Álgebra y Geometría Analítica

Clase 25: El Proceso de Gram-Schmith

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

Unidad 4 – Clase 25

Repaso de las Clases Anteriores

En esta Unidad vimos:

- Definición de Espacios Vectoriales
- Subespacios Vectoriales: Las 4 condiciones suficientes
- Combinación Lineal
- Subespacio Generado
- Sistema Generador
- Dependencia e Independencia Lineal
- Base y Dimensión
- Norma Vectorial
- Producto Interior
- Ortogonalidad

Repaso de las Clases Anteriores

DEFINICIÓN: ESPACIO VECTORIAL

$(V;+;\mathbb{R};.)$ *es espacio vectorial si se cumple los* 10 *axiomas de espacios vectoriales*

AXIOMAS DE ESPACIOS VECTORIALES:

$\forall \vec{x} \in V, \forall \vec{y} \in V, \forall \vec{z} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}:$

A 1) Ley de composición interna: $(\vec{x}+\vec{y}) \in V$
A 2) Propiedad Conmutativa: $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$
A 3) Propiedad Asociativa: $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$
A 4) Existencia de elemento neutro: $\exists \vec{0} \in V / \vec{x}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{x}=\vec{x}$
A 5) Existencia de Simétrico (u opuesto): $\exists -\vec{x} \in V / \vec{x}+(-\vec{x})=(-\vec{x})+\vec{x}=\vec{0}$
A 6) Ley de composición externa: $\alpha\vec{x} \in V$
A 7) Propiedad Asociativa mixta: $(\alpha\beta)\vec{x}=\alpha(\beta\vec{x})$
A 8) Existencia de escalar neutro: $\exists 1 \in \mathbb{R} / 1.\vec{x}=\vec{x}$
A 9) Distributiva respecto de la suma de escalares: $(\alpha+\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{x}$
A10) Distributiva respecto de la suma de vectores: $\alpha(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$

Repaso de las Clases Anteriores

DEFINICIÓN: SUBESPACIO

$Si\ V\ es\ EV\ y\ S \subset V \wedge S \neq \emptyset \Rightarrow S\ es\ suebspacio\ de\ V \Leftrightarrow S\ cumple\ los\ 10\ axiomas\ de\ EV.$

CONDICIONES SUFICIENTES PARA QUE S SEA SUBESPACIO DE V:

I) $S \subset V$
II) $S \neq \emptyset$
III) LCI: $\forall \vec{x} \in S \wedge \forall \vec{y} \in S : (\vec{x} + \vec{y}) \in S$
IV) LCE: $\forall \vec{x} \in S \wedge \forall \alpha \in \mathbb{R} : (\alpha \vec{x}) \in S$

Repaso de las Clases Anteriores

COMBINACION LINEAL

Sea V espacio vectorial (EV) Se dice que un vector $\overline{v}$ de V es **combinación lineal** (CL) de un conjunto de vectores A, sí y solo sí existen escalares tales que: $\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n$

Simbólicamente:
$Sea\ V\ EV.\ Sea\ A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, A \neq \emptyset, A \subset V.$

$$\vec{v} \in V\ es\ CL\ de\ A \Leftrightarrow \exists\, \alpha_i \in \mathbb{R} / \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . \vec{v}_i$$

Para tener en cuenta: Cuando se busca verificar que un vector es CL de A, se obtiene un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son los escalares de la CL.

Si el sistema es SC ==> los escalares existen y la CL es posible

Si el sistema es SI ==> no existen los escalares, y la CL no es posible

Repaso de las Clases Anteriores

SUBESPACIO GENERADO

Sea V EV y el conjunto de vectores A = $\{\overline{v}_1, \overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n\}$. Llamaremos **subespacio generado por A** al conjunto de todos los vectores que se pueden escribir como CL de los vectores de A.

Simbólicamente:

$gen(A)=S$ (S es el subespacio generado por A)

$$S=gen(A)=\{\vec{x}\in V / \vec{x}=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i\} \; (\vec{x} \text{ es CL de A})$$

Repaso de las Clases Anteriores

SISTEMA GENERADOR

Sea V EV y el conjunto de vectores A = $\{\overline{v}_1, \overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n\}$ con A ⊂ V. Diremos que **A es un sistema generador de V** sí y solo sí para todo vector $\overline{v}$ ∈ V, $\overline{v}$ se puede expresar como CL de los vectores de A.

Simbólicamente:

$$A \text{ es SG de } V \Leftrightarrow \forall \vec{v}\in V : \vec{v}=\alpha_1 \vec{v}_1+\alpha_2 \vec{v}_{2 \ldots} \alpha_n \vec{v}_n$$

Si un conjunto A no alcanza a generar todo el EV, no será sistema generador (SG) de V, sino de un subespacio de V.

Repaso de las Clases Anteriores

INDEPENDENCIA LINEAL

Sea V EV y el conjunto de vectores A = $\{\bar{v}_1, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ con $A \subset V$
Diremos que **A es Linealmente Independiente (LI)** sí y solo sí la CL de los vectores de A igualada al vector nulo se verifica solo si todos los escalares αi son nulos.

$$A\ es\ LI \Leftrightarrow \vec{0}=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2\dots\alpha_n\vec{v}_n \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$$

Del mismo modo diremos que **A es Linealmente Dependiente (LD)** sí y solo sí la CL de los vectores de A igualada al vector nulo se verifica con al menos un escalar αi no nulo.

$$A\ es\ LD \Leftrightarrow \vec{0}=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2\dots\alpha_n\vec{v}_n \Rightarrow \alpha_1\neq 0 \vee \alpha_2\neq 0 \vee \dots \vee \alpha_n\neq 0$$

$$\vec{0}=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2\dots\alpha_n\vec{v}_n \begin{array}{l} \nearrow \alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0 \ \text{(CL única): A es LI} \\ \searrow \alpha_1\neq 0 \vee \alpha_2\neq 0 \vee \dots \alpha_n\neq 0 \ \text{(CL múltiple): A es LD} \end{array}$$

Repaso de las Clases Anteriores

BASE

Definición:
Un conjunto de vectores B de un espacio vectorial V constituye una **base** de dicho espacio vectorial sí y solo sí, B es linealmente independiente y B es sistema generador para el espacio vectorial.

$$V\ EV, B\subset V$$
$$B \text{ es Base de } V \Leftrightarrow B\ es\ LI \wedge V=gen(B)$$

DIMENSIÓN DE UN EV

La **dimensión de un espacio vectorial** es la cantidad de vectores que forman una base del espacio vectorial.

$$V\ EV,\ B\subset V, B \text{ Base de } V \Rightarrow dim(V)=\#(B)$$

Repaso de las Clases Anteriores

NORMA VECTORIAL: DEFINICIÓN

$$f : V \rightarrow \mathbb{R} / \forall \vec{x} \in V : f(\vec{x}) = ||\vec{x}|| \in \mathbb{R}$$

NORMAS CONOCIDAS:

Norma de Orden 1:

$$||\vec{x}||_1 = \sum |x_i| \Rightarrow ||\vec{x}||_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$$

Norma de Orden 2 (Norma Euclídea):

$$||\vec{x}||_2 = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Norma de Orden Infinito:

$$||\vec{x}||_\infty = max\{\ |x_i|\ \}_{i=1}^{n}$$

Repaso de las Clases Anteriores

NORMA VECTORIAL: PROPIEDADES

1) $||\vec{x}|| \geq 0 \ \wedge \ \left(||\vec{x}|| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}\right)$

2) $||\alpha \vec{x}|| \ = \ |\alpha| . ||\vec{x}||$

3) $||\vec{x} + \vec{y}|| \ \leq \ ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$

Repaso de las Clases Anteriores

PRODUCTO INTERIOR: DEFINICIÓN

Sea (V ; + ; R ;) espacio vectorial EV El **producto interior** es una función $f : VxV \rightarrow R$ tal que si $\overline{u} \in V$, $\overline{v} \in V$: $f(\overline{u} ; \overline{v}) = < \overline{u} ; \overline{v} > \in R$, satisface los siguientes axiomas:

$\forall \vec{u} \in V , \forall \vec{v} \in V , \forall \vec{w} \in V , \forall h \in \mathbb{R}$

A1) Condición de Simetría: $< \overline{u} ; \overline{v} > = < \overline{v} ; \overline{u} >$ (Prop Conmutativa)

A2) Condición de Aditividad: $< \overline{u} + \overline{v} ; \overline{w} > = < \overline{u} ; \overline{w} > + < \overline{v} ; \overline{w} >$ (Prop Distributiva)

A3) Condición de Homogeneidad: $< h\overline{u} ; \overline{v} > = h < \overline{v} ; \overline{u} >$ (Prop Asociativa Mixta)

A4) Condición de Positividad: $< \overline{u} ; \overline{u} > \geq 0 \wedge [< \overline{u} ; \overline{u} > = 0 \Longleftrightarrow \overline{u} = \overline{0}$ (Elemento neutro)]

Repaso de las Clases Anteriores

ORTOGONALIDAD: DEFINICIONES

Sea V EV con PI (Producto Interior). $\forall \vec{x} \in V \wedge \forall \vec{y} \in V$ con: $\vec{x} \neq \vec{0} \wedge \vec{y} \neq \vec{0}$.
$S_1 \subset V \wedge S_2 \subset V \wedge S_1 \neq \emptyset \wedge S_2 \neq \emptyset$

1) Dos vectores son ortogonales: $\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow <\vec{x} ; \vec{y}> = 0$
2) Un vector con un Subespacio son ortogonales: $\vec{x} \perp S_1 \Leftrightarrow \forall \vec{v}_i \in S_1 : <\vec{x} ; \vec{v}_1> = 0$
3) Dos Subespacios son ortogonales: $S_1 \perp S_2 \Leftrightarrow \forall \vec{v}_i \in S_1 \wedge \forall \vec{w}_j \in S_2 : <\vec{v}_i ; \vec{w}_j> = 0$
4) Conjunto Ortogonal: $A = \{\vec{v}_1 ; \vec{v}_2 ; \ldots ; \vec{v}_n\} \subset V . A \; es \; ortogonal \; si : <\vec{v}_i ; \vec{v}_j> = 0 \; \; si \; i \neq j$
5) Base Ortogonal: $Sea \; B = \{\vec{v}_1 ; \vec{v}_2 ; \ldots ; \vec{v}_n\}$
   $B \; es \; Base \; Ortogonal \Leftrightarrow B \; es \; conjunto \; ortogonal \wedge B \; es \; Base \; de \; V .$

Repaso de las Clases Anteriores

ORTOGONALIDAD: TEOREMA 1

Dado un conjunto ortogonal $A=\{\vec{v}_1;\vec{v}_2;\ldots;\vec{v}_m\}$ incluido en un EV V con PI, $A\subset V$, entonces dicho conjunto resulta LI.

ORTOGONALIDAD: TEOREMA 2

Sea $B=\{\vec{v}_1;\vec{v}_2;\ldots;\vec{v}_n\}$ una base ortogonal de un EV V con PI, todo vector $\vec{x}\subset V$ puede escribirse como: $\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\frac{<\vec{x};\vec{v}_i>}{<\vec{v}_i;\vec{v}_i>}\vec{v}_i$

Repaso de las Clases Anteriores

CONJUNTO ORTONORMAL

$A=\{v_1;v_2;\ldots;v_n\}\subset V$ *es un conjunto ortonormal si cumple*:

$<\vec{v}_i;\vec{v}_j>=0$ si $i\neq j$

$<\vec{v}_i;\vec{v}_j>=||\vec{v}_1||^2=1, si\ i=j$

BASE ORTONORMAL

$B=\{v_1;v_2;\ldots;v_n\}\subset V$, B es base ortonormal $\Leftrightarrow B$ *es base* $\wedge$ B *es conjunto ortonormal*.

Esto es: B *es* $LI \wedge V=gen(B)$ (B es LI)

$<\vec{v}_i;\vec{v}_j>=0$ si $i\neq j \wedge <\vec{v}_i;\vec{v}_j>=||\vec{v}_1||^2=1, si\ i=j$ (B es conjunto Ortonormal)

ORTONORMALIDAD: COROLARIO

Si $B=\{v_1;v_2;\ldots;v_n\}$ es base ortonormal de $V\Rightarrow\forall\,\vec{x}\in V,\vec{x}$ puede escribirse:

$$\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}<\vec{x};\vec{v}_i>\vec{v}_i$$

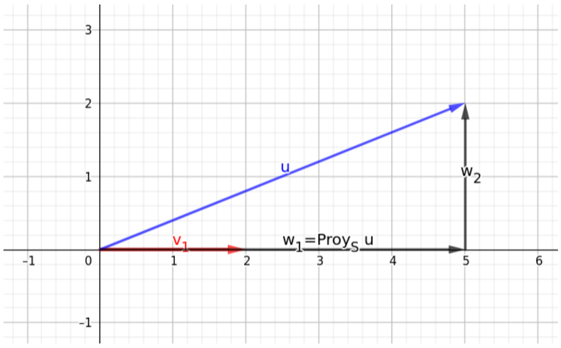
$$\vec{x}=<\vec{x};\vec{v}_1>\vec{v}_1+<\vec{x};\vec{v}_2>\vec{v}_2+\ldots+<\vec{x};\vec{v}_n>\vec{v}_n$$

Proyección Ortogonal

DEFINICIÓN (PROYECCION Y COMPONENTE ORTOGONAL)

Sea $(V;+;\mathbb{R};.)$ espacio vectorial con PI.
Sea $B=\{\vec{v}_1;\vec{v}_2;...;\vec{v}_n\}$ una base ortonormal (es decir: $\langle \vec{v}_i;\vec{v}_j\rangle=\delta_{i,j}$).
Sea $B'=\{\vec{v}_1;\vec{v}_2;...;\vec{v}_r\}\, con\, r\leq n$, y sea el subespacio $S=gen(B')$:
$\forall\, \vec{u}\in V:\vec{u}$ puede expresarse:

$$\vec{u}=\vec{w}_1+\vec{w}_2 \quad (\text{con } \vec{w}_1\in S\wedge\vec{w}_2\perp S).$$



Proyección Ortogonal

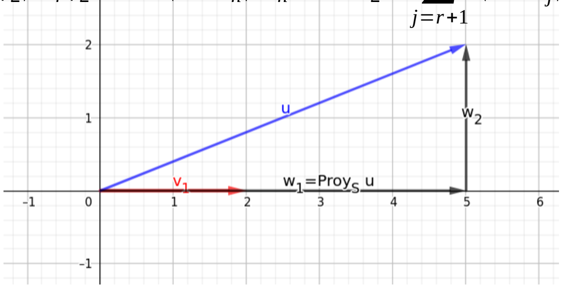
DEFINICIÓN (PROYECCION Y COMPONENTE ORTOGONAL)

El vector $\vec{w}_1$ es la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre S y se denota: $\vec{w}_1=proy_S\vec{u}$
El vector $\vec{w}_2=\vec{u}-proy_S\vec{u}$ es la componente de $\vec{u}$ ortogonal a S.

$$\vec{w}_1=\langle\vec{u};\vec{v}_1\rangle\vec{v}_1+\langle\vec{u};\vec{v}_2\rangle\vec{v}_2+...+\langle\vec{u};\vec{v}_r\rangle\vec{v}_r \quad \Rightarrow\vec{w}_1=\sum_{i=1}^{i=r}\langle\vec{u};\vec{v}_i\rangle v_i \quad i\in[1;r] \quad (\vec{w}_1\in S)$$

$$\vec{w}_2=\vec{u}-\langle\vec{u};\vec{v}_1\rangle\vec{v}_1-\langle\vec{u};\vec{v}_2\rangle\vec{v}_2-...-\langle\vec{u};\vec{v}_r\rangle\vec{v}_r$$

$$\vec{w}_2=\langle\vec{u};\vec{v}_{r+1}\rangle\vec{v}_{r+1}+\langle\vec{u};\vec{v}_{r+2}\rangle\vec{v}_{r+2}+...+\langle\vec{u};\vec{v}_n\rangle\vec{v}_n \quad \Rightarrow\vec{w}_2=\sum_{j=r+1}^{j=n}\langle\vec{u};\vec{v}_j\rangle v_j \quad j\in[r+1;n] \quad (\vec{w}_2\in S^{\perp})$$



Proyección Ortogonal

EJEMPLO

$V \equiv \mathbb{R}^3$

a) S subespacio: una recta r y $S^{\perp}$ subespacio complemento ortogonal de S (un plano $\pi \perp r$)

$\vec{w}_1 = \alpha \vec{v}_1 = \langle \vec{u} ; \vec{v}_1 \rangle \vec{v}_1 \qquad (w_1 \in S)$

$\vec{w}_2 = \vec{u} - \vec{w}_1 = \langle \vec{u} ; \vec{v}_2 \rangle \vec{v}_2 + \langle \vec{u} ; \vec{v}_3 \rangle \vec{v}_3 \quad (w_2 \in S^{\perp})$

b) S subespacio: un plano π y $S^{\perp}$ subespacio complemento ortogonal de S (una recta $r \perp \pi$)

$\vec{w}_1 = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 = \langle \vec{u} ; \vec{v}_1 \rangle \vec{v}_1 + \langle \vec{u} ; \vec{v}_2 \rangle \vec{v}_2 \quad (w_1 \in S)$

$\vec{w}_2 = \vec{u} - \vec{w}_1 = \langle \vec{u} ; \vec{v}_3 \rangle \vec{v}_3 \qquad (w_2 \in S^{\perp})$

Recordar que: $\vec{u} = \langle \vec{u} ; \vec{v}_1 \rangle \vec{v}_1 + \langle \vec{u} ; \vec{v}_2 \rangle \vec{v}_2 + \langle \vec{u} ; \vec{v}_3 \rangle \vec{v}_3$ con: $A = \{ v_1 ; v_2 ; v_3 \}$ base ortonormal de V

El Proceso de Gram Schmidt

El procedimiento de Gram-Schmidt es un algoritmo simple para obtener una base ortonormal a partir de otra base que no lo es.

Todo espacio con producto interior de dimensión finita, no nula, tiene una base ortonormal.

Sea V EV con PI de dimensión finita n. Sea $B = \{ \vec{u}_1 ; \vec{u}_2 ; \dots ; \vec{u}_n \}$ una base de V.

La sucesiva secuencia de operaciones producirá otra base de V ortonormal:

$$B' = \{ \vec{v}_1 ; \vec{v}_2 ; \dots ; \vec{v}_n \} \text{ una base ortonormal de } V .$$

El Proceso de Gram Schmidt

ALGORITMO

1) Tomamos $\vec{v}_1 = \frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|} = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}$ (primer vector de la nueva base ortonormal)

2) Para obtener $\vec{v}_2$ (segundo vector de la base ortonormal), se calcula la componente de $\vec{u}_2$ ortogonal al subespacio S_1 generado por $\vec{v}_1 \left(\vec{w}_2 = \vec{u}_2 - proy_{S1}\vec{u}_2\right)$ y se normaliza:

$$\vec{v}_2 = \frac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|} = \frac{\vec{u}_2 - proy_{S1}\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2 - proy_{S1}\vec{u}_2\|} = \frac{\vec{u}_2 - \langle\vec{u}_2;\vec{v}_1\rangle\vec{v}_1}{\|\vec{u}_2 - \langle\vec{u}_2;\vec{v}_1\rangle\vec{v}_1\|} \quad \text{(con: } \|\vec{v}_2\| = 1 \wedge \vec{v}_2 \perp \vec{v}_1\text{)}$$

3) Para construir el tercer vector de la base ortonormal $\vec{v}_3$ (con $\|\vec{v}_3\| = 1 \wedge \vec{v}_3 \perp \vec{v}_1 \wedge v_3 \perp \vec{v}_2$), se calcula la componente de $\vec{u}_3$ ortogonal al subespacio S_2 generado por $\{\vec{v}_1;\vec{v}_2\}$, $\left(\vec{w}_3 = \vec{u}_3 - proy_{S2}\vec{u}_3\right)$ y se normaliza.

$$\vec{v}_3 = \frac{\vec{w}_3}{\|\vec{w}_3\|} = \frac{\vec{u}_3 - proy_{S2}\vec{u}_3}{\|\vec{u}_3 - proy_{S2}\vec{u}_3\|} = \frac{\vec{u}_3 - \langle\vec{u}_3;\vec{v}_1\rangle\vec{v}_1 - \langle\vec{u}_3;\vec{v}_2\rangle\vec{v}_2}{\|\vec{u}_3 - \langle\vec{u}_3;\vec{v}_1\rangle\vec{v}_1 - \langle\vec{u}_3;\vec{v}_2\rangle\vec{v}_2\|}$$

En general: $\vec{v}_n = \frac{\vec{w}_n}{\|\vec{w}_n\|}$ con: $\vec{w}_n = \vec{u}_n - Proy_{S_{n-1}}\vec{u}_n \Rightarrow B' = \{\vec{v}_1;\vec{v}_2;\ldots;\vec{v}_n\}$ base ortonormal de V.

El Proceso de Gram Schmidt

EJEMPLO

Sea el siguiente conjunto $B \in \mathbb{R}^3, B = \{\vec{u}_1 = (1;-1;0); \vec{u}_2 = (1;2;-1); \vec{u}_3 = (0;1,-1)\}$

a) ¿Es B base de R^3?

b) Hallar una base ortonormal B' de $\mathbb{R}^3$ a partir de B.

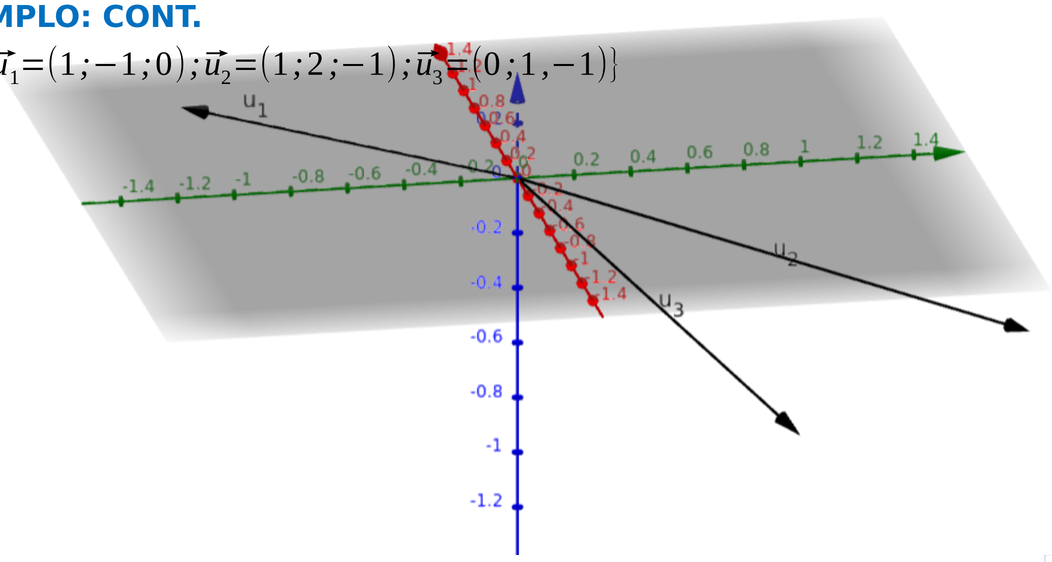
a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow B\ es\ LI$$

Como $\#B = 3 \wedge B\ es\ LI \Rightarrow B\ es\ una\ base\ de\ \mathbb{R}^3$

El Proceso de Gram Schmidt

EJEMPLO: CONT.

$B=\{\vec{u}_1=(1;-1;0);\vec{u}_2=(1;2;-1);\vec{u}_3=(0;1,-1)\}$



El Proceso de Gram Schmidt

EJEMPLO: CONT.

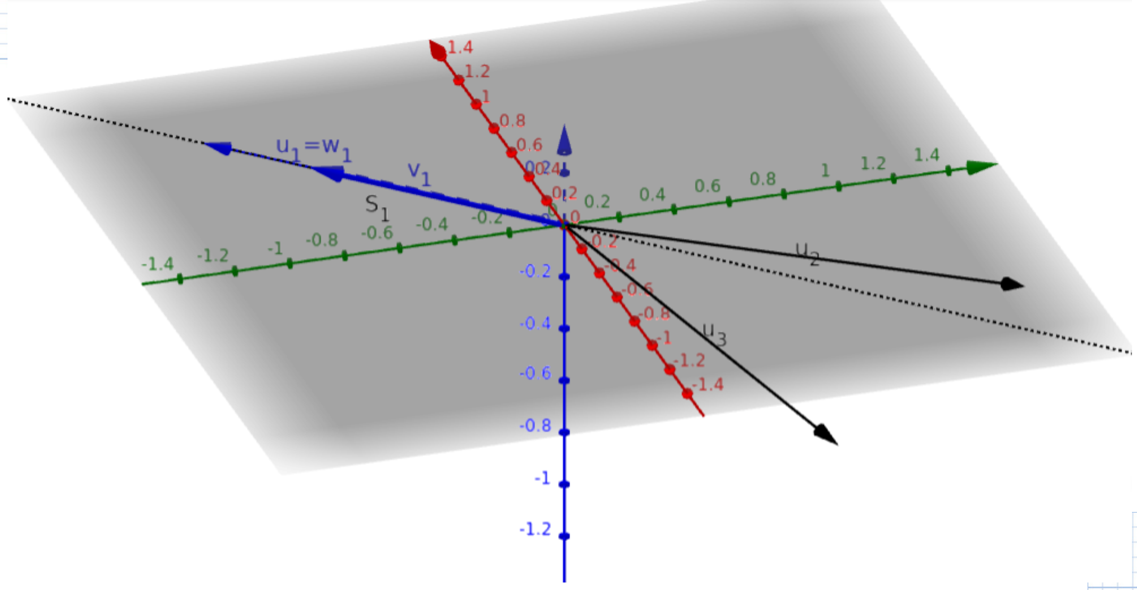
$B=\{\vec{u}_1=(1;-1;0);\vec{u}_2=(1;2;-1);\vec{u}_3=(0;1,-1)\}$

b) Hallamos el primer vector de la base B': $\vec{v}_1$:

$$\vec{v}_1=\frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|}=\frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1;-1;0)\Rightarrow \boxed{\vec{v}_1=(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{-1}{\sqrt{2}};0)}$$

verifico que $\|\vec{v}_1\|=1:\|\vec{v}_1\|=\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}^2+\frac{(-1)}{\sqrt{2}}^2+0^2}=1$

El Proceso de Gram Schmidt



El Proceso de Gram Schmidt

EJEMPLO: CONT.

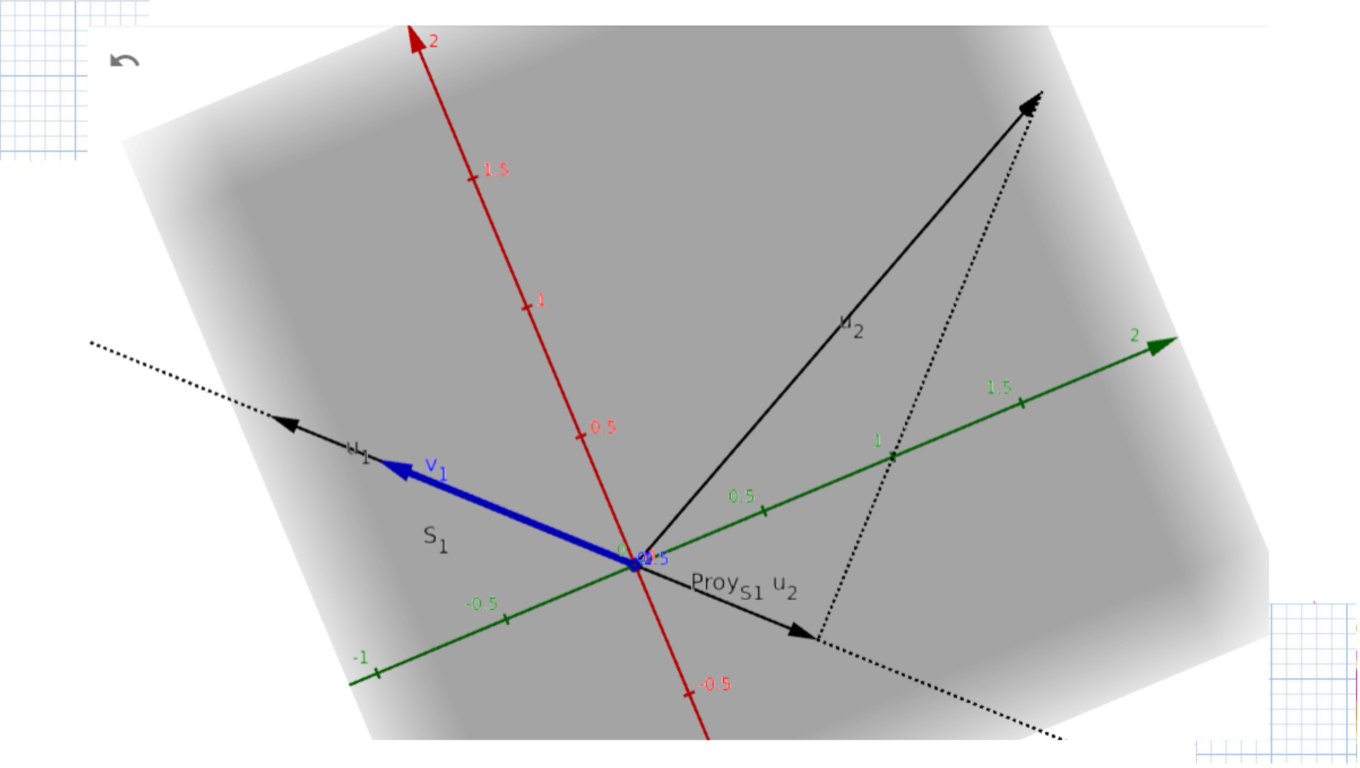
El segundo vector de la base:

$$\vec{w}_2=\vec{u}_2-\langle\vec{u}_2;\vec{v}_1\rangle\,\vec{v}_1=(1;2;-1)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{-1}{\sqrt{2}};0\right)=(1;2;-1)-\underbrace{\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{2};0\right)}_{Proy_{S1}\vec{u}_2}$$

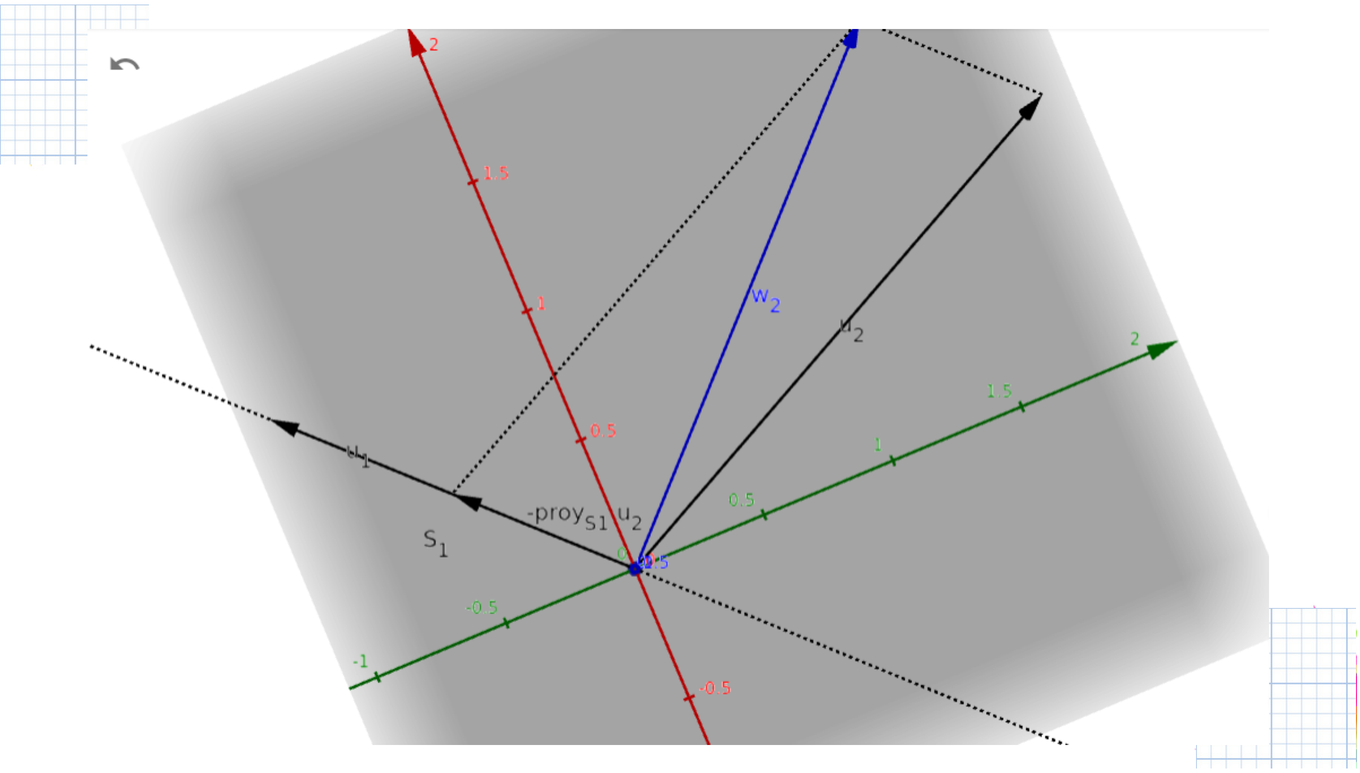
$$\vec{w}_2=\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};-1\right)\wedge\langle\vec{v}_1;\vec{w}_2\rangle=\frac{3}{2\sqrt{2}}-\frac{3}{2\sqrt{2}}+0=0\Rightarrow\vec{v}_1\perp\vec{w}_2$$

$$\|\vec{w}_2\|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}+1}=\sqrt{\frac{22}{4}}$$

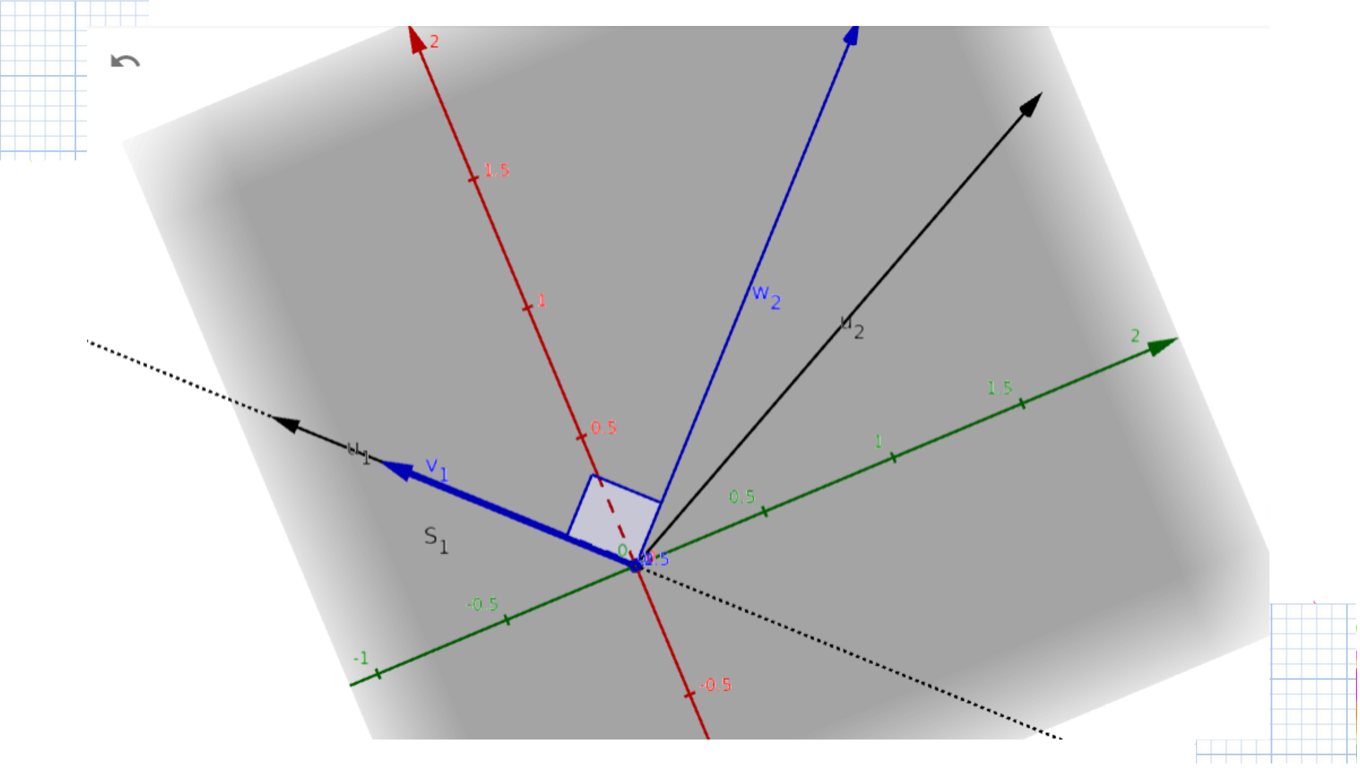
$$\vec{v}_2=\frac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|}=\frac{2}{\sqrt{22}}\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};-1\right)\Rightarrow\boxed{\vec{v}_2=\left(\frac{3}{\sqrt{22}};\frac{3}{\sqrt{22}};\frac{-2}{\sqrt{22}}\right)}$$



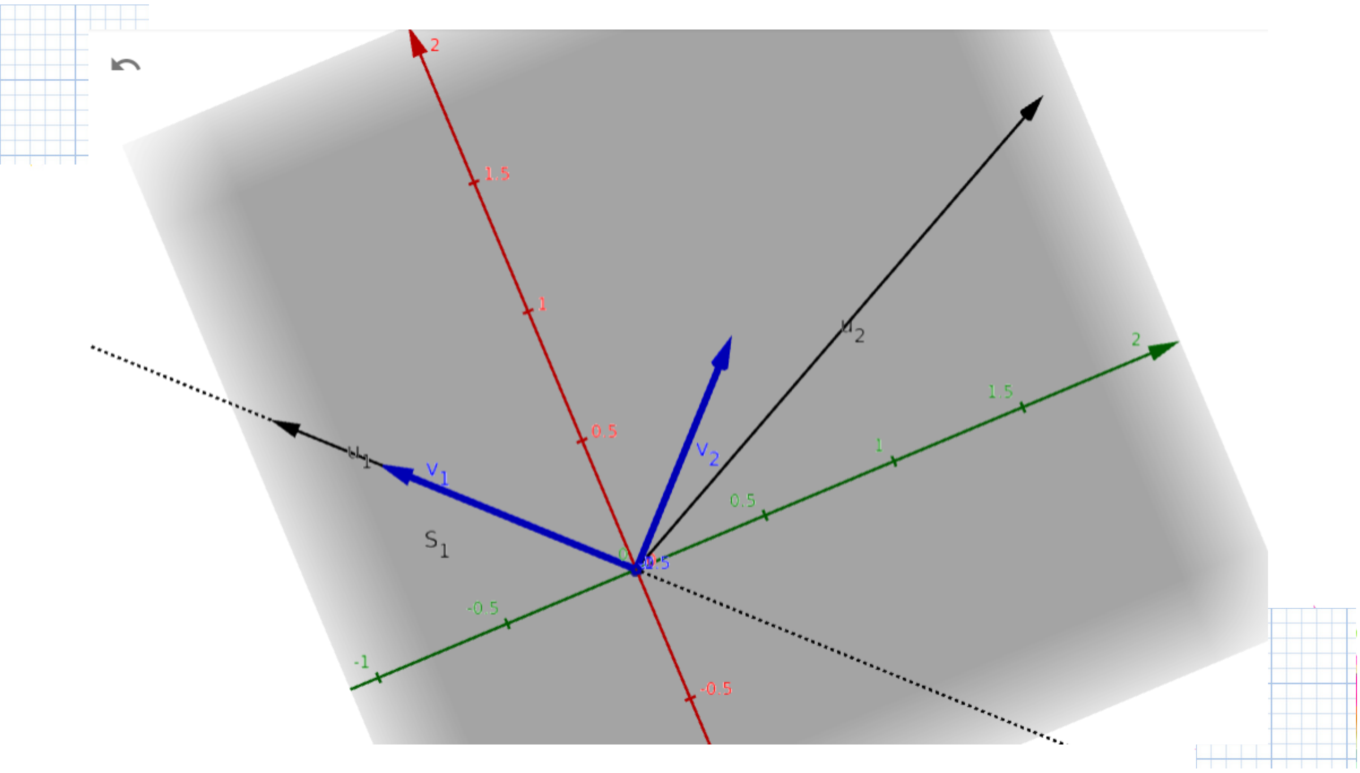
u2
u1
v1
S1
Proy S1 u2



w2
u2
u1
-proy S1 u2
S1



2
1.5
1
0.5
-0.5
w_2
u_2
u_1
v_1
S_1
-1



2
1.5
1
0.5
-0.5
u_2
v_2
u_1
v_1
S_1
-1

El Proceso de Gram Schmidt

EJEMPLO: CONT.

El tercer vector de la base:

$$\vec{w}_3=\vec{u}_3-\langle\vec{u}_3;\vec{v}_1\rangle\vec{v}_1-\langle\vec{u}_3;\vec{v}_2\rangle\vec{v}_2$$

$$\vec{w}_3=(0;1;-1)-\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right).\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{-1}{\sqrt{2}};0\right)-\frac{5}{\sqrt{22}}\left(\frac{3}{\sqrt{22}};\frac{3}{\sqrt{22}};\frac{-2}{\sqrt{22}}\right)$$

$$\vec{w}_3=(0;1;-1)+\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0\right)+\left(\frac{-15}{22};\frac{-15}{22};\frac{10}{22}\right)=(0,1,-1)-\underbrace{\left(\frac{2}{11},\frac{13}{11},\frac{-5}{11}\right)}_{Proy_{S2}\vec{u}_3}$$

$$\vec{w}_3=\left(\frac{-2}{11};\frac{-2}{11};\frac{-6}{11}\right)$$

$$\langle\vec{w}_3;\vec{v}_1\rangle=\frac{-2}{11\sqrt{22}}+\frac{2}{11\sqrt{22}}+0=0\Rightarrow\vec{w}_3\perp\vec{v}_1$$

$$\langle\vec{w}_3;\vec{v}_2\rangle=\frac{-6}{11\sqrt{22}}-\frac{6}{11\sqrt{22}}+\frac{12}{11\sqrt{22}}=0\Rightarrow\vec{w}_3\perp\vec{v}_2$$

El Proceso de Gram Schmidt

EJEMPLO: CONT.

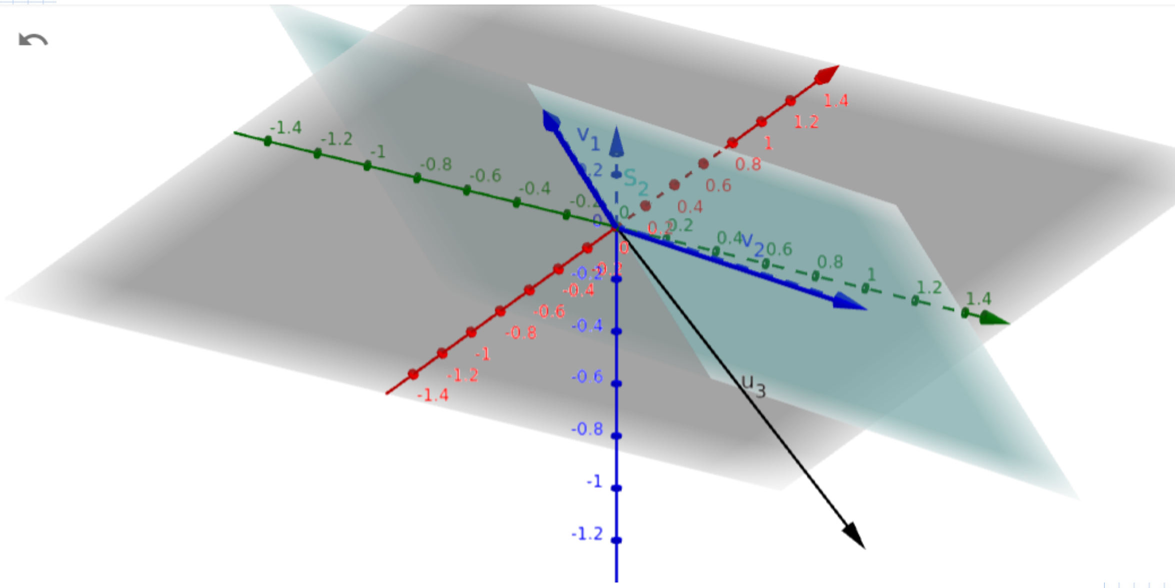
Y además: $\|\vec{w}_3\|=\sqrt{\frac{4}{121}+\frac{4}{121}+\frac{36}{121}}=\sqrt{\frac{44}{121}}=\sqrt{\frac{4}{11}}=\frac{2}{\sqrt{11}}$

$$\frac{1}{\|\vec{w}_3\|}=\frac{\sqrt{11}}{2}=\frac{11}{2\sqrt{11}}$$

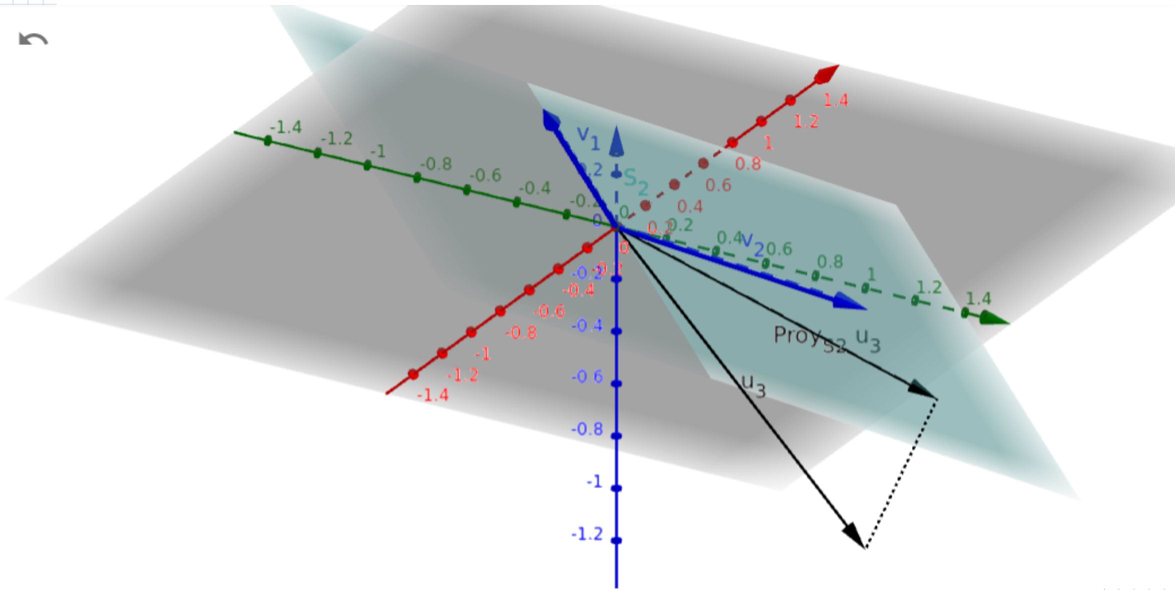
$$\vec{v}_3=\frac{\vec{w}_3}{\|\vec{w}_3\|}=\frac{11}{2\sqrt{11}}\left(\frac{-2}{11};\frac{-2}{11};\frac{-6}{11}\right)\Rightarrow\boxed{\vec{v}_3=\left(\frac{-1}{\sqrt{11}};\frac{-1}{\sqrt{11}};\frac{-3}{\sqrt{11}}\right)}$$

con: $\|\vec{v}_3\|=\sqrt{\frac{1}{11}+\frac{1}{11}+\frac{9}{11}}=1$

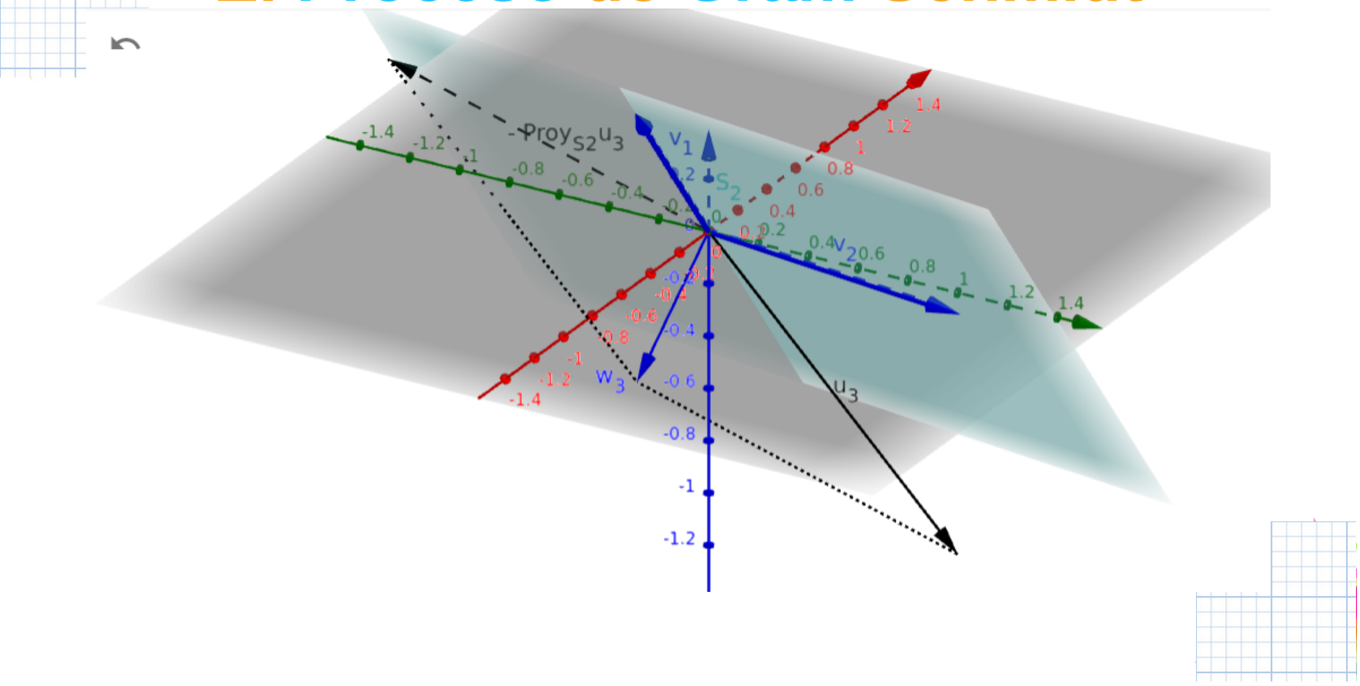
El Proceso de Gram Schmidt



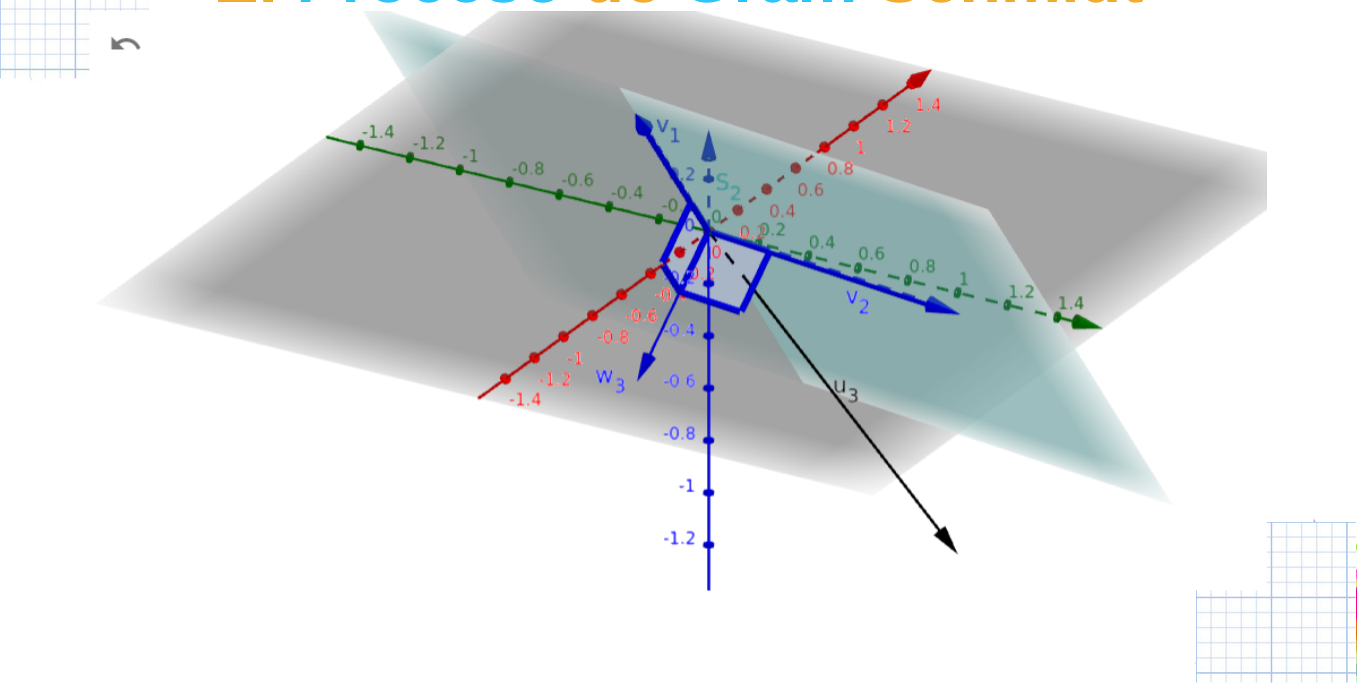
El Proceso de Gram Schmidt



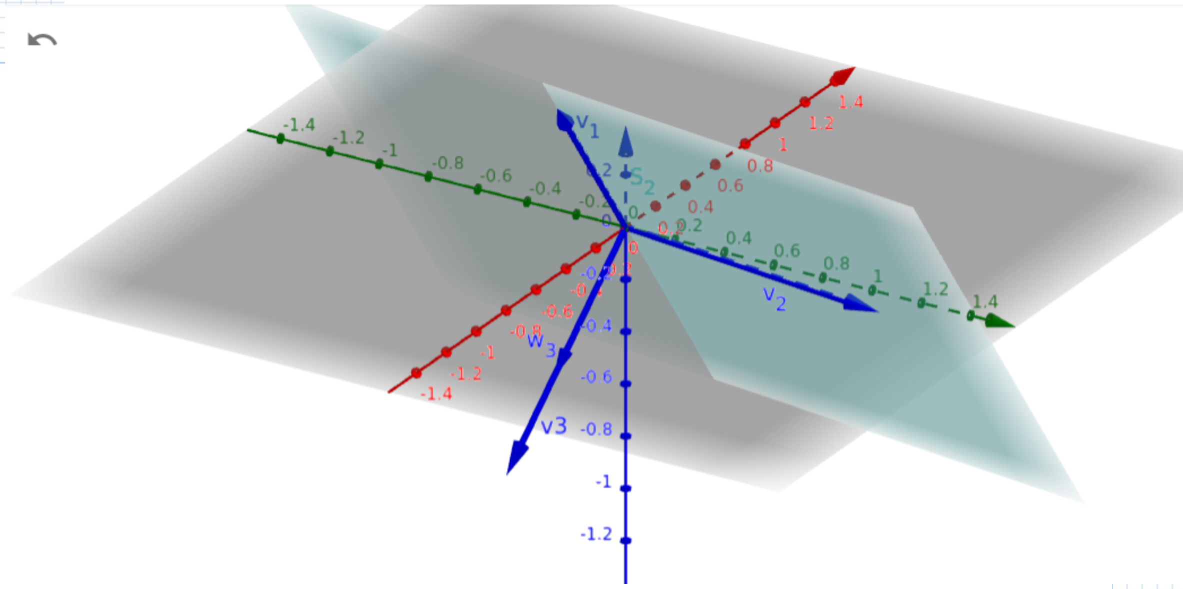
El Proceso de Gram Schmidt



El Proceso de Gram Schmidt



El Proceso de Gram Schmidt



El Proceso de Gram Schmidt

EJEMPLO: CONT.

Y además: $\|\vec{w}_3\|=\sqrt{\frac{4}{121}+\frac{4}{121}+\frac{36}{121}}=\sqrt{\frac{44}{121}}=\sqrt{\frac{4}{11}}=\frac{2}{\sqrt{11}}$

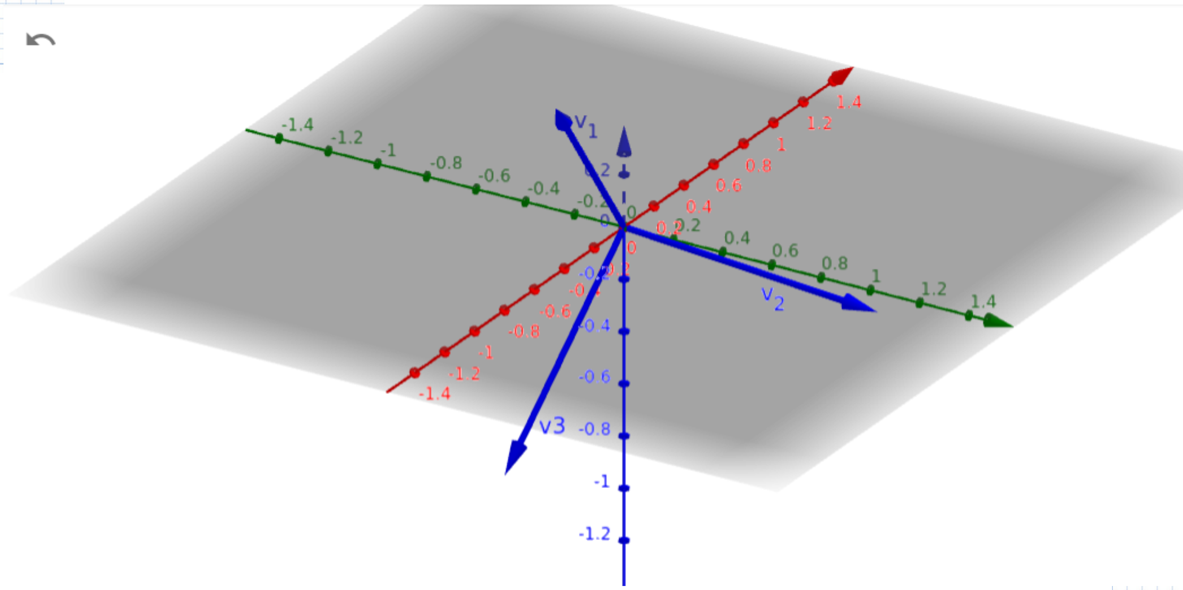
$$\frac{1}{\|\vec{w}_3\|}=\frac{\sqrt{11}}{2}=\frac{11}{2\sqrt{11}}$$

$$\vec{v}_3=\frac{\vec{w}_3}{\|\vec{w}_3\|}=\frac{11}{2\sqrt{11}}\left(\frac{-2}{11};\frac{-2}{11};\frac{-6}{11}\right)\Rightarrow\boxed{\vec{v}_3=\left(\frac{-1}{\sqrt{11}};\frac{-1}{\sqrt{11}};\frac{-3}{\sqrt{11}}\right)}$$

con: $\|\vec{v}_3\|=\sqrt{\frac{1}{11}+\frac{1}{11}+\frac{9}{11}}=1$

Finalmente: $\boxed{B'=\left\{\vec{v}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{-1}{\sqrt{2}};0\right);\vec{v}_2=\left(\frac{3}{\sqrt{22}};\frac{3}{\sqrt{22}};\frac{-2}{\sqrt{22}}\right);\vec{v}_3=\left(\frac{-1}{\sqrt{11}};\frac{-1}{\sqrt{11}};\frac{-3}{\sqrt{11}}\right)\right\}}$

El Proceso de Gram Schmidt



Ejercicios de la Guía

Ejercicio 15:

Sea el subespacio $S=\{(x_1;x_2;x_3)\in set\ R^3/x_1-x_2+x_3=0\}$ y los vectores $\vec{a}=(1;2;1),\vec{b}=(3;-2;4)$

a) Hallar una base ortonormal para S

$\vec{X}=(x_1;x_2;x_3)\in S\Rightarrow x_2=x_1+x_3$

$\vec{X}=(x_1;x_1+x_3;x_3)=x_1(1;1;0)+x_3(0;1;1)$

Parametrizo con λ y μ: $\vec{X}=\lambda(1;1;0)+\mu(0;1;1)\quad\forall\lambda\in\mathbb{R},\forall\mu\in\mathbb{R}$

Luego: una base de S es $B=\{\vec{u}_1=(1;1;0);\vec{u}_2=(0;1;1)\}$

Ortonormalización: PGS

$$\vec{v}_1=\frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|}=\frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1;1;0)\Rightarrow\boxed{\vec{v}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)}\ \text{con } \|\vec{v}_1\|=1$$

$$\vec{v}_2=\frac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|}=\frac{\vec{u}_2-\langle\vec{u}_2;\vec{v}_1\rangle\vec{v}_1}{\|\vec{u}_2-\langle\vec{u}_2;\vec{v}_1\rangle\vec{v}_1\|}=\frac{(0;1;1)-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)}{\left\|(0;1;1)-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)\right\|}=\frac{1}{\left\|\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{2};1\right)\right\|}\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{2};1\right)$$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 15.a: CONT.

$$\vec{v}_2=\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{2};1\right)\Rightarrow\vec{v}_2=\left(\frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}};\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}};\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\Rightarrow\boxed{\vec{v}_2=\left(\frac{-1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}}\right)}$$

Con $\|\vec{v}_2\|=1$, y además: $\langle\vec{v}_1;\vec{v}_2\rangle=\langle\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right);\left(\frac{-1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\rangle=0$

Luego: $B'=\left\{\vec{v}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right);\vec{v}_2=\left(\frac{-1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\}$ Es base ortonormal

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 15:

15.b. Hallar las coordenadas de a en términos de la base hallada.

$$\vec{a}=\langle\vec{a};\vec{v}_1\rangle\vec{v}_1+\langle\vec{a};\vec{v}_2\rangle\vec{v}_2$$

$$\vec{a}=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2$$

$$\alpha_1=\langle(1;2;1);\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)\rangle=\frac{\sqrt{2}}{2}+2.\frac{\sqrt{2}}{2}+1.0=3\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha_2=\langle(1;2;1);\left(\frac{-\sqrt{6}}{6};\frac{\sqrt{6}}{6};2\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\rangle=\frac{-\sqrt{6}}{6}+2.\frac{\sqrt{6}}{6}+2\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Luego:

$$\vec{a}=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2$$

$$\vec{a}=3\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)+\frac{\sqrt{6}}{2}\left(\frac{-\sqrt{6}}{6};\frac{\sqrt{6}}{6};\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};0\right)+\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{2};1\right)\Rightarrow\boxed{\vec{a}=(1;2;1)}$$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 15:

15.c. Hallar la proyección ortogonal del vector b sobre S

$$Proy_S \vec{b} = \langle \vec{b} ; \vec{v}_1 \rangle \vec{v}_1 + \langle \vec{b} ; \vec{v}_2 \rangle \vec{v}_2 = \vec{w}_1$$

$$\langle \vec{b} ; \vec{v}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle \vec{b} ; \vec{v}_2 \rangle = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

$$\vec{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{1}{\sqrt{2}} ; 0 \right) + \frac{3}{\sqrt{6}} \left(\frac{-1}{\sqrt{6}} ; \frac{1}{\sqrt{6}} ; \frac{2}{\sqrt{6}} \right) = \left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 0 \right) + \left(\frac{-1}{2} ; \frac{1}{2} ; 1 \right) \Rightarrow \boxed{\vec{w}_1 = (0 ; 1 ; 1)}$$