Álgebra y Geometría Analítica

Clase 26: Subespacios Fundamentales de una Matriz

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

Unidad 4 – Clase 26

Repaso de las Clases Anteriores

DEFINICIÓN: ESPACIO VECTORIAL

$(V;+;\mathbb{R};.)$ *es espacio vectorial si se cumple los* 10 *axiomas de espacios vectoriales*

AXIOMAS DE ESPACIOS VECTORIALES:

$\forall \vec{x}\in V, \forall \vec{y}\in V, \forall \vec{z}\in V, \forall \alpha\in\mathbb{R}, \forall \beta\in\mathbb{R}:$

A 1) Ley de composición interna: $(\vec{x}+\vec{y})\in V$
A 2) Propiedad Conmutativa: $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$
A 3) Propiedad Asociativa: $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$
A 4) Existencia de elemento neutro: $\exists\vec{0}\in V/\vec{x}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{x}=\vec{x}$
A 5) Existencia de Simétrico (u opuesto): $\exists-\vec{x}\in V/\vec{x}+(-\vec{x})=(-\vec{x})+\vec{x}=\vec{0}$
A 6) Ley de composición externa: $\alpha\vec{x}\in V$
A 7) Propiedad Asociativa mixta: $(\alpha\beta).\vec{x}=\alpha.(\beta.\vec{x})$
A 8) Existencia de escalar neutro: $\exists 1\in\mathbb{R}/1.\vec{x}=\vec{x}$
A 9) Distributiva respecto de la suma de escalares: $(\alpha+\beta).\vec{x}=\alpha.\vec{x}+\beta.\vec{x}$
A10) Distributiva respecto de la suma de vectores: $\alpha.(\vec{x}+\vec{y})=\alpha.\vec{x}+\alpha.\vec{y}$

Repaso de las Clases Anteriores

DEFINICIÓN: SUBESPACIO

Si V *es* EV *y* $S\subset V\wedge S\neq\emptyset\Rightarrow S$ *es suebspacio de* $V\Leftrightarrow S$ *cumple los* 10 *axiomas de* EV.

CONDICIONES SUFICIENTES PARA QUE S SEA SUBESPACIO DE V:

I) $S\subset V$
II) $S\neq\emptyset$
III) LCI: $\forall\vec{x}\in S\wedge\forall\vec{y}\in S:(\vec{x}+\vec{y})\in S$
IV) LCE: $\forall\vec{x}\in S\wedge\forall\alpha\in\mathbb{R}:(\alpha\vec{x})\in S$

Repaso de las Clases Anteriores

COMBINACION LINEAL

Sea V espacio vectorial (EV) Se dice que un vector $\bar{v}$ de V es **combinación lineal** (CL) de un conjunto de vectores A, sí y solo sí existen escalares tales que: $\vec{v}=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\ldots+\alpha_n\vec{v}_n$

Simbólicamente:

$$Sea\ V\ \ EV.\ \ Sea\ A=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\},A\neq\emptyset,A\subset V.$$

$$\vec{v}\in V\ es\ CL\ de\ A\Leftrightarrow\exists\,\alpha_i\in\mathbb{R}/\vec{v}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\vec{v}_i$$

Para tener en cuenta: Cuando se busca verificar que un vector es CL de A, se obtiene un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son los escalares de la CL.

Si el sistema es SC ==> los escalares existen y la CL es posible

Si el sistema es SI ==> no existen los escalares, y la CL no es posible

Repaso de las Clases Anteriores

SUBESPACIO GENERADO

Sea V EV y el conjunto de vectores A = $\{\bar{v}_1, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$. Llamaremos **subespacio generado por A** al conjunto de todos los vectores que se pueden escribir como CL de los vectores de A.

Simbólicamente:

$$gen(A)=S\ \text{(S es el subespacio generado por A)}$$

$$S=gen(A)=\{\vec{x}\in V/\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\vec{v}_i\}\ (\vec{x}\ \text{ es CL de A})$$

Repaso de las Clases Anteriores

SISTEMA GENERADOR

Sea V EV y el conjunto de vectores A = $\{\overline{v}_1, \overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n\}$ con A ⊂ V. Diremos que **A es un sistema generador de V** sí y solo sí para todo vector $\overline{v}$ ∈ V, $\overline{v}$ se puede expresar como CL de los vectores de A.

Simbólicamente:

$$A \text{ es } SG \text{ de } V \Leftrightarrow \forall\, \vec{v} \in V : \vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_{2\ldots}\, \alpha_n \vec{v}_n$$

Si un conjunto A no alcanza a generar todo el EV, no será sistema generador (SG) de V, sino de un subespacio de V.

Repaso de las Clases Anteriores

INDEPENDENCIA LINEAL

Sea V EV y el conjunto de vectores A = $\{\overline{v}_1, \overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n\}$ con A ⊂ V

Diremos que **A es Linealmente Independiente (LI)** sí y solo sí la CL de los vectores de A igualada al vector nulo se verifica solo si todos los escalares αi son nulos.

$$A \text{ es } LI \Leftrightarrow \vec{0} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 \ldots \alpha_n \vec{v}_n \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$$

Del mismo modo diremos que **A es Linealmente Dependiente (LD)** sí y solo sí la CL de los vectores de A igualada al vector nulo se verifica con al menos un escalar αi no nulo.

$$A \text{ es } LD \Leftrightarrow \vec{0} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 \ldots \alpha_n \vec{v}_n \Rightarrow \alpha_1 \neq 0 \vee \alpha_2 \neq 0 \vee \ldots \vee \alpha_n \neq 0$$

$$\vec{0} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 \ldots \alpha_n \vec{v}_n \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0 \ \text{(CL única): A es LI} \\ \alpha_1 \neq 0 \vee \alpha_2 \neq 0 \vee \ldots \alpha_n \neq 0 \ \text{(CL múltiple): A es LD} \end{cases}$$

Repaso de las Clases Anteriores

BASE

Definición:
Un conjunto de vectores B de un espacio vectorial V constituye una **base** de dicho espacio vectorial sí y solo sí, B es linealmente independiente y B es sistema generador para el espacio vectorial.

$V\ EV, B \subset V$
B es Base de $V \Leftrightarrow B\ es\ LI \wedge V = gen(B)$

DIMENSIÓN DE UN EV

La **dimensión de un espacio vectorial** es la cantidad de vectores que forman una base del espacio vectorial.

$V\ EV,\ B \subset V, B$ Base de $V \Rightarrow dim(V) = \#(B)$

Repaso de las Clases Anteriores

NORMA VECTORIAL: DEFINICIÓN

$f : V \rightarrow \mathbb{R} / \forall \vec{x} \in V : f(\vec{x}) = ||\vec{x}|| \in \mathbb{R}$

NORMAS CONOCIDAS:

Norma de Orden 1:

$||\vec{x}||_1 = \sum |x_i| \Rightarrow ||\vec{x}||_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$

Norma de Orden 2 (Norma Euclídea):

$||\vec{x}||_2 = [\sum_{i=1}^{n} x_i^2]^{\frac{1}{2}} = \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Norma de Orden Infinito:

$||\vec{x}||_\infty = max\{\ |x_i|\ \}_{i=1}^{n}$

Repaso de las Clases Anteriores

PRODUCTO INTERIOR: DEFINICIÓN

Sea (V ; + ; R ;   ) espacio vectorial EV El **producto interior** es una función f : VxV $\rightarrow$ R tal que si $\overline{u}$ ∈ V, $\overline{v}$ ∈ V: f($\overline{u}$; $\overline{v}$) = < $\overline{u}$; $\overline{v}$ > ∈ R, satisface los siguientes axiomas:

$\forall \vec{u} \in V , \forall \vec{v} \in V , \forall \vec{w} \in V , \forall h \in \mathbb{R}$

A1) Condición de Simetría: < $\overline{u}$; $\overline{v}$ > = < $\overline{v}$; $\overline{u}$ > (Prop Conmutativa)

A2) Condición de Aditividad: < $\overline{u}$ + $\overline{v}$; $\overline{w}$ > = < $\overline{u}$; $\overline{w}$ > + < $\overline{v}$; $\overline{w}$ > (Prop Distributiva)

A3) Condición de Homogeneidad: < h$\overline{u}$; $\overline{v}$ > = h < $\overline{v}$; $\overline{u}$ > (Prop Asociativa Mixta)

A4) Condición de Positividad: < $\overline{u}$; $\overline{u}$ > $\geq$ 0 ∧ [< $\overline{u}$; $\overline{u}$ > = 0 <==> $\overline{u}$ = $\overline{0}$ (Elemento neutro)]

Repaso de las Clases Anteriores

ORTOGONALIDAD: DEFINICIONES

Sea V EV con PI (Producto Interior). $\forall \vec{x} \in V \wedge \forall \vec{y} \in V$ con: $\vec{x} \neq \vec{0} \wedge \vec{y} \neq \vec{0}$.
$S_1 \subset V \wedge S_2 \subset V \wedge S_1 \neq \emptyset \wedge S_2 \neq \emptyset$

1) Dos vectores son ortogonales: $\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow < \vec{x} ; \vec{y} > = 0$
2) Un vector con un Subespacio son ortogonales: $\vec{x} \perp S_1 \Leftrightarrow \forall \vec{v}_i \in S_1 : < \vec{x} ; \vec{v}_1 > = 0$
3) Dos Subespacios son ortogonales: $S_1 \perp S_2 \Leftrightarrow \forall \vec{v}_i \in S_1 \wedge \forall \vec{w}_j \in S_2 : < \vec{v}_i ; \vec{w}_j > = 0$
4) Conjunto Ortogonal: $A = \{ \vec{v}_1 ; \vec{v}_2 ; ... ; \vec{v}_n \} \subset V . A\ es\ ortogonal\ si : < \vec{v}_i ; \vec{v}_j > = 0\ \ si\ i \neq j$
5) Base Ortogonal: $Sea\ B = \{ \vec{v}_1 ; \vec{v}_2 ; ... ; \vec{v}_n \}$

$B\ es\ Base\ Ortogonal \Leftrightarrow B\ es\ conjunto\ ortogonal \wedge B\ es\ Base\ de\ V .$

Repaso de las Clases Anteriores

ORTOGONALIDAD: TEOREMAS

TEOREMA 1:

Dado un conjunto ortogonal $A=\{\vec{v}_1;\vec{v}_2;\ldots;\vec{v}_m\}$ incluido en un EV V con PI, $A\subset V$, entonces dicho conjunto resulta LI .

TEOREMA 2:

Sea $B=\{\vec{v}_1;\vec{v}_2;\ldots;\vec{v}_n\}$ una base ortogonal de un EV V con PI, todo vector $\vec{x}\subset V$ puede escribirse como: $\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\frac{<\vec{x};\vec{v}_i>}{<\vec{v}_i;\vec{v}_i>}\vec{v}_i$

Repaso de las Clases Anteriores

CONJUNTO ORTONORMAL

$A=\{v_1;v_2;\ldots;v_n\}\subset V$ *es un conjunto ortonormal si cumple*:

$<\vec{v}_i;\vec{v}_j>=0$ si $i\neq j$

$<\vec{v}_i;\vec{v}_j>=||\vec{v}_1||^2=1, si\ i=j$

$\boxed{\text{A es conjunto ortonormal } \Leftrightarrow \langle\vec{v}_i;\vec{v}_j\rangle=\delta_{ij}}$

BASE ORTONORMAL

$B=\{v_1;v_2;\ldots;v_n\}\subset V$, B es base ortonormal $\Leftrightarrow B$ *es base* $\wedge$ B *es conjunto ortonormal*.

Esto es:

B *es LI* $\wedge V=gen(B)$ (B es LI)

$\langle\vec{v}_i;\vec{v}_j\rangle=\delta_{ij}$ (B es conjunto ortonormal)

Repaso de las Clases Anteriores

ORTONORMALIDAD: COROLARIO

Si $B=\{v_1;v_2;\ldots;v_n\}$ es base ortonormal de $V \Rightarrow \forall\, \vec{x} \in V, \vec{x}$ puede escribirse:

$$\vec{x}=\sum_{i=1}^{n} <\vec{x};\vec{v}_i>\vec{v}_i$$

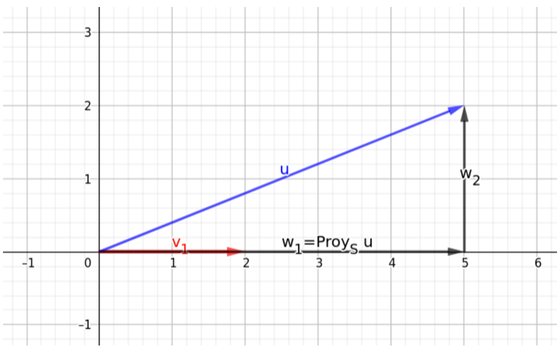
$$\vec{x}=<\vec{x};\vec{v}_1>\vec{v}_1+<\vec{x};\vec{v}_2>\vec{v}_2+\ldots+<\vec{x};\vec{v}_n>\vec{v}_n$$

Repaso de las Clases Anteriores

DEFINICIÓN: PROYECCION ORTOGONAL

Sea $(V;+;\mathbb{R};.)$ espacio vectorial con PI.
Sea $B=\{\vec{v}_1;\vec{v}_2;\ldots;\vec{v}_n\}$ una base ortonormal (es decir: $\langle \vec{v}_i;\vec{v}_j\rangle=\delta_{i,j}$).
Sea $B'=\{\vec{v}_1;\vec{v}_2;\ldots;\vec{v}_r\}\, con\, r \le n$, y sea el subespacio $S=gen(B')$:
$\forall\, \vec{u} \in V: \vec{u}$ puede expresarse:

$$\vec{u}=\vec{w}_1+\vec{w}_2 \quad (\text{con } \vec{w}_1 \in S \wedge \vec{w}_2 \perp S).$$



Repaso de las Clases Anteriores

DEFINICIÓN: PROYECCION ORTOGONAL

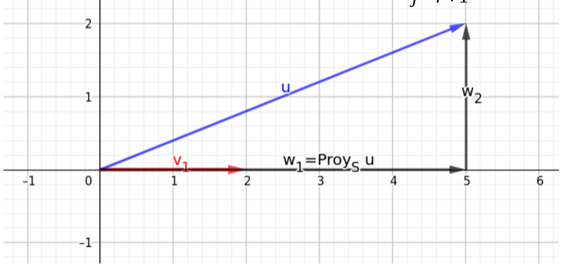
El vector $\vec{w}_1$ es la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre S y se denota: $\vec{w}_1 = proy_S \vec{u}$

El vector $\vec{w}_2 = \vec{u} - proy_S \vec{u}$ es la componente de $\vec{u}$ ortogonal a S.

$$\vec{w}_1 = \langle \vec{u};\vec{v}_1\rangle \vec{v}_1 + \langle \vec{u};\vec{v}_2\rangle \vec{v}_2 + \ldots + \langle \vec{u};\vec{v}_r\rangle \vec{v}_r \qquad \Rightarrow \vec{w}_1 = \sum_{i=1}^{i=r} \langle \vec{u};\vec{v}_i\rangle v_i \qquad i \in [1;r] \qquad (\vec{w}_1 \in S)$$

$$\vec{w}_2 = \vec{u} - \langle \vec{u};\vec{v}_1\rangle \vec{v}_1 - \langle \vec{u};\vec{v}_2\rangle \vec{v}_2 - \ldots - \langle \vec{u};\vec{v}_r\rangle \vec{v}_r$$

$$\vec{w}_2 = \langle \vec{u};\overrightarrow{v_{r+1}}\rangle \overrightarrow{v_{r+1}} + \langle \vec{u};\overrightarrow{v_{r+2}}\rangle \overrightarrow{v_{r+2}} + \ldots + \langle \vec{u};\vec{v}_n\rangle \vec{v}_n \qquad \Rightarrow \vec{w}_2 = \sum_{j=r+1}^{j=n} \langle \vec{u};\vec{v}_j\rangle v_j \qquad j \in [r+1;n] \qquad (\vec{w}_2 \in S^{\perp})$$



Repaso de las Clases Anteriores

EL PROCESO DE GRAM-SCHMIDT

El procedimiento de Gram-Schmidt es un algoritmo simple para obtener una base ortonormal a partir de otra base que no lo es.

Todo espacio con producto interior de dimensión finita, no nula, tiene una base ortonormal.

Sea V EV con PI de dimensión finita n. Sea $B = \{\vec{u}_1;\vec{u}_2;\ldots;\vec{u}_n\}$ una base de V.

La sucesiva secuencia de operaciones producirá otra base de V ortonormal:

$$B' = \{\vec{v}_1;\vec{v}_2;\ldots;\vec{v}_n\} \text{ una base ortonormal de } V.$$

Repaso de las Clases Anteriores

EL PROCESO DE GRAM-SCHMIDT: ALGORITMO

1) Tomamos $\vec{v}_1 = \frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|} = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}$ (primer vector de la nueva base ortonormal)

2) Para obtener $\vec{v}_2$ (segundo vector de la base ortonormal), se calcula la componente de $\vec{u}_2$ ortogonal al subespacio S_1 generado por $\vec{v}_1$ $(\vec{w}_2 = \vec{u}_2 - proy_{S1}\vec{u}_2)$ y se normaliza:

$$\vec{v}_2 = \frac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|} = \frac{\vec{u}_2 - proy_{S1}\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2 - proy_{S1}\vec{u}_2\|} = \frac{\vec{u}_2 - \langle \vec{u}_2 ; \vec{v}_1 \rangle \vec{v}_1}{\|\vec{u}_2 - \langle \vec{u}_2 ; \vec{v}_1 \rangle \vec{v}_1\|} \quad (\text{con: } \|\vec{v}_2\| = 1 \wedge \vec{v}_2 \perp \vec{v}_1)$$

3) Para construir el tercer vector de la base ortonormal $\vec{v}_3$ (con $\|\vec{v}_3\| = 1 \wedge \vec{v}_3 \perp \vec{v}_1 \wedge v_3 \perp \vec{v}_2$), se calcula la componente de $\vec{u}_3$ ortogonal al subespacio S_2 generado por $\{\vec{v}_1 ; \vec{v}_2\}$, $(\vec{w}_3 = \vec{u}_3 - proy_{S2}\vec{u}_3)$ y se normaliza.

$$\vec{v}_3 = \frac{\vec{w}_3}{\|\vec{w}_3\|} = \frac{\vec{u}_3 - proy_{S2}\vec{u}_3}{\|\vec{u}_3 - proy_{S2}\vec{u}_3\|} = \frac{\vec{u}_3 - \langle \vec{u}_3 ; \vec{v}_1 \rangle \vec{v}_1 - \langle \vec{u}_3 ; \vec{v}_2 \rangle \vec{v}_2}{\|\vec{u}_3 - \langle \vec{u}_3 ; \vec{v}_1 \rangle \vec{v}_1 - \langle \vec{u}_3 ; \vec{v}_2 \rangle \vec{v}_2\|}$$

En general: $\vec{v}_n = \frac{\vec{w}_n}{\|\vec{w}_n\|}$ con: $\vec{w}_n = \vec{u}_n - Proy_{S_{n-1}}\vec{u}_n \Rightarrow B' = \{\vec{v}_1 ; \vec{v}_2 ; \ldots ; \vec{v}_n\}$ base ortonormal de V.

Subespacios Fundamentales de una Matriz

SUBESPACIOS FUNDAMENTALES DE UNA MATRIZ

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, sus vectores fila: $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_m\}$, sus vectores columna: $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_n\}$.

Subespacio Fila de la Matriz A:

$Fil(A) = gen\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_m\}$

$Fil(A) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n / A^T . X = Y\}$

Subespacio Columna de la Matriz A:

$Col(A) = gen\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_n\}$

$Col(A) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^m / A . X = Y\}$

Subespacio Nulidad de la Matriz A:

$Nul(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n / A \cdot X = 0_{mx1}\}$

Subespacio Nulidad Izquierda de la Matriz A:

$Nul\,I(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m / A^T . X = 0_{nx1}\}$

Subespacios Fundamentales de una Matriz

PROPIEDADES

$$dim[Fil(A)] + dim[Nul(A)] = n$$
$$dim[Col(A)] + dim[Nul\,I(A)] = m$$

$$Fil(A) \perp Nul(A)$$
$$Col(A) \perp Nul\,I(A)$$

Subespacios Fundamentales de una Matriz

EJEMPLO

Hallar los subespacios Fila, Columna, Nulidad y Nulidad Izquierda de $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

1) $Fil(A)=gen(\{\vec{f}_1;\vec{f}_2;\vec{f}_3\})=gen(\{(1;-1;0;3);(2;-3;1;1);(1;-2;1;-2)\})$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & y_1 \\ -1 & -3 & -2 & y_2 \\ 0 & 1 & 1 & y_3 \\ 3 & 1 & 2 & y_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & 1 & -y_1-y_2 \\ 0 & 1 & 1 & y_3 \\ 0 & 5 & -5 & -3y_1+y_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3y_1+2y_2 \\ 0 & 1 & 1 & -y_1-y_2 \\ 0 & 0 & 0 & y_1+y_2+y_3 \\ 0 & 0 & 0 & -8y_1-5y_2+y_4 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 0 \Rightarrow y_3 = -y_1 - y_2 \\ -8y_1 - 5y_2 + y_4 = 0 \Rightarrow y_4 = 8y_1 + 5y_2 \end{cases}$$

$$\boxed{Fil(A)=\{\vec{y}\in\mathbb{R}^4 / (y_1;y_2;y_3;y_4)=(y_1;y_2;-y_1-y_2;8y_1+5y_2)\}}$$

$$\boxed{B_{Fil(A)}=\{\vec{u}_1=(1;0;-1;8);\vec{u}_2=(0;1;-1;5)\}} \quad \boxed{dim(Fil(A))=2}$$

Subespacios Fundamentales de una Matriz

EJEMPLO

Hallar los subespacios Fila, Columna, Nulidad y Nulidad Izquierda de $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 3\\ 2 & -3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -2\end{pmatrix}$

2) $Nul(A)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^4 / A.X=0_{3x1}\}$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 3\\ 2 & -3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 1 & -5\\ 0 & -1 & 1 & -5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1-x_2+3x_4=0 \quad \Rightarrow x_1=x_2-3x_4\\ -x_2+x_3-5x_4=0\Rightarrow x_3=x_2+5x_4\end{cases}$$

$$\boxed{Nul(A)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^4/(x_1;x_2;x_3;x_4)=(x_2-3x_4;x_2;x_2+5x_4;x_4)\}}$$

$$\boxed{B_{Nul(A)}=\{\vec{v}_1=(1;1;1;0);\vec{v}_2=(-3;0;5;1)\}} \quad \boxed{dim(Nul(A))=2}$$

Subespacios Fundamentales de una Matriz

EJEMPLO

Hallar los subespacios Fila, Columna, Nulidad y Nulidad Izquierda de $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 3\\ 2 & -3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -2\end{pmatrix}$

Verificamos propiedades:

$$\begin{array}{ccccc} dim[Fil(A)] & + & dim[Nul(A)] & = & n\\ 2 & + & 2 & = & 4\end{array}$$

$Fil(A)\perp Nul(A)$:

$\langle\vec{u}_1;\vec{v}_1\rangle=\langle(1;0;-1;8);(1;1;1;0)\rangle=0$

$\langle\vec{u}_1;\vec{v}_2\rangle=\langle(1;0;-1;8);(-3;0;5;1)\rangle=0$

$\langle\vec{u}_2;\vec{v}_1\rangle=\langle(0;1;-1;5);(1;1;1;0)\rangle=0$

$\langle\vec{u}_2;\vec{v}_2\rangle=\langle(0;1;-1;5);(-3;0;5;1)\rangle=0$

Subespacios Fundamentales de una Matriz

EJEMPLO

Hallar los subespacios Fila, Columna, Nulidad y Nulidad Izquierda de $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 3\\ 2 & -3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -2\end{pmatrix}$

3) $Col(A)=gen(\{\vec{c}_1;\vec{c}_2;\vec{c}_3;\vec{c}_4\})=gen(\{(1;2;1)^T;(-1;-3;-2)^T;(0;1;1)^T;(3;1;-2)^T\})$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 3 & | \; y_1\\ 2 & -3 & 1 & 1 & | \; y_2\\ 1 & -2 & 1 & -2 & | \; y_3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 3 & | \; y_1\\ 2 & -3 & 1 & 1 & | \; y_2\\ -1 & 1 & 0 & -3 & | -y_2+y_3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 3 & | \; y_1\\ 0 & -1 & 1 & -5 & | -2y_1+y_2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & | \; y_1-y_2+y_3\end{pmatrix}$$

$y_1-y_2+y_3=0 \Rightarrow y_2=y_1+y_3$

$\boxed{Col(A)=\{\vec{y}\in\mathbb{R}^3 / (y_1;y_2;y_3)=(y_1;y_1+y_3;y_3)\}}$

$\boxed{B_{Col(A)}=\{\vec{w}_1=(1;1;0);\vec{w}_2=(0;1;1)\}}$ $\boxed{dim(Col(A))=2}$

Subespacios Fundamentales de una Matriz

EJEMPLO

Hallar los subespacios Fila, Columna, Nulidad y Nulidad Izquierda de $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 3\\ 2 & -3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -2\end{pmatrix}$

4) $Nul\,I(A)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 / A^T.X=0_{4x1}\}$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & -3 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -5 & -5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad\begin{cases}x_1-x_3=0 \Rightarrow x_1=x_3\\ x_2+x_3=0 \Rightarrow x_2=-x_3\end{cases}$$

$\boxed{Nul\,I(A)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 / (x_1;x_2;x_3)=(x_3;-x_3;x_3)\}}$

$\boxed{B_{Nul\,I(A)}=\{\vec{t}=(1;-1;1)\}}$ $\boxed{dim(Nul\,I(A))=1}$

Subespacios Fundamentales de una Matriz

EJEMPLO

Hallar los subespacios Fila, Columna, Nulidad y Nulidad Izquierda de $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 3\\ 2 & -3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -2\end{pmatrix}$

Verificamos propiedades:

$$\begin{array}{ccccc} dim[Col(A)] & + & dim[Nul\,I(A)] & = & m\\ 2 & + & 1 & = & 3\end{array}$$

$Col(A)\perp Nul\,I(A)$:

$\langle \vec{w}_1;\vec{t}\rangle=\langle(1;1;0);(1;-1;1)\rangle=0$

$\langle \vec{w}_2;\vec{t}\rangle=\langle(0;1;1);(1;-1;1)\rangle=0$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 17.2: Hallar los subespacios fundamentales de $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

1) $Fil(B)=gen(\{(1;2;3);(1;2;3)\})$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & y_1\\ 2 & 2 & y_2\\ 3 & 3 & y_3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & y_1\\ 0 & 0 & y_2-2y_1\\ 0 & 0 & y_3-3y_1\end{array}\right)\begin{cases} y_2-2y_1=0 & \Rightarrow y_2=2y_1\\ y_3-3y_1=0 & \Rightarrow y_3=3y_1\end{cases}$$

$\boxed{Fil(B)=\{\vec{y}\in\mathbb{R}^3/(y_1;y_2;y_3)=(y_1;2y_1;3y_1)\}}$

$\boxed{B_{Fil(B)}=\{\vec{u}_1=(1;2;3)\}}$ $\boxed{dim(Fil(B))=1}$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 17.2: Hallar los subespacios fundamentales de $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

2) $Nul(B)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 / A.X=0_{2x1}\}$

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow x_1=-2x_2-3x_3$

$\boxed{Nul(B)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3/(x_1;x_2;x_3)=(-2x_2-3x_3;x_2;x_3)\}}$

$\boxed{B_{Nul(B)}=\{\vec{v}_1=(-2;1;0);\vec{v}_2=(-3;0;1)\}}$ $\boxed{dim(Nul(B))=2}$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 17.2: Hallar los subespacios fundamentales de $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

Verificamos propiedades:

$$\begin{array}{ccccc} dim[Fil(B)] & + & dim[Nul(B)] & = & n\\ 1 & + & 2 & = & 3\end{array}$$

$Fil(B)\perp Nul(B)$:

$\langle\vec{u}_1;\vec{v}_1\rangle=\langle(1;2;3);(-2;1;0)\rangle=0$

$\langle\vec{u}_1;\vec{v}_2\rangle=\langle(1;2;3);(-3;0;1)\rangle=0$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 17.2: Hallar los subespacios fundamentales de $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

3) $Col(B)=gen(\{(1;1)^T;(2;2)^T;(3;3)^T\})$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & | & y_1\\1 & 2 & 3 & | & y_2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & | & y_1\\0 & 0 & 0 & | & y_2-y_1\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow y_1=y_2$$

$\boxed{Col(B)=\{\vec{y}\in\mathbb{R}^2/(y_1;y_2)=(y_2;y_2)\}}$

$\boxed{B_{Col(B)}=\{\vec{w}=(1;1)\}}$ $\boxed{dim(Col(B))=1}$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 17.2: Hallar los subespacios fundamentales de $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

4) $Nul\,I(B)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^2/A^T.X=0_{3x1}\}$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 2\\3 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow x_1=-x_2$$

$\boxed{Nul\,I(B)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^2/(x_1;x_2)=(-x_2;x_2)\}}$

$\boxed{B_{Nul(B)}=\{\vec{t}=(-1;1)\}}$ $\boxed{dim(Nul\,I(B))=1}$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 17.2: Hallar los subespacios fundamentales de $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Verificamos propiedades:

$$\begin{array}{ccccc} dim[Col(B)] & + & dim[Nul\,I(B)] & = & m \\ 1 & + & 1 & = & 2 \end{array}$$

$Col(B) \perp Nul\,I(B)$:

$\langle \vec{w}\,;\vec{t}\,\rangle = \langle (1;1);(-1;1)\rangle = 0$