

Álgebra y Geometría Analítica

Clase 24: Ortogonalidad



Unidad 4 – Clase 24

01 Repaso de clases anteriores

02 Ortogonalidad

03 Ortonormalidad

04 Ejercicios de la Guía

Repaso de las Clases Anteriores

DEFINICIÓN: ESPACIO VECTORIAL

$(V; +; \mathbb{R}; \cdot)$ es espacio vectorial si se cumple los 10 axiomas de espacios vectoriales

AXIOMAS DE ESPACIOS VECTORIALES:

$\forall \vec{x} \in V, \forall \vec{y} \in V, \forall \vec{z} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}$:

A 1) Ley de composición interna: $(\vec{x} + \vec{y}) \in V$

A 2) Propiedad Conmutativa: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$

A 3) Propiedad Asociativa: $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$

A 4) Existencia de elemento neutro: $\exists \vec{0} \in V / \vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$

A 5) Existencia de Simétrico (u opuesto): $\exists -\vec{x} \in V / \vec{x} + (-\vec{x}) = (-\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0}$

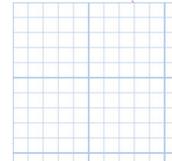
A 6) Ley de composición externa: $\alpha \vec{x} \in V$

A 7) Propiedad Asociativa mixta: $(\alpha\beta) \vec{x} = \alpha(\beta \vec{x})$

A 8) Existencia de escalar neutro: $\exists 1 \in \mathbb{R} / 1 \vec{x} = \vec{x}$

A 9) Distributiva respecto de la suma de escalares: $(\alpha + \beta) \vec{x} = \alpha \vec{x} + \beta \vec{x}$

A10) Distributiva respecto de la suma de vectores: $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \vec{x} + \alpha \vec{y}$



Repaso de las Clases Anteriores

DEFINICIÓN: SUBESPACIO

Si V es EV y $S \subset V \wedge S \neq \emptyset \Rightarrow S$ es subespacio de $V \Leftrightarrow S$ cumple los 10 axiomas de EV.

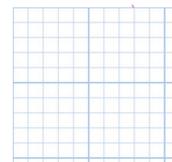
CONDICIONES SUFICIENTES PARA QUE S SEA SUBESPACIO DE V:

I) $S \subset V$

II) $S \neq \emptyset$

III) LCI: $\forall \vec{x} \in S \wedge \forall \vec{y} \in S: (\vec{x} + \vec{y}) \in S$

IV) LCE: $\forall \vec{x} \in S \wedge \forall \alpha \in \mathbb{R}: (\alpha \vec{x}) \in S$



Repaso de las Clases Anteriores

COMBINACION LINEAL

Sea V espacio vectorial (EV) Se dice que un vector \vec{v} de V es **combinación lineal** (CL) de un conjunto de vectores A , sí y solo sí existen escalares tales que:
$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$$

Simbólicamente:

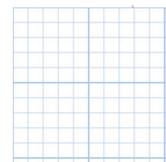
Sea V EV. Sea $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $A \neq \emptyset$, $A \subset V$.

$\vec{v} \in V$ es CL de $A \Leftrightarrow \exists \alpha_i \in \mathbb{R} / \vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \vec{v}_i$

Para tener en cuenta: Cuando se busca verificar que un vector es CL de A , se obtiene un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son los escalares de la CL.

Si el sistema es SC \Rightarrow los escalares existen y la CL es posible

Si el sistema es SI \Rightarrow no existen los escalares, y la CL no es posible



Repaso de las Clases Anteriores

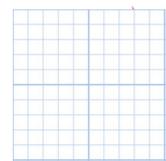
SUBESPACIO GENERADO

Sea V EV y el conjunto de vectores $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$. Llamaremos **subespacio generado por A** al conjunto de todos los vectores que se pueden escribir como CL de los vectores de A .

Simbólicamente:

$gen(A) = S$ (S es el subespacio generado por A)

$S = gen(A) = \{ \vec{x} \in V / \vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i \}$ (\vec{x} es CL de A)



Repaso de las Clases Anteriores

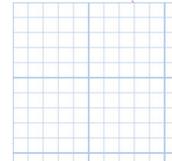
SISTEMA GENERADOR

Sea V EV y el conjunto de vectores $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ con $A \subset V$. Diremos que **A es un sistema generador de V** sí y solo sí para todo vector $\vec{v} \in V$, \vec{v} se puede expresar como CL de los vectores de A.

Simbólicamente:

$$A \text{ es SG de } V \Leftrightarrow \forall \vec{v} \in V : \vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 \dots \alpha_n \vec{v}_n$$

Si un conjunto A no alcanza a generar todo el EV, no será sistema generador (SG) de V, sino de un subespacio de V.



Repaso de las Clases Anteriores

INDEPENDENCIA LINEAL

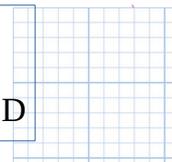
Sea V EV y el conjunto de vectores $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ con $A \subset V$. Diremos que **A es Linealmente Independiente (LI)** sí y solo sí la CL de los vectores de A igualada al vector nulo se verifica solo si todos los escalares α_i son nulos.

$$A \text{ es LI} \Leftrightarrow \vec{0} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 \dots \alpha_n \vec{v}_n \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

Del mismo modo diremos que **A es Linealmente Dependiente (LD)** sí y solo sí la CL de los vectores de A igualada al vector nulo se verifica con al menos un escalar α_i no nulo.

$$A \text{ es LD} \Leftrightarrow \vec{0} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 \dots \alpha_n \vec{v}_n \Rightarrow \alpha_1 \neq 0 \vee \alpha_2 \neq 0 \vee \dots \vee \alpha_n \neq 0$$

$$\vec{0} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 \dots \alpha_n \vec{v}_n \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \text{ (CL única): A es LI} \\ \alpha_1 \neq 0 \vee \alpha_2 \neq 0 \vee \dots \alpha_n \neq 0 \text{ (CL múltiple): A es LD} \end{cases}$$



Repaso de las Clases Anteriores

BASE

Definición:

Un conjunto de vectores B de un espacio vectorial V constituye una **base** de dicho espacio vectorial sí y solo sí, B es linealmente independiente y B es sistema generador para el espacio vectorial.

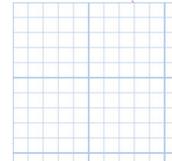
$$V \text{ EV}, B \subset V$$

$$B \text{ es Base de } V \Leftrightarrow B \text{ es LI} \wedge V = \text{gen}(B)$$

DIMENSIÓN DE UN EV

La **dimensión de un espacio vectorial** es la cantidad de vectores que forman una base del espacio vectorial.

$$V \text{ EV}, B \subset V, B \text{ Base de } V \Rightarrow \dim(V) = \#(B)$$



Repaso de las Clases Anteriores

NORMA VECTORIAL: DEFINICIÓN

$$f: V \rightarrow \mathbb{R} / \forall \vec{x} \in V: f(\vec{x}) = \|\vec{x}\| \in \mathbb{R}$$

NORMAS CONOCIDAS:

Norma de Orden 1:

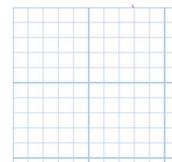
$$\|\vec{x}\|_1 = \sum |x_i| \Rightarrow \|\vec{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

Norma de Orden 2 (Norma Euclídea):

$$\|\vec{x}\|_2 = \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Norma de Orden Infinito:

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max \{ |x_i| \}_{i=1}^n$$



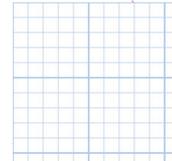
Repaso de las Clases Anteriores

NORMA VECTORIAL: PROPIEDADES

1) $\|\vec{x}\| \geq 0 \wedge (\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0})$

2) $\|\alpha \vec{x}\| = |\alpha| \|\vec{x}\|$

3) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$



Repaso de las Clases Anteriores

PRODUCTO INTERIOR: DEFINICIÓN

Sea $(V; +; \cdot; \mathbb{R})$ espacio vectorial EV. El **producto interior** es una función $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que si $\vec{u} \in V, \vec{v} \in V: f(\vec{u}; \vec{v}) = \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle \in \mathbb{R}$, satisface los siguientes axiomas:

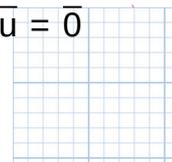
$$\forall \vec{u} \in V, \forall \vec{v} \in V, \forall \vec{w} \in V, \forall h \in \mathbb{R}$$

A1) Condición de Simetría: $\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}; \vec{u} \rangle$ (Prop. Conmutativa)

A2) Condición de Aditividad: $\langle \vec{u} + \vec{v}; \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}; \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}; \vec{w} \rangle$ (Prop. Distributiva)

A3) Condición de Homogeneidad: $\langle h\vec{u}; \vec{v} \rangle = h \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle$ (Prop. Asociativa Mixta)

A4) Condición de Positividad: $\langle \vec{u}; \vec{u} \rangle \geq 0 \wedge [\langle \vec{u}; \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}]$
(Elemento neutro)

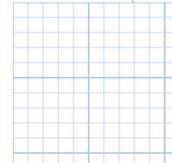


Ortogonalidad

DEFINICIONES

Sea V EV con PI (Producto Interior). $\forall \vec{x} \in V \wedge \forall \vec{y} \in V$ con: $\vec{x} \neq \vec{0} \wedge \vec{y} \neq \vec{0}$.
 $S_1 \subset V \wedge S_2 \subset V \wedge S_1 \neq \emptyset \wedge S_2 \neq \emptyset$

- 1) Dos vectores son ortogonales: $\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \langle \vec{x}; \vec{y} \rangle = 0$
- 2) Un vector con un Subespacio son ortogonales: $\vec{x} \perp S_1 \Leftrightarrow \forall \vec{v}_i \in S_1: \langle \vec{x}; \vec{v}_i \rangle = 0$
- 3) Dos Subespacios son ortogonales: $S_1 \perp S_2 \Leftrightarrow \forall \vec{v}_i \in S_1 \wedge \forall \vec{w}_j \in S_2: \langle \vec{v}_i; \vec{w}_j \rangle = 0$
- 4) Conjunto Ortogonal: $A = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_n\} \subset V$. A es ortogonal si: $\langle \vec{v}_i; \vec{v}_j \rangle = 0$ si $i \neq j$
- 5) Base Ortogonal: Sea $B = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_n\}$
 B es Base Ortogonal $\Leftrightarrow B$ es conjunto ortogonal $\wedge B$ es Base de V .



Ortogonalidad

TEOREMA 1

Dado un conjunto ortogonal $A = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m\}$ incluido en un EV V con PI, $A \subset V$, entonces dicho conjunto resulta LI.

V EV con PI, $A \subset V \wedge A$ es Ortogonal $\Rightarrow A$ es LI

H) V EV con PI, $A \subset V \wedge A$ es Ortogonal

T) A es LI

D) $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_m \vec{v}_m = \vec{0}$ (planteo CL igualada al $\vec{0}$)

$$\langle \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_m \vec{v}_m; \vec{v}_1 \rangle = \langle \vec{0}; \vec{v}_1 \rangle \quad (\text{PI de la CL con } \vec{v}_1)$$

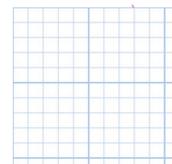
$$\langle \alpha_1 \vec{v}_1; \vec{v}_1 \rangle + \langle \alpha_2 \vec{v}_2; \vec{v}_1 \rangle + \dots + \langle \alpha_m \vec{v}_m; \vec{v}_1 \rangle = 0 \quad (\text{Condición de Aditividad en PI})$$

$$\alpha_1 \langle \vec{v}_1; \vec{v}_1 \rangle + \alpha_2 \langle \vec{v}_2; \vec{v}_1 \rangle + \dots + \alpha_m \langle \vec{v}_m; \vec{v}_1 \rangle = 0 \quad (\text{Condición de Homogeneidad en PI})$$

$$\alpha_1 \langle \vec{v}_1; \vec{v}_1 \rangle + \alpha_2 \cdot 0 + \dots + \alpha_m \cdot 0 = 0 \quad (\text{por ser conjunto ortogonal})$$

$$\alpha_1 \langle \vec{v}_1; \vec{v}_1 \rangle = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \quad (\text{por ser } \langle \vec{v}_1; \vec{v}_1 \rangle \neq 0)$$

Si se repite el proceso $\forall \vec{v}_i \in A$ se podrá probar que: $\alpha_i = 0 \forall i \Rightarrow A$ es LI.



Ortogonalidad

TEOREMA 2

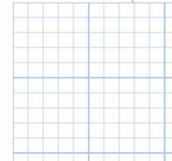
Sea $B = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_n\}$ una base ortogonal de un EV V con PI, todo vector $\vec{x} \in V$

puede escribirse como: $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \frac{\langle \vec{x}; \vec{v}_i \rangle}{\langle \vec{v}_i; \vec{v}_i \rangle} \vec{v}_i$

H) V EV con PI, $\vec{x} \in V$, B es base ortogonal de V

($B = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_n\} \subset V \wedge B$ es LI $\wedge V = \text{gen}(B) \wedge \langle \vec{v}_i; \vec{v}_j \rangle = 0$ si $i \neq j$)

T) $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \frac{\langle \vec{x}; \vec{v}_i \rangle}{\langle \vec{v}_i; \vec{v}_i \rangle} \vec{v}_i$



Ortogonalidad

TEOREMA 2 (CONT.)

Sea $B = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_n\}$ una base ortogonal de un EV V con PI, todo vector $\vec{x} \in V$

puede escribirse como: $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \frac{\langle \vec{x}; \vec{v}_i \rangle}{\langle \vec{v}_i; \vec{v}_i \rangle} \vec{v}_i$

D) $\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$ (planteo CL igualada a \vec{x})

$\langle \vec{x}; \vec{v}_1 \rangle = \langle \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n; \vec{v}_1 \rangle$ (PI de \vec{x} con \vec{v}_1)

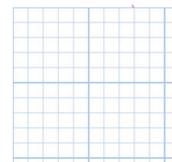
$\langle \vec{x}; \vec{v}_1 \rangle = \langle \alpha_1 \vec{v}_1; \vec{v}_1 \rangle + \langle \alpha_2 \vec{v}_2; \vec{v}_1 \rangle + \dots + \langle \alpha_n \vec{v}_n; \vec{v}_1 \rangle$ (Condición de Aditividad)

$\langle \vec{x}; \vec{v}_1 \rangle = \alpha_1 \langle \vec{v}_1; \vec{v}_1 \rangle + \alpha_2 \langle \vec{v}_2; \vec{v}_1 \rangle + \dots + \alpha_n \langle \vec{v}_n; \vec{v}_1 \rangle$ (Condición de Homogeneidad)

$\langle \vec{x}; \vec{v}_1 \rangle = \alpha_1 \langle \vec{v}_1; \vec{v}_1 \rangle + \alpha_2 0 + \dots + \alpha_n 0$ (por ser conjunto ortogonal)

$\langle \vec{x}; \vec{v}_1 \rangle = \alpha_1 \langle \vec{v}_1; \vec{v}_1 \rangle \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\langle \vec{x}; \vec{v}_1 \rangle}{\langle \vec{v}_1; \vec{v}_1 \rangle}$ (con: $\langle \vec{v}_1; \vec{v}_1 \rangle \neq 0$)

Si se repite el proceso $\forall \vec{v}_i \in B$ se podrá probar que: $\alpha_i = \frac{\langle \vec{x}; \vec{v}_i \rangle}{\langle \vec{v}_i; \vec{v}_i \rangle} \forall i \in [1, n]$.



Ortogonalidad

EJEMPLO:

$V \equiv \mathbb{R}^3$. $B = \{(1; 0; -1), (1; 0; 1), (0; -5; 0)\}$. Se pide:

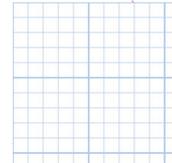
a) ¿Es B base ortogonal de \mathbb{R}^3 ?

b) Escribir al vector: $\vec{x} = (3; -7; 1)$ como CL de B.

a) Por Teorema 10: B es Base $\Leftrightarrow B$ es LI $\vee V = \text{gen}(B)$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2}(-5)(1 - (-1)) = 10 \neq 0 \Rightarrow B \text{ es LI} \Rightarrow B \text{ es base de } \mathbb{R}^3$$

↑
LP



Ortogonalidad

EJEMPLO:

$V \equiv \mathbb{R}^3$. $B = \{\boxed{\vec{v}_1}, \boxed{\vec{v}_2}, \boxed{\vec{v}_3}\}$. Se pide:

a) ¿Es B base ortogonal de \mathbb{R}^3 ?

b) Escribir al vector: $\vec{x} = (3; -7; 1)$ como CL de B.

a) Base Ortogonal:

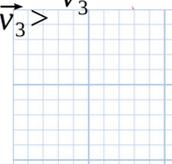
$$\langle \vec{v}_1; \vec{v}_2 \rangle = 0$$

$$\langle \vec{v}_1; \vec{v}_3 \rangle = 0$$

$$\langle \vec{v}_2; \vec{v}_3 \rangle = 0$$

Como $\langle \vec{v}_i; \vec{v}_j \rangle = 0 \forall i \neq j \Rightarrow B$ es base ortogonal.

b) Por Teorema anterior: $\vec{x} = \sum_{i=1}^3 \frac{\langle \vec{x}; \vec{v}_i \rangle}{\langle \vec{v}_i; \vec{v}_i \rangle} \vec{v}_i \Rightarrow \vec{x} = \frac{\langle \vec{x}; \vec{v}_1 \rangle}{\langle \vec{v}_1; \vec{v}_1 \rangle} \vec{v}_1 + \frac{\langle \vec{x}; \vec{v}_2 \rangle}{\langle \vec{v}_2; \vec{v}_2 \rangle} \vec{v}_2 + \frac{\langle \vec{x}; \vec{v}_3 \rangle}{\langle \vec{v}_3; \vec{v}_3 \rangle} \vec{v}_3$



Ortogonalidad

EJEMPLO:

$V \equiv \mathbb{R}^3$. $B = \{(1; 0; -1), (1; 0; 1), (0; -5; 0)\}$. Se pide:

a) ¿Es B base ortogonal de \mathbb{R}^3 ?

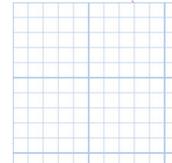
b) Escribir al vector: $\vec{x} = (3; -7; 1)$ como CL de B.

$$\alpha_1 = \frac{\langle \vec{x}; \vec{v}_1 \rangle}{\langle \vec{v}_1; \vec{v}_1 \rangle} = \frac{\langle (3; -7; 1); (1; 0; -1) \rangle}{\langle (1; 0; -1); (1; 0; -1) \rangle} = 1$$

$$\alpha_2 = \frac{\langle \vec{x}; \vec{v}_2 \rangle}{\langle \vec{v}_2; \vec{v}_2 \rangle} = \frac{\langle (3; -7; 1); (1; 0; 1) \rangle}{\langle (1; 0; 1); (1; 0; 1) \rangle} = 2$$

$$\alpha_3 = \frac{\langle \vec{x}; \vec{v}_3 \rangle}{\langle \vec{v}_3; \vec{v}_3 \rangle} = \frac{\langle (3; -7; 1); (0; -5; 0) \rangle}{\langle (0; -5; 0); (0; -5; 0) \rangle} = \frac{7}{5}$$

$$\text{Luego: } \vec{x} = 1(1; 0; -1) + 2(1; 0; 1) + \frac{7}{5}(0; -5; 0) = (3; -7; 1)$$



Ortonormalidad

CONJUNTO ORTONORMAL

$A = \{v_1; v_2; \dots; v_n\} \subset V$ es un conjunto ortonormal si cumple:

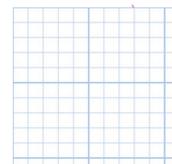
$$\langle \vec{v}_i; \vec{v}_j \rangle = \delta_{ij}$$

Esto es:

$$\langle \vec{v}_i; \vec{v}_j \rangle = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

$$\langle \vec{v}_i; \vec{v}_j \rangle = 1 \quad \text{si } i = j$$

$$\text{ya que: si } i = j: \langle \vec{v}_i; \vec{v}_j \rangle = \|\vec{v}_1\|^2 = 1$$



Ortonormalidad

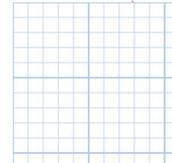
BASE ORTONORMAL

$B = \{v_1; v_2; \dots; v_n\} \subset V$, B es base ortonormal $\Leftrightarrow B$ es base $\wedge B$ es conjunto ortonormal.

Esto es:

B es LI $\wedge V = \text{gen}(B)$ (B es LI)

$\langle \vec{v}_i; \vec{v}_j \rangle = 0$ si $i \neq j$ $\wedge \langle \vec{v}_i; \vec{v}_i \rangle = \|\vec{v}_i\|^2 = 1$, si $i = j$ (B es conjunto Ortonormal)



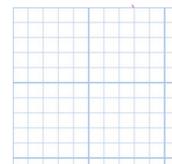
Ortonormalidad

COROLARIO

Si $B = \{v_1; v_2; \dots; v_n\}$ es base ortonormal de $V \Rightarrow \forall \vec{x} \in V$, \vec{x} puede escribirse:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n \langle \vec{x}; \vec{v}_i \rangle \vec{v}_i$$

$$\vec{x} = \langle \vec{x}; \vec{v}_1 \rangle \vec{v}_1 + \langle \vec{x}; \vec{v}_2 \rangle \vec{v}_2 + \dots + \langle \vec{x}; \vec{v}_n \rangle \vec{v}_n$$



Ortonormalidad

EJEMPLO:

$V \equiv \mathbb{R}^3$. $B = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}} \right), (0; 1; 0), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$. Se pide:

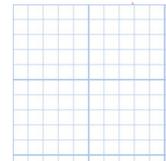
a) ¿Es B base ortonormal de \mathbb{R}^3 ?

b) Escribir al vector: $\vec{x} = (3; -2; 5)$ como CL de B.

a) Por Teorema 10: B es Base $\Leftrightarrow B$ es LI $\vee V = \text{gen}(B)$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} \right) = 1 \neq 0 \Rightarrow B \text{ es LI} \Rightarrow B \text{ es base de } \mathbb{R}^3$$

↑
LP



Ortonormalidad

EJEMPLO:

$V \equiv \mathbb{R}^3$. $B = \left\{ \overset{\vec{v}_1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}, \overset{\vec{v}_2}{(0; 1; 0)}, \overset{\vec{v}_3}{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}} \right)} \right\}$. Se pide:

a) ¿Es B base ortonormal de \mathbb{R}^3 ?

b) Escribir al vector: $\vec{x} = (3; -2; 5)$ como CL de B.

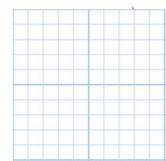
a) Base Ortonormal:

$$\langle \vec{v}_1; \vec{v}_2 \rangle = 0 \quad \langle \vec{v}_1; \vec{v}_1 \rangle = 1$$

$$\langle \vec{v}_1; \vec{v}_3 \rangle = 0 \quad \langle \vec{v}_2; \vec{v}_2 \rangle = 1$$

$$\langle \vec{v}_2; \vec{v}_3 \rangle = 0 \quad \langle \vec{v}_3; \vec{v}_3 \rangle = 1$$

Como $\langle \vec{v}_i; \vec{v}_j \rangle = 0 \forall i \neq j \wedge \langle \vec{v}_i; \vec{v}_j \rangle = 1 \forall i = j \Rightarrow B$ es base ortonormal.



Ortonormalidad

EJEMPLO:

$V \equiv \mathbb{R}^3$. $B = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}} \right), (0; 1; 0), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$. Se pide:

a) ¿Es B base ortonormal de \mathbb{R}^3 ?

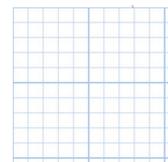
b) Escribir al vector: $\vec{x} = (3; -2; 5)$ como CL de B.

$$\alpha_1 = \langle \vec{x}; \vec{v}_1 \rangle = \langle (3; -2; 5); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \rangle = \frac{8}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha_2 = \langle \vec{x}; \vec{v}_2 \rangle = \langle (3; -2; 5); (0; 1; 0) \rangle = -2$$

$$\alpha_3 = \langle \vec{x}; \vec{v}_3 \rangle = \langle (3; -2; 5); \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \rangle = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Luego: } \vec{x} = \frac{8}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + (-2)(0; 1; 0) + \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = (3; -2; 5)$$



Algunas Demostraciones

DE LA HOJA COMPLEMENTO DE ESPACIOS VECTORIALES

1) Demostrar que si $\{v_1; v_2\}$ es LI $\Rightarrow \{\vec{v}_1 + \vec{v}_2; \vec{v}_2\}$ es LI

H) $\{\vec{v}_1; \vec{v}_2\}$ es LI

T) $\{\vec{v}_1 + \vec{v}_2; \vec{v}_2\}$ es LI

D) $\alpha(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \beta\vec{v}_2 = \vec{0}$

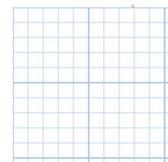
$$\alpha\vec{v}_1 + \alpha\vec{v}_2 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0} \quad (\text{prop. distributiva del producto de escalar y la suma de vectores})$$

$$\alpha\vec{v}_1 + (\alpha + \beta)\vec{v}_2 = \vec{0} \quad (\text{prop. distributiva del producto de vector y la suma de escalares})$$

Por hipótesis: por ser LI

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

Luego: $\{\vec{v}_1 + \vec{v}_2; \vec{v}_2\}$ es LI.



Algunas Demostraciones

DE LA HOJA COMPLEMENTO DE ESPACIOS VECTORIALES

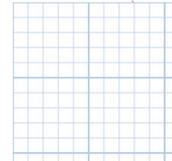
3) Todo vector no nulo de un espacio vectorial es LI

H) $A = \{\vec{v}_1\} \wedge \vec{v}_1 \neq \vec{0}$

T) A es LI.

D) $\alpha \vec{v}_1 = \vec{0}$ (LI/LD: planteo CL igualada al vector nulo).

$\alpha = 0$ ($\alpha \vec{v}_1 = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee \vec{v}_1 = \vec{0}$, pero $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ por H)



Algunas Demostraciones

DE LA HOJA COMPLEMENTO DE ESPACIOS VECTORIALES

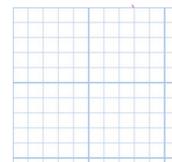
4) El vector nulo es LD

H) $A = \{\vec{0}\}$

T) A es LD.

D) $\alpha \vec{0} = \vec{0}$ (LI/LD: planteo CL igualada al vector nulo).

$\forall \alpha \neq 0: \alpha \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow A$ es LD



Algunas Demostraciones

DE LA HOJA COMPLEMENTO DE ESPACIOS VECTORIALES

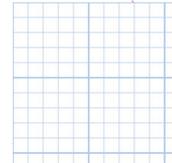
5) Todo conjunto que contenga al vector nulo es LD

$$H) A = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_n; \vec{0}\}$$

T) A es LD.

$$D) \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n + \alpha_{n+1} \vec{0} = \vec{0} \text{ (LI/LD: planteo CL igualada al vector nulo).}$$

$$\exists \alpha_{n+1} \neq 0 / \alpha_{n+1} \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow A \text{ es LD}$$



Ejercicios de la Guía

Ejercicio M6: b) Sean : $V \text{ EV}, S \subset V, \dim(S) = p, A$ base de S, B base del Subespacio complemento ortogonal de $S, A = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_p\}, B = \{\vec{w}_1; \vec{w}_2; \dots; \vec{w}_{n-p}\}.$

Demostrar que si se define el conjunto $C = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_p; \vec{w}_1; \vec{w}_2; \dots; \vec{w}_{n-p}\} C \subset V, C$ es base de $V.$

$$H) V \text{ EV}, S \subset V, A = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_p\}, A \text{ base de } S, S^\perp \subset V, B = \{\vec{w}_1; \vec{w}_2; \dots; \vec{w}_{n-p}\},$$

$$B \text{ base de } S^\perp, C = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_p; \vec{w}_1; \vec{w}_2; \dots; \vec{w}_{n-p}\}$$

T) C es base de $V, \dim(C) = n$

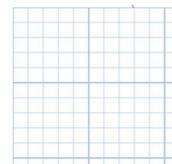
D) Se necesita demostrar que C es LI y $V = \text{gen}(C).$

C es LI: A es base de $S \Rightarrow A$ es LI.

$$\forall j \in [1, n-p]: \vec{w}_j \in B: \vec{w}_j \notin S \text{ (por ser } \vec{w} \in S^\perp) \Rightarrow \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_p\} \cup \{\vec{w}_j\} \text{ es LI (Teo 7.a).}$$

Luego también $\{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_p\} \cup \{\vec{w}_1; \vec{w}_2; \dots; \vec{w}_{n-p}\}$ es LI.

$$C = A \cup B \text{ es LI}$$



Ejercicios de la Guía

Ejercicio M6: Cont.

$V = \text{gen}(C)$:

$$S = \text{gen}(A): \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{X} \wedge \dim(X) = p$$

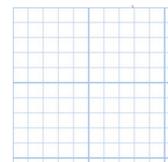
$$S^\perp = \text{gen}(B): \beta_1 \vec{w}_1 + \beta_2 \vec{w}_2 + \dots + \beta_{n-p} \vec{w}_{n-p} = \vec{Y} \wedge \dim(Y) = n - p$$

$$S \cup S^\perp: \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n + \beta_1 \vec{w}_1 + \beta_2 \vec{w}_2 + \dots + \beta_{n-p} \vec{w}_{n-p} = \vec{X} + \vec{Y}$$

$$\text{con: } \dim(\vec{X}) + \dim(\vec{Y}) = p + n - p = n$$

Luego: $V = \text{gen}(C)$ (por Teorema 12)

Finalmente: C es base de V y $\dim(V) = n$



Ejercicios de la Guía

Ejercicio M6: c) Sea $V \in V, S \subset V$. Si el conjunto A constituye una base ortonormal para S y el conjunto B corresponde a una base ortonormal del subespacio Complemento ortogonal donde:

$$A = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_n\}, \dim(S) = p, B = \{\vec{w}_1; \vec{w}_2; \dots; \vec{w}_{n-p}\}, \dim(S^\perp) = n - p$$

El conjunto: $C = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_n; \vec{w}_1; \vec{w}_2; \dots; \vec{w}_{n-p}\}$ constituye una base ortonormal de V

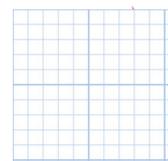
H) $V \in V, S \subset V, S^\perp \subset V$.

$A = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_n\}$, A base de $S, \langle v_i; v_j \rangle = \delta_{i,j}$ (A es base ortonormal de S)

$B = \{\vec{w}_1; \vec{w}_2; \dots; \vec{w}_{n-p}\}$, B base de $S^\perp, \langle w_i; w_j \rangle = \delta_{i,j}$ (B es base ortonormal de S^\perp)

$C = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_n; \vec{w}_1; \vec{w}_2; \dots; \vec{w}_{n-p}\}$

T) C es base ortonormal.



Ejercicios de la Guía

Ejercicio M6: cont.

D) Para demostrar que C es base ortonormal hay que demostrar que C es base y C es conjunto ortonormal.

$C = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_p; \vec{w}_1; \vec{w}_2; \dots; \vec{w}_{n-p}\}$. C es base de V por ej. anterior.

$B = \{\vec{w}_1; \vec{w}_2; \dots; \vec{w}_{n-p}\} = \{\vec{v}_{p+1}; \vec{v}_{p+2}; \dots; \vec{v}_{p+n-p}\}$

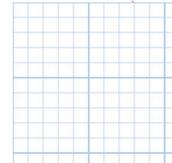
Luego: $C = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_n\}$ es base de V.

Si: $1 \leq i \leq p \wedge 1 \leq j \leq p: \langle \vec{v}_i; \vec{v}_j \rangle = \delta_{i,j}$ (por ser A base ortonormal).

Si: $p+1 \leq i \leq n \wedge p+1 \leq j \leq n: \langle \vec{v}_i; \vec{v}_j \rangle = \delta_{i,j}$ (por ser B base ortonormal).

Luego: C es conjunto ortonormal

Luego: C es base ortonormal de V



Ejercicios de la Guía

Ejercicio 14:

14.1. Usando $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \text{sen } \alpha \\ -\text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ demostrar que los vectores fila constituyen un conjunto ortonormal. $\vec{v}_1 = (\cos \alpha; \text{sen } \alpha), \vec{v}_2 = (-\text{sen } \alpha; \cos \alpha), A = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2\}$

A es conjunto ortonormal si cumple:

$$\langle \vec{v}_1; \vec{v}_2 \rangle = 0$$

$$\langle \vec{v}_1; \vec{v}_1 \rangle = 1 \wedge \langle \vec{v}_2; \vec{v}_2 \rangle = 1$$

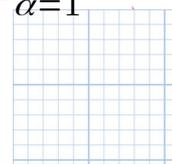
Reemplazando por datos:

$$\langle \vec{v}_1; \vec{v}_2 \rangle = \langle (\cos \alpha; \text{sen } \alpha); (-\text{sen } \alpha; \cos \alpha) \rangle = \cos \alpha \cdot (-\text{sen } \alpha) + \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\langle \vec{v}_1; \vec{v}_1 \rangle = \langle (\cos \alpha; \text{sen } \alpha); (\cos \alpha; \text{sen } \alpha) \rangle = (\cos \alpha)^2 + (\text{sen } \alpha)^2 = \cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 1$$

$$\langle \vec{v}_2; \vec{v}_2 \rangle = \langle (-\text{sen } \alpha; \cos \alpha); (-\text{sen } \alpha; \cos \alpha) \rangle = (-\text{sen } \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = \text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Luego: A es un conjunto ortonormal.



Ejercicios de la Guía

Ejercicio 14:

14.2. Sean: $\vec{a}=(1;2;-1)$, $S=\{(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3/x_1=x_3\wedge x_2=0\}$. Demostrar que $\vec{a}\perp S$

Armado de una base de S: Si $\vec{x}\in S\Rightarrow\vec{x}=(x_1;0;x_1)$

Si $x_1=\lambda:\vec{x}=\lambda(1;0;1)\quad\forall\lambda\in\mathbb{R}$ (una recta que pasa por el origen, dirigida por $v=(1;0;1)$).

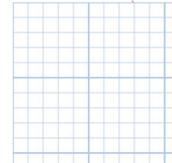
luego: $B_S=\{\vec{v}=(1;0;1)\}$

$A=\{\vec{a}=(1;2;-1),\vec{v}=(1;0;1)\}$

A es conjunto ortogonal $\Leftrightarrow\langle\vec{a};\vec{v}\rangle=0$

$\langle\vec{a};\vec{v}\rangle=\langle(1;2;-1);(1;0;1)\rangle=0$

Luego: A es conjunto ortogonal.



Ejercicios de la Guía

Ejercicio 14:

14.5. Hallar $a\in\mathbb{R}/B_2$ sea base ortonormal de \mathbb{R}^3

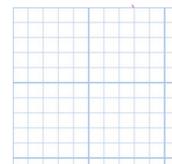
con $B_2=\{(0;1;0),(\frac{-4}{5};0;\frac{3}{5}),(\frac{3}{5};0;a)\}$

B_2 es Base ortonormal $\Leftrightarrow B_2$ es LI $\wedge B_2$ es conjunto ortonormal

B_2 es LI $\Leftrightarrow\det(B_2)\neq 0$

$$\det(B_2)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & a \end{vmatrix}=(-1)^{1+2}\left(\left(\frac{-4}{5}\right)a-\frac{9}{25}\right)=\frac{4}{5}a+\frac{9}{25}$$

B_2 es LI $\Leftrightarrow\det(B_2)\neq 0\Leftrightarrow a\neq\frac{-9}{20}$



Ejercicios de la Guía

Ejercicio 14:

14.5. Hallar $a \in \mathbb{R} / B_2$ sea base ortonormal de \mathbb{R}^3

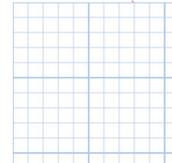
$$\text{con } B_2 = \left\{ (0; 1; 0), \left(\frac{-4}{5}; 0; \frac{3}{5} \right), \left(\frac{3}{5}; 0; a \right) \right\}$$

B_2 es Base ortonormal $\Leftrightarrow B_2$ es LI $\wedge B_2$ es conjunto ortonormal

B_2 es conjunto ortonormal si cumple:

$$\langle \vec{v}_1; \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v}_1; \vec{v}_3 \rangle = \langle \vec{v}_2; \vec{v}_3 \rangle = 0$$

$$\langle \vec{v}_1; \vec{v}_1 \rangle = \langle \vec{v}_2; \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v}_3; \vec{v}_3 \rangle = 1$$



Ejercicios de la Guía

Ejercicio 14:

14.5. Hallar $a \in \mathbb{R} / B_2$ sea base ortonormal de \mathbb{R}^3

$$\text{con } B_2 = \left\{ (0; 1; 0), \left(\frac{-4}{5}; 0; \frac{3}{5} \right), \left(\frac{3}{5}; 0; a \right) \right\}$$

$$\langle \vec{v}_1; \vec{v}_2 \rangle = \langle (0; 1; 0); \left(\frac{-4}{5}; 0; \frac{3}{5} \right) \rangle = 0$$

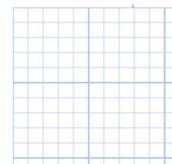
$$\langle \vec{v}_1; \vec{v}_3 \rangle = \langle (0; 1; 0); \left(\frac{3}{5}; 0; a \right) \rangle = 0$$

$$\langle \vec{v}_2; \vec{v}_3 \rangle = \langle \left(\frac{-4}{5}; 0; \frac{3}{5} \right); \left(\frac{3}{5}; 0; a \right) \rangle = \frac{-12}{25} + \frac{3}{5} a$$

$$\langle \vec{v}_1; \vec{v}_1 \rangle = \langle (0; 1; 0); (0; 1; 0) \rangle = 1$$

$$\langle \vec{v}_2; \vec{v}_2 \rangle = \langle \left(\frac{-4}{5}; 0; \frac{3}{5} \right); \left(\frac{-4}{5}; 0; \frac{3}{5} \right) \rangle = 1$$

$$\langle \vec{v}_3; \vec{v}_3 \rangle = \langle \left(\frac{3}{5}; 0; a \right); \left(\frac{3}{5}; 0; a \right) \rangle = \frac{9}{25} + a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{16}{25}$$



Ejercicios de la Guía

Ejercicio 14:

14.5. Hallar $a \in \mathbb{R} / B_2$ sea base ortonormal de \mathbb{R}^3

$$\text{con } B_2 = \left\{ (0; 1; 0), \left(\frac{-4}{5}; 0; \frac{3}{5} \right), \left(\frac{3}{5}; 0; a \right) \right\}$$

$$\left\langle \vec{v}_2; \vec{v}_3 \right\rangle = \left\langle \left(\frac{-4}{5}; 0; \frac{3}{5} \right); \left(\frac{3}{5}; 0; a \right) \right\rangle = \frac{-12}{25} + \frac{3}{5}a$$

$$\left\langle \vec{v}_3; \vec{v}_3 \right\rangle = \left\langle \left(\frac{3}{5}; 0; a \right); \left(\frac{3}{5}; 0; a \right) \right\rangle = \frac{9}{25} + a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{16}{25}$$

$$\begin{cases} \frac{-12}{25} + \frac{3}{5}a = 0 \\ a^2 = \frac{16}{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{5} \\ a = \frac{4}{5} \vee a = \frac{-4}{5} \end{cases} \Rightarrow \text{Luego: para } a = \frac{4}{5} \text{ } B_2 \text{ es base ortonormal}$$

