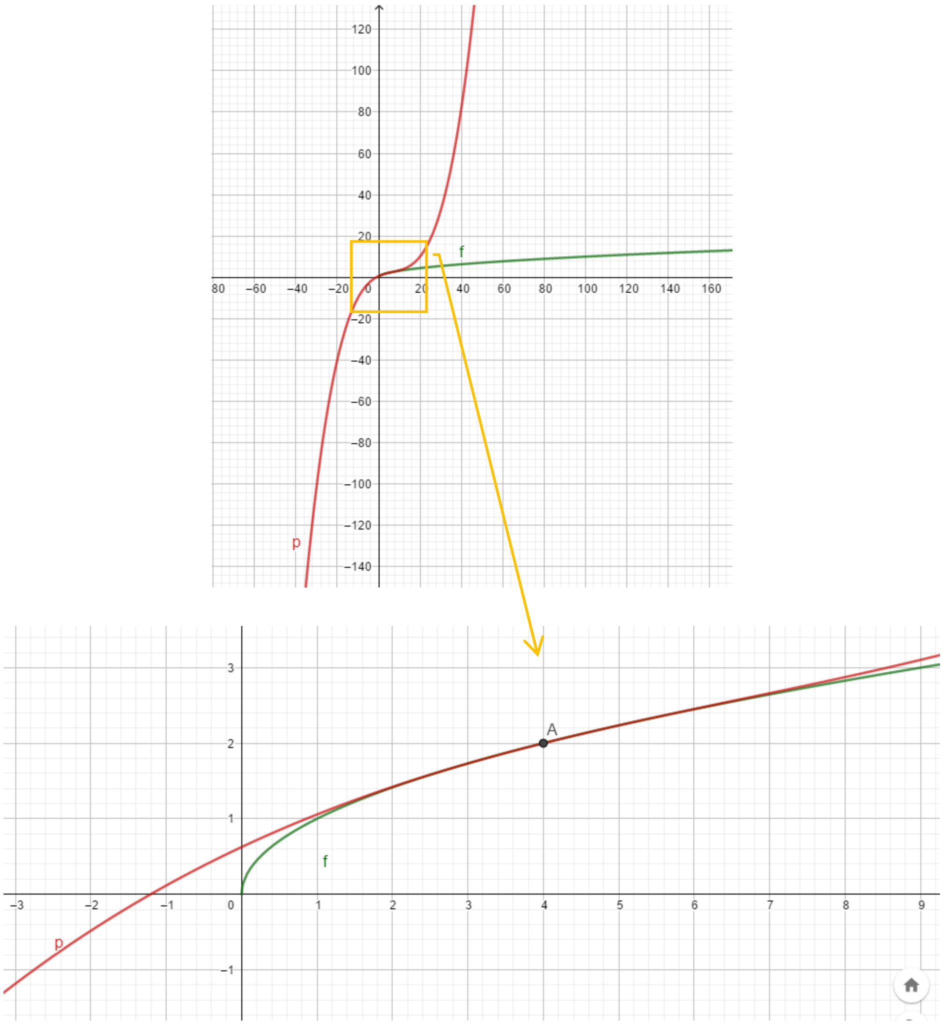
$$\sqrt{4,5} = 2,12132034\ldots$$

$$\sqrt{4,3} \cong P(4,3) = 2 + \frac{1}{4}(4,3-4) - \frac{1}{64}(4,3-4)^2 + \frac{1}{512}(4,3-4)^3 = 2,0736464844\ldots$$

$$\sqrt{4,3} = 2,07364414\ldots$$

$$\sqrt{4,1} \cong P(4,1) = 2 + \frac{1}{4}(4,1-4) - \frac{1}{64}(4,1-4)^2 + \frac{1}{512}(4,1-4)^3 = 2,0248457031\ldots$$

$$\sqrt{4,1} = 2,02484567\ldots$$



Ejemplo 2:

<u>Ej.6-07</u>:Hallar el Polinomio de Mc Laurin de grado 5 para $f(x)=e^x$ *, y estimar el error cometido al aproximar el valor de* e *y* e^2 *con dicho polinomio. Comparar los errores y analizar el porqué de esta diferencia.*

Resolución:
Mac Laurin es para c=0, me piden grado 5 entonces derivo hasta derivada quinta y luego armo el polinomio para calcular en forma aproximada los valores pedidos:

Función y derivadas en x	Función y derivadas en c=0
$f(x)=e^x$	$f(0)=e^0=1$
$f'(x)=e^x$	$f'(0)=1$
$f''(x)=e^x$	$f''(0)=1$
$f'''(x)=e^x$	$f'''(0)=1$
$f^{(iv)}(x)=e^x$	$f^{(iv)}(0)=1$
$f^{(v)}(x)=e^x$	$f^{(v)}(0)=1$

Armamos el polinomio de Mac Laurin:

$$\boldsymbol{P(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5}$$

$$\boldsymbol{P(x)=1+1\,x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5}$$

$$\boldsymbol{P(x)=1+1\,x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5}$$

- <u>Calculamos $f(1)=e^1$</u>

$$\boldsymbol{e^1\cong P(1)=1+1\,.\,1+\frac{1}{2}.1^2+\frac{1}{6}.1^3+\frac{1}{24}.1^4+\frac{1}{120}.1^5=2,7166666666\ldots}$$

$\boldsymbol{e=2,71828183\ldots}$

El error cometido, en forma aproximada, será:

$E\cong f(1)-P(1)=2{,}71828183-2{,}7166666666$=0,00161516… el error está en la tercer cifra decimal, es decir E<1.10^{-2}

- <u>Calculamos $f(2)=e^2$</u>

$$\boldsymbol{e^2\cong P(2)=1+1\,.\,2+\frac{1}{2}.2^2+\frac{1}{6}.2^3+\frac{1}{24}.2^4+\frac{1}{120}.2^5=7,2666666666\ldots}$$

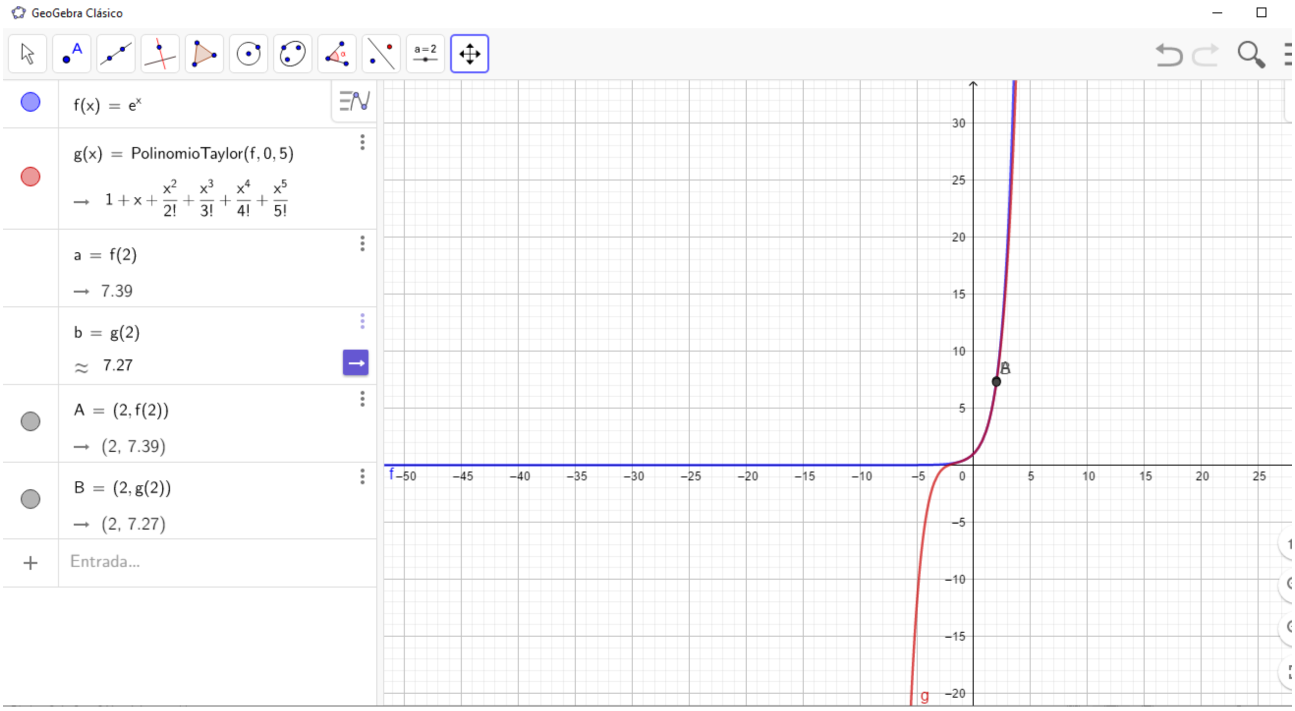
$\boldsymbol{e^2=7,3890561\ldots}$

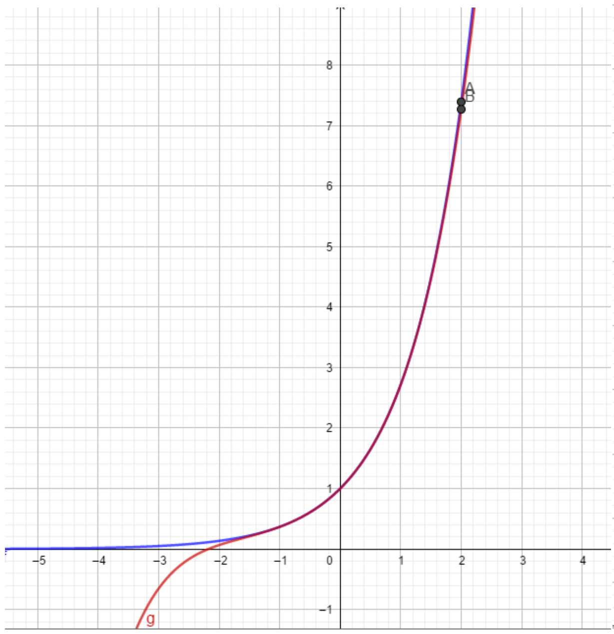
El error cometido, en forma aproximada, será:

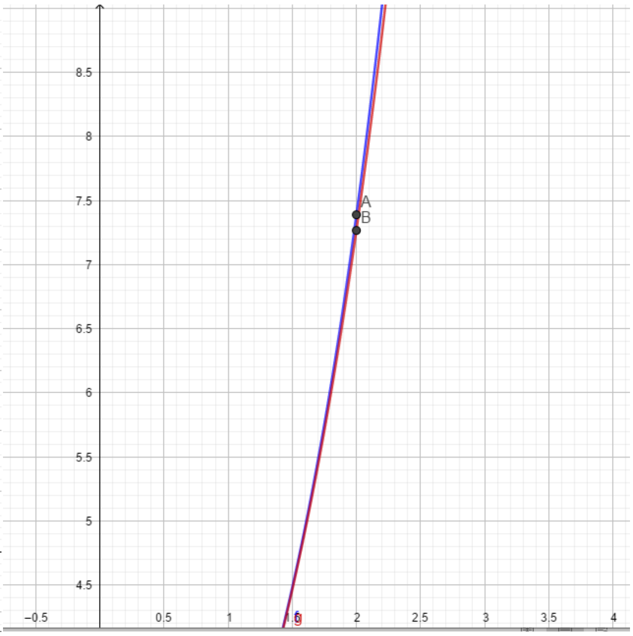
$E\cong f(2)-P(2)=7{,}3890561-7{,}26666666$= 0,1223895… el error está en la primer cifra decimal, es decir E<1

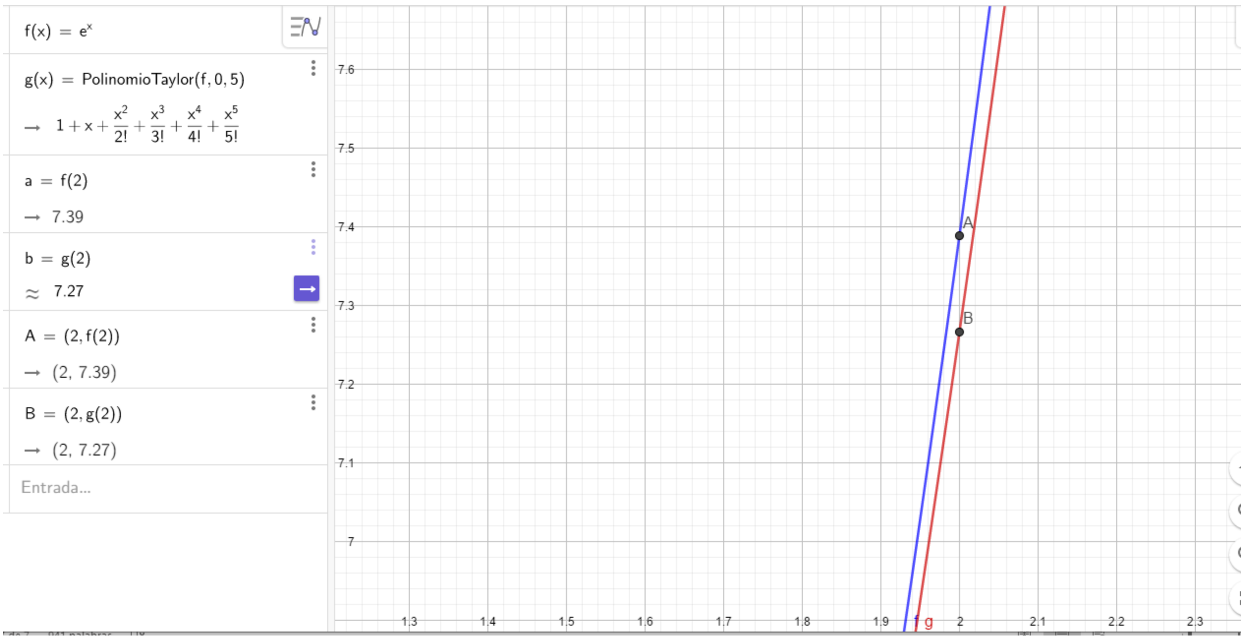
En este caso es un error bastante grande, deberíamos trabajar con otro centro c.

Observemos gráficamente a la función y al polinomio en las cercanías del centro c=0, y qué ocurre en los valores de x calculados:


GeoGebra Clásico
f(x) = e^x
g(x) = PolinomioTaylor(f, 0, 5)
→ 1 + x + x²/2! + x³/3! + x⁴/4! + x⁵/5!
a = f(2)
→ 7.39
b = g(2)
≈ 7.27
A = (2, f(2))
→ (2, 7.39)
B = (2, g(2))
→ (2, 7.27)
Entrada...
f
g


A
B
g


A
B
f
g

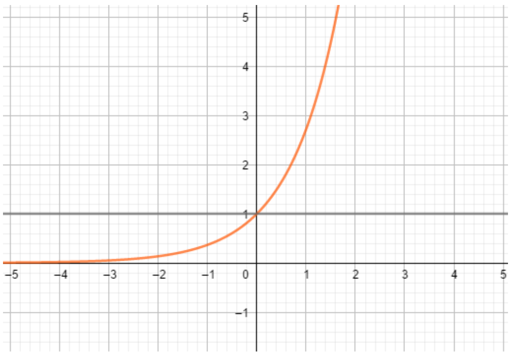
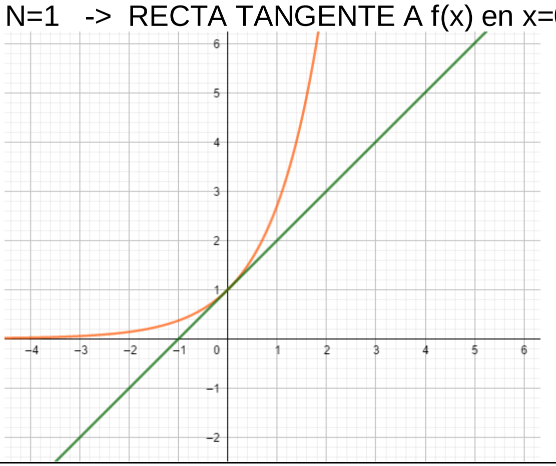
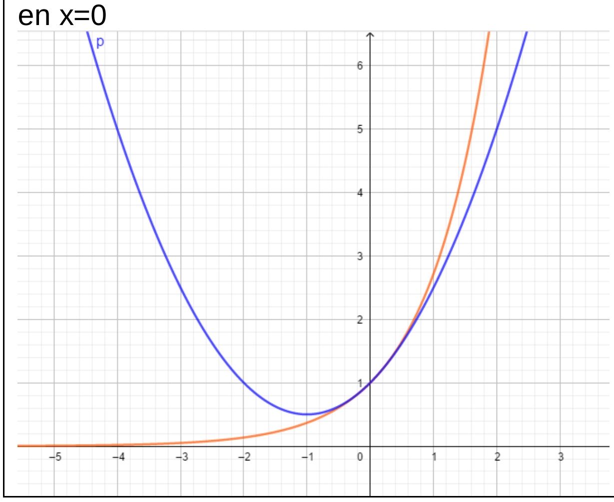
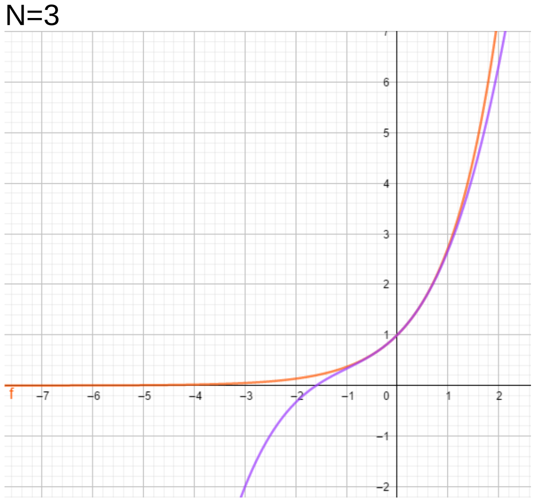

f(x) = e^x
g(x) = PolinomioTaylor(f, 0, 5)
→ 1 + x + x²/2! + x³/3! + x⁴/4! + x⁵/5!
a = f(2)
→ 7.39
b = g(2)
≈ 7.27
A = (2, f(2))
→ (2, 7.39)
B = (2, g(2))
→ (2, 7.27)
Entrada...
A
B
f
g

Aproximaciones según el grado del polinomio elegido

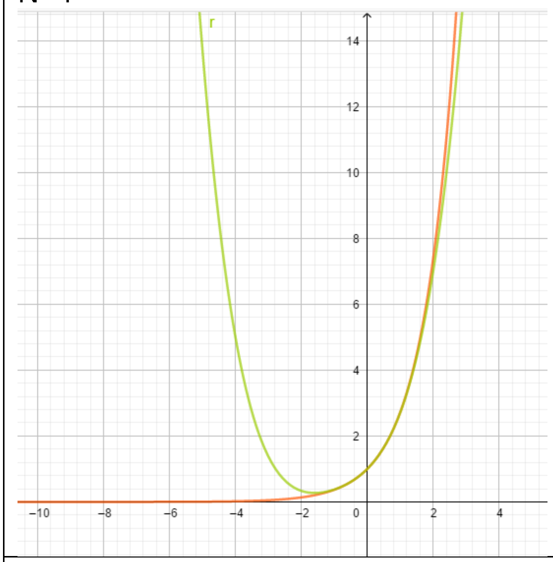
Para
$e = 2,71828183$ ....

grado	**polinomio**	Error
N=0	$P(x) = 1 \to P(1) = 1$	E= 1,71828183..
N=1	$P(x) = 1 + 1\,x \to P(1) = 1 + 1 = 2$	E=0,71828183…
N=2	$P(x) = 1 + 1\,x + \frac{1}{2!}x^2 \to P(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} = 2,5$	E=0,21828183…
N=3	$P(x) = 1 + 1\,x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 \to P(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 2,6666$	E=0,05161516…
N=4	$P(x) = 1 + 1\,x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 \to$ $P(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = 2,70833334$	E=0,00994849…
N=5	$P(x) = 1 + 1\,x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 \to$ $P(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = 2,7166666666$	E=0,00161516…

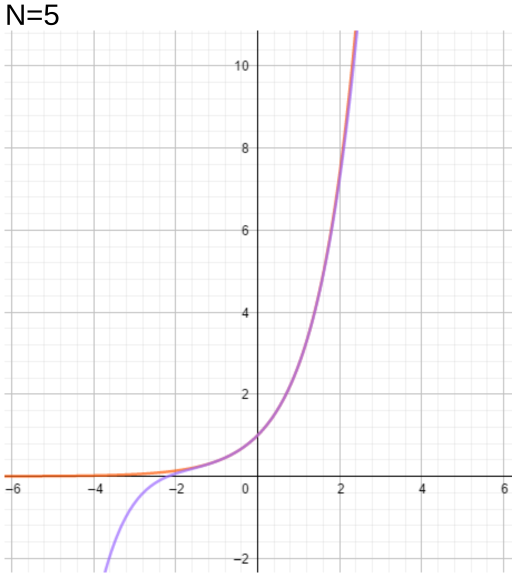
Graficos de cada caso:

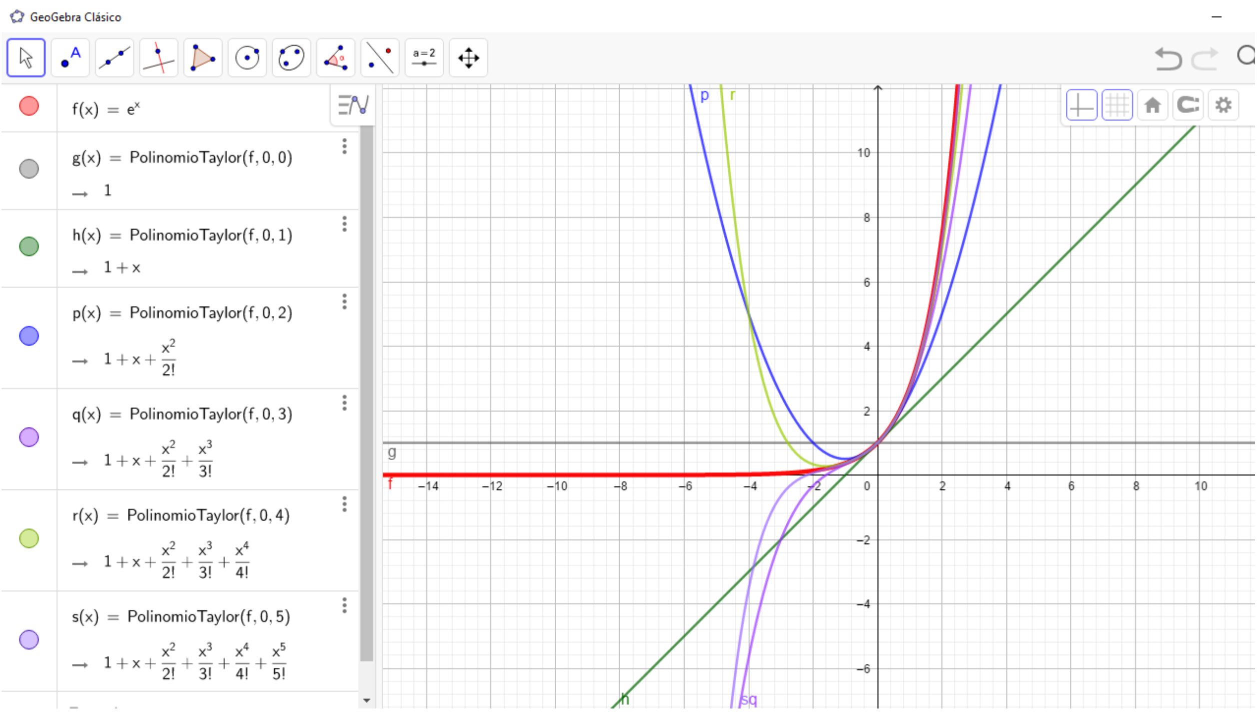
N=0 	N=1 -> RECTA TANGENTE A f(x) en x=0 
N=2 -> PARÁBOLA OSCULATRIZ a f(x) en x=0 	N=3 

N=4



N=5





Conclusiones del ejercicio:

- La aproximación mejora cuanto más cerca esté el valor de x a calcular respecto del centro c donde se construye el polinomio.
- La aproximación mejora a medida que aumentamos el grado del polinomio.

Dos definiciones a colación:

- El polinomio de grado 1 siempre es la **recta tangente** a la curva en el punto x=c
- El polinomio de grado 2 siempre es la **parábola osculatriz** a la curva en el punto x=c.