Álgebra y Geometría Analítica

Clase 24: Ortogonalidad

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

Unidad 4 – Clase 24

Repaso de las Clases Anteriores

DEFINICIÓN: ESPACIO VECTORIAL

$(V;+;\mathbb{R};.)$ *es espacio vectorial si se cumple los* 10 *axiomas de espacios vectoriales*

AXIOMAS DE ESPACIOS VECTORIALES:

$\forall \vec{x} \in V, \forall \vec{y} \in V, \forall \vec{z} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}:$

A 1) Ley de composición interna: $(\vec{x}+\vec{y}) \in V$
A 2) Propiedad Conmutativa: $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$
A 3) Propiedad Asociativa: $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$
A 4) Existencia de elemento neutro: $\exists \vec{0} \in V / \vec{x}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{x}=\vec{x}$
A 5) Existencia de Simétrico (u opuesto): $\exists -\vec{x} \in V / \vec{x}+(-\vec{x})=(-\vec{x})+\vec{x}=\vec{0}$
A 6) Ley de composición externa: $\alpha \vec{x} \in V$
A 7) Propiedad Asociativa mixta: $(\alpha\beta)\vec{x}=\alpha(\beta\vec{x})$
A 8) Existencia de escalar neutro: $\exists 1 \in \mathbb{R} / 1\vec{x}=\vec{x}$
A 9) Distributiva respecto de la suma de escalares: $(\alpha+\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{x}$
A10) Distributiva respecto de la suma de vectores: $\alpha(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$

Repaso de las Clases Anteriores

DEFINICIÓN: SUBESPACIO

Si V *es* EV *y* $S \subset V \wedge S \neq \emptyset \Rightarrow S$ *es subespacio de* $V \Leftrightarrow S$ *cumple los* 10 *axiomas de* EV.

CONDICIONES SUFICIENTES PARA QUE S SEA SUBESPACIO DE V:

I) $S \subset V$
II) $S \neq \emptyset$
III) LCI: $\forall \vec{x} \in S \wedge \forall \vec{y} \in S : (\vec{x}+\vec{y}) \in S$
IV) LCE: $\forall \vec{x} \in S \wedge \forall \alpha \in \mathbb{R} : (\alpha\vec{x}) \in S$

Repaso de las Clases Anteriores

COMBINACION LINEAL

Sea V espacio vectorial (EV) Se dice que un vector $\overline{v}$ de V es **combinación lineal** (CL) de un conjunto de vectores A, sí y solo sí existen escalares tales que:
$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \ldots + \alpha_n \vec{v_n}$

Simbólicamente:
$Sea\ V\ EV.\ \ Sea\ A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, A \neq \emptyset, A \subset V.$

$$\vec{v} \in V\ es\ CL\ de\ A \Leftrightarrow \exists\, \alpha_i \in \mathbb{R} / \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . \vec{v}_i$$

Para tener en cuenta: Cuando se busca verificar que un vector es CL de A, se obtiene un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son los escalares de la CL.

Si el sistema es SC ==> los escalares existen y la CL es posible

Si el sistema es SI ==> no existen los escalares, y la CL no es posible

Repaso de las Clases Anteriores

SUBESPACIO GENERADO

Sea V EV y el conjunto de vectores A = $\{\overline{v}_1, \overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n\}$. Llamaremos **subespacio generado por A** al conjunto de todos los vectores que se pueden escribir como CL de los vectores de A.

Simbólicamente:

$gen(A) = S$ (S es el subespacio generado por A)

$$S = gen(A) = \{\vec{x} \in V / \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i\} \ (\vec{x} \text{ es CL de A})$$

Repaso de las Clases Anteriores

SISTEMA GENERADOR

Sea V EV y el conjunto de vectores A = {$\overline{v}_1$, $\overline{v}_1$, … , $\overline{v}_n$} con A ⊂ V. Diremos que **A es un sistema generador de V** sí y solo sí para todo vector $\overline{v}$ ∈ V, $\overline{v}$ se puede expresar como CL de los vectores de A.

Simbólicamente:

$$A\ es\ SG\ de\ V \Leftrightarrow \forall\, \vec{v} \in V : \vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_{2\ldots}\, \alpha_n \vec{v}_n$$

Si un conjunto A no alcanza a generar todo el EV, no será sistema generador (SG) de V, sino de un subespacio de V.

Repaso de las Clases Anteriores

INDEPENDENCIA LINEAL

Sea V EV y el conjunto de vectores A = {$\overline{v}_1$, $\overline{v}_1$, … , $\overline{v}_n$} con A ⊂ V
Diremos que **A es Linealmente Independiente (LI)** sí y solo sí la CL de los vectores de A igualada al vector nulo se verifica solo si todos los escalares αi son nulos.

$$A\ es\ LI \Leftrightarrow \vec{0} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 \ldots \alpha_n \vec{v}_n \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$$

Del mismo modo diremos que **A es Linealmente Dependiente (LD)** sí y solo sí la CL de los vectores de A igualada al vector nulo se verifica con al menos un escalar αi no nulo.

$$A\ es\ LD \Leftrightarrow \vec{0} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 \ldots \alpha_n \vec{v}_n \Rightarrow \alpha_1 \neq 0 \vee \alpha_2 \neq 0 \vee \ldots \vee \alpha_n \neq 0$$

$$\vec{0} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 \ldots \alpha_n \vec{v}_n \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0 \ \ \text{(CL única): A es LI} \\ \alpha_1 \neq 0 \vee \alpha_2 \neq 0 \vee \ldots \alpha_n \neq 0 \ \ \text{(CL múltiple): A es LD} \end{cases}$$

Repaso de las Clases Anteriores

BASE

Definición:
Un conjunto de vectores B de un espacio vectorial V constituye una **base** de dicho espacio vectorial sí y solo sí, B es linealmente independiente y B es sistema generador para el espacio vectorial.

$V\ EV, B \subset V$
B es Base de $V \Leftrightarrow B\ es\ LI \wedge V = gen(B)$

DIMENSIÓN DE UN EV

La **dimensión de un espacio vectorial** es la cantidad de vectores que forman una base del espacio vectorial.

$V\ EV,\ B \subset V, B$ Base de $V \Rightarrow dim(V) = \#(B)$

Repaso de las Clases Anteriores

NORMA VECTORIAL: DEFINICIÓN

$f : V \rightarrow \mathbb{R} / \forall \vec{x} \in V : f(\vec{x}) = ||\vec{x}|| \in \mathbb{R}$

NORMAS CONOCIDAS:

Norma de Orden 1:

$||\vec{x}||_1 = \sum |x_i| \Rightarrow ||\vec{x}||_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$

Norma de Orden 2 (Norma Euclídea):

$||\vec{x}||_2 = [\sum_{i=1}^{n} x_i^2]^{\frac{1}{2}} = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$

Norma de Orden Infinito:

$||\vec{x}||_\infty = max\{\ |x_i|\ \}_{i=1}^{n}$

Repaso de las Clases Anteriores

NORMA VECTORIAL: PROPIEDADES

1) $||\vec{x}|| \geq 0 \ \wedge \ \left(||\vec{x}|| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}\right)$

2) $||\alpha \vec{x}|| \ = \ |\alpha| \ ||\vec{x}||$

3) $||\vec{x} + \vec{y}|| \ \leq \ ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$

Repaso de las Clases Anteriores

PRODUCTO INTERIOR: DEFINICIÓN

Sea (V ; + ; R ;) espacio vectorial EV El **producto interior** es una función f : VxV $\rightarrow$ R tal que si $\overline{u} \in$ V, $\overline{v} \in$ V: f($\overline{u}$; $\overline{v}$) = < $\overline{u}$; $\overline{v}$ > $\in$ R, satisface los siguientes axiomas:

$\forall \vec{u} \in V, \forall \vec{v} \in V, \forall \vec{w} \in V, \forall h \in \mathbb{R}$

A1) Condición de Simetría: < $\overline{u}$; $\overline{v}$ > = < $\overline{v}$; $\overline{u}$ > (Prop Conmutativa)

A2) Condición de Aditividad: < $\overline{u}$ + $\overline{v}$; $\overline{w}$ > = < $\overline{u}$; $\overline{w}$ > + < $\overline{v}$; $\overline{w}$ > (Prop Distributiva)

A3) Condición de Homogeneidad: < h$\overline{u}$; $\overline{v}$ > = h < $\overline{v}$; $\overline{u}$ > (Prop Asociativa Mixta)

A4) Condición de Positividad: < $\overline{u}$; $\overline{u}$ > $\geq$ 0 ∧ [< $\overline{u}$; $\overline{u}$ > = 0 <==> $\overline{u}$ = $\overline{0}$ (Elemento neutro)]

Ortogonalidad

DEFINICIONES

Sea V EV con PI (Producto Interior). $\forall \vec{x}\in V \wedge \forall \vec{y}\in V$ con: $\vec{x}\neq\vec{0}\wedge\vec{y}\neq\vec{0}$.
$S_1\subset V\wedge S_2\subset V\wedge S_1\neq\emptyset\wedge S_2\neq\emptyset$

1) Dos vectores son ortogonales: $\vec{x}\perp\vec{y}\Leftrightarrow <\vec{x};\vec{y}>=0$
2) Un vector con un Subespacio son ortogonales: $\vec{x}\perp S_1\Leftrightarrow\forall\vec{v}_i\in S_1:<\vec{x};\vec{v}_1>=0$
3) Dos Subespacios son ortogonales: $S_1\perp S_2\Leftrightarrow\forall\vec{v}_i\in S_1\wedge\forall\vec{w}_j\in S_2:<\vec{v}_i;\vec{w}_j>=0$
4) Conjunto Ortogonal: $A=\{\vec{v}_1;\vec{v}_2;\ldots;\vec{v}_n\}\subset V$. A *es ortogonal si* $:<\vec{v}_i;\vec{v}_j>=0$ *si* $i\neq j$
5) Base Ortogonal: *Sea* $B=\{\vec{v}_1;\vec{v}_2;\ldots;\vec{v}_n\}$

   B *es Base Ortogonal* $\Leftrightarrow$ B *es conjunto ortogonal* $\wedge$ B *es Base de* V .

Ortogonalidad

TEOREMA 1

Dado un conjunto ortogonal $A=\{\vec{v}_1;\vec{v}_2;\ldots\vec{v}_m\}$ incluido en un EV V con PI, $A\subset V$, entonces dicho conjunto resulta LI .

V *EV con PI* , $A\subset V\wedge A$ *es Ortogonal* $\Rightarrow A$ *es LI*

H) V *EV con PI* , $A\subset V\wedge A$ *es Ortogonal*
T) A *es LI*

D) $\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\ldots+\alpha_m\vec{v}_m=\vec{0}$ (planteo CL igualada al $\vec{0}$)

$<\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\ldots+\alpha_m\vec{v}_m;\vec{v}_1>=<\vec{0};\vec{v}_1>$ (PI de la CL con $\vec{v}_1$)

$<\alpha_1\vec{v}_1;\vec{v}_1>+<\alpha_2\vec{v}_2;\vec{v}_1>+\ldots+<\alpha_m\vec{v}_m;\vec{v}_1>=0$ (Condición de Aditividad en PI)

$\alpha_1<\vec{v}_1;\vec{v}_1>+\alpha_2<\vec{v}_2;\vec{v}_1>+\ldots+\alpha_m<\vec{v}_m;\vec{v}_1>=0$ (Condición de Homogeneidad en PI)

$\alpha_1<\vec{v}_1;\vec{v}_1>+\alpha_2 0+\ldots+\alpha_m 0=0$ (por ser conjunto ortogonal)

$\alpha_1<\vec{v}_1;\vec{v}_1>=0\Rightarrow\alpha_1=0$ (por ser $<\vec{v}_1;\vec{v}_1>\neq 0$)

Si se repite el proceso $\forall\vec{v}_i\in A$ se podrá probar que: $\alpha_i=0\,\forall i\Rightarrow A$ *es LI* .

Ortogonalidad

TEOREMA 2

Sea $B=\{\vec{v}_1;\vec{v}_2;...;\vec{v}_n\}$ una base ortogonal de un EV V con PI, todo vector $\vec{x}\subset V$

puede escribirse como: $\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\frac{<\vec{x};\vec{v}_i>}{<\vec{v}_i;\vec{v}_i>}\vec{v}_i$

H) V EV con PI, $\vec{x}\in V$,B es base ortogonal de V

$(B=\{\vec{v}_1;\vec{v}_2;...;\vec{v}_n\}\subset V\wedge B\ es\ LI\wedge V=gen(B)\wedge<\vec{v}_i;\vec{v}_j>=0\ \ si\ i\neq j)$

T) $\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\frac{<\vec{x};\vec{v}_i>}{<\vec{v}_i;\vec{v}_i>}\vec{v}_i$

Ortogonalidad

TEOREMA 2 (CONT.)

Sea $B=\{\vec{v}_1;\vec{v}_2;...;\vec{v}_n\}$ una base ortogonal de un EV V con PI, todo vector $\vec{x}\subset V$

puede escribirse como: $\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\frac{<\vec{x};\vec{v}_i>}{<\vec{v}_i;\vec{v}_i>}\vec{v}_i$

D) $\vec{x}=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+...+\alpha_n\vec{v}_n$ (planteo CL igualada a $\vec{x}$)

$<\vec{x};\vec{v}_1>=<\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+...+\alpha_n\vec{v}_n;\vec{v}_1>$ (PI de $\vec{x}$ con $\vec{v}_1$)

$<\vec{x};\vec{v}_1>=<\alpha_1\vec{v}_1;\vec{v}_1>+<\alpha_2\vec{v}_2;\vec{v}_1>+...+<\alpha_n\vec{v}_n;\vec{v}_1>$ (Condición de Aditividad)

$<\vec{x};\vec{v}_1>=\alpha_1<\vec{v}_1;\vec{v}_1>+\alpha_2<\vec{v}_2;\vec{v}_1>+...+\alpha_n<\vec{v}_n;\vec{v}_1>$ (Condición de Homogeneidad)

$<\vec{x};\vec{v}_1>=\alpha_1<\vec{v}_1;\vec{v}_1>+\alpha_2 0+...+\alpha_n 0$ (por ser conjunto ortogonal)

$<\vec{x};\vec{v}_1>=\alpha_1<\vec{v}_1;\vec{v}_1>\Rightarrow\alpha_1=\frac{<\vec{x};\vec{v}_1>}{<\vec{v}_1;\vec{v}_1>}$ (con: $<\vec{v}_1;\vec{v}_1>\neq 0$)

Si se repite el proceso $\forall\,\vec{v}_i\in B$ se podrá probar que: $\alpha_i=\frac{<\vec{x};\vec{v}_i>}{<\vec{v}_i;\vec{v}_i>}\forall\,i\in[1,n]$.

Ortogonalidad

EJEMPLO:

$V \equiv \mathbb{R}^3.\ B=\{(1;0;-1),(1;0;1),(0;-5;0)\}$. Se pide:

a) ¿Es B base ortogonal de $\mathbb{R}^3$?

b) Escribir al vector: $\vec{x}=(3;-7;1)$ como CL de B.

a) Por Teorema 10: B es Base $\Leftrightarrow B\ es\ LI \vee V=gen(B)$

$$det(B)=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -5 & 0\end{vmatrix}=(-1)^{3+2}(-5)(1-(-1))=10\neq 0 \Rightarrow B\ es\ LI \Rightarrow B\ es\ base\ de\ \mathbb{R}^3$$

LP

Ortogonalidad

EJEMPLO:

$V \equiv \mathbb{R}^3.\ B=\{\overset{\vec{v}_1}{\boxed{(1;0;-1)}},\overset{\vec{v}_2}{\boxed{(1;0;1)}},\overset{\vec{v}_3}{\boxed{(0;-5;0)}}\}$. Se pide:

a) ¿Es B base ortogonal de $\mathbb{R}^3$?

b) Escribir al vector: $\vec{x}=(3;-7;1)$ como CL de B.

a) Base Ortogonal:

$<\vec{v}_1;\vec{v}_2>=0$

$<\vec{v}_1;\vec{v}_3>=0$

$<\vec{v}_2;\vec{v}_3>=0$

Como $<\vec{v}_i;\vec{v}_j>=0\ \forall\ i\neq j \Rightarrow B\ es\ base\ ortogonal.$

b) Por Teorema anterior: $\vec{x}=\sum_{i=1}^{3}\frac{<\vec{x};\vec{v}_i>}{<\vec{v}_i;\vec{v}_i>}\vec{v}_i \Rightarrow \vec{x}=\frac{<\vec{x};\vec{v}_1>}{<\vec{v}_1;\vec{v}_1>}\vec{v}_1+\frac{<\vec{x};\vec{v}_2>}{<\vec{v}_2;\vec{v}_2>}\vec{v}_2+\frac{<\vec{x};\vec{v}_3>}{<\vec{v}_3;\vec{v}_3>}\vec{v}_3$

Ortogonalidad

EJEMPLO:

$V \equiv \mathbb{R}^3 .\ B=\{(1;0;-1),(1;0;1),(0;-5;0)\}$. Se pide:

a) ¿Es B base ortogonal de $\mathbb{R}^3$?

b) Escribir al vector: $\vec{x}=(3;-7;1)$ como CL de B.

b) $\alpha_1=\dfrac{<\vec{x};\vec{v}_1>}{<\vec{v}_1;\vec{v}_1>}=\dfrac{<(3;-7;1);(1;0;-1)>}{<(1;0;-1);(1;0;-1)>}=1$

$\alpha_2=\dfrac{<\vec{x};\vec{v}_2>}{<\vec{v}_2;\vec{v}_2>}=\dfrac{<(3;-7;1);(1;0;1)>}{<(1;0;1);(1;0;1)>}=2$

$\alpha_3=\dfrac{<\vec{x};\vec{v}_3>}{<\vec{v}_3;\vec{v}_3>}=\dfrac{<(3;-7;1);(0;-5;0)>}{<(0;-5;0);(0;-5;0)>}=\dfrac{7}{5}$

Luego: $\vec{x}=1(1;0;-1)+2(1;0;1)+\dfrac{7}{5}(0;-5;0)=(3;-7;1)$

Ortonormalidad

CONJUNTO ORTONORMAL

$A=\{v_1;v_2;\ldots;v_n\}\subset V$ *es un conjunto ortonormal si cumple*:

$<\vec{v}_i;\vec{v}_j>=\delta_{ij}$

Esto es:

$<\vec{v}_i;\vec{v}_j>=0$ si $i\neq j$

$<\vec{v}_i;\vec{v}_j>=1$ *si* $i=j$

ya que: *si* $i=j$: $<\vec{v}_i;\vec{v}_j>=||\vec{v}_1||^2=1$

Ortonormalidad

BASE ORTONORMAL

$B=\{v_1;v_2;...;v_n\}\subset V$, B es base ortonormal $\Leftrightarrow B\ es\ base \wedge B\ es\ conjunto\ ortonormal$.

Esto es:

$B\ es\ LI \wedge V=gen(B)$ (B es LI)

$<\vec{v}_i;\vec{v}_j>=0$ si $i\neq j \wedge <\vec{v}_i;\vec{v}_j>=||\vec{v}_1||^2=1, si\ i=j$ (B es conjunto Ortonormal)

Ortonormalidad

COROLARIO

Si $B=\{v_1;v_2;...;v_n\}$ es base ortonormal de $V\Rightarrow\forall\vec{x}\in V,\vec{x}$ puede escribirse:

$$\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}<\vec{x};\vec{v}_i>\vec{v}_i$$

$$\vec{x}=<\vec{x};\vec{v}_1>\vec{v}_1+<\vec{x};\vec{v}_2>\vec{v}_2+...+<\vec{x};\vec{v}_n>\vec{v}_n$$

Ortonormalidad

EJEMPLO:

$V \equiv \mathbb{R}^3$. $B=\{(\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}}),(0;1;0),(\frac{-1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}})\}$. Se pide:

a) ¿Es B base ortonormal de $\mathbb{R}^3$?
b) Escribir al vector: $\vec{x}=(3;-2;5)$ como CL de B.

a) Por Teorema 10: B es Base $\Leftrightarrow B\, es\, LI \vee V=gen(B)$

$$det(B)=\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}=(-1)^{2+2}(\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}})-(\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{-1}{\sqrt{2}})=1\neq 0 \Rightarrow B\, es\, LI \Rightarrow B\, es\, base\, de\, \mathbb{R}^3$$

LP

Ortonormalidad

EJEMPLO:

$V \equiv \mathbb{R}^3$. $B=\{\overset{\vec{v}_1}{\boxed{(\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}})}},\overset{\vec{v}_2}{\boxed{(0;1;0)}},\overset{\vec{v}_3}{\boxed{(\frac{-1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}})}}\}$. Se pide:

a) ¿Es B base ortonormal de $\mathbb{R}^3$?
b) Escribir al vector: $\vec{x}=(3;-2;5)$ como CL de B.

a) Base Ortonormal:

$<\vec{v}_1;\vec{v}_2>=0$ $\qquad$ $<\vec{v}_1;\vec{v}_1>=1$
$<\vec{v}_1;\vec{v}_3>=0$ $\qquad$ $<\vec{v}_2;\vec{v}_2>=1$
$<\vec{v}_2;\vec{v}_3>=0$ $\qquad$ $<\vec{v}_3;\vec{v}_3>=1$

Como $<\vec{v}_i;\vec{v}_j>=0\ \forall\, i\neq j \wedge <\vec{v}_i;\vec{v}_j>=1\ \forall\, i=j \Rightarrow B\, es\, base\, ortonormal$.

Ortonormalidad

EJEMPLO:

$V\equiv\mathbb{R}^{3.}\ B=\{(\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}}),(0;1;0),(\frac{-1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}})\}$. Se pide:

a) ¿Es B base ortonormal de $\mathbb{R}^3$?

b) Escribir al vector: $\vec{x}=(3;-2;5)$ como CL de B.

b) $\alpha_1=<\vec{x};\vec{v}_1>=<(3;-2;5);(\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}})>=\frac{8}{\sqrt{2}}$

$\alpha_2=<\vec{x};\vec{v}_2>=<(3;-2;5);(0;1;0)>=-2$

$\alpha_3=<\vec{x};\vec{v}_3>=<(3;-2;5);(\frac{-1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}})>=\frac{2}{\sqrt{2}}$

Luego: $\vec{x}=\frac{8}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}})+(-2)(0;1;0)+\frac{2}{\sqrt{2}}(\frac{-1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}})=(3;-2;5)$

Algunas Demostraciones

DE LA HOJA COMPLEMENTO DE ESPACIOS VECTORIALES

1) Demostrar que si $\{v_1;v_2\}$ es LI $\Rightarrow\{\vec{v}_1+\vec{v}_2;\vec{v}_2\}$ es LI

H) $\{\vec{v}_1;\vec{v}_2\}$ es LI

T) $\{\vec{v}_1+\vec{v}_2;\vec{v}_2\}$ es LI

D) $\alpha(\vec{v}_1+\vec{v}_2)+\beta\vec{v}_2=\vec{0}$

$\alpha\vec{v}_1+\alpha_1\vec{v}_2+\beta\vec{v}_2=\vec{0}$ (prop. distributiva del producto de escalar y la suma de vectores)

$\alpha\vec{v}_1+(\alpha+\beta)\vec{v}_2=\vec{0}$ (prop. distributiva del producto de vector y la suma de escalares)

Por hipótesis: por ser LI

$\begin{cases}\alpha=0\\ \alpha+\beta=0\end{cases}$

Luego: $\{\vec{v}_1+\vec{v}_2;\vec{v}_2\}$ es LI.

Algunas Demostraciones

DE LA HOJA COMPLEMENTO DE ESPACIOS VECTORIALES

3) Todo vector no nulo de un espacio vectorial es LI

H) $A=\{\vec{v}_1\}\wedge\vec{v}_1\neq\vec{0}$

T) A es LI.

D) $\alpha\vec{v}_1=\vec{0}$ (LI/LD: planteo CL igualada al vector nulo).

$\alpha=0$ ($\alpha\vec{v}_1=\vec{0}\Leftrightarrow\alpha=0\vee\vec{v}_1=\vec{0}$, pero $\vec{v}_1\neq\vec{0}$ por H)

Algunas Demostraciones

DE LA HOJA COMPLEMENTO DE ESPACIOS VECTORIALES

4) El vector nulo es LD

H) $A=\{\vec{0}\}$

T) A es LD.

D) $\alpha\vec{0}=\vec{0}$ (LI/LD: planteo CL igualada al vector nulo).

$\forall\,\alpha\neq0:\alpha\vec{0}=\vec{0}\Rightarrow A$ es LD

Algunas Demostraciones

DE LA HOJA COMPLEMENTO DE ESPACIOS VECTORIALES

5) Todo conjunto que contenga al vector nulo es LD

H) $A=\{\vec{v}_1;\vec{v}_2;\ldots;\vec{v}_n;\vec{0}\}$

T) A es LD.

D) $\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\ldots+\alpha_n\vec{v}_n+\alpha_{n+1}\vec{0}=\vec{0}$ (LI/LD: planteo CL igualada al vector nulo).

$\exists\,\alpha_{n+1}\neq 0/\alpha_{n+1}\vec{0}=\vec{0}\Rightarrow A$ es LD

Ejercicios de la Guía

Ejercicio M6: b) Sean : $V\,EV, S\subset V, dim(s)=p, A$ base de S, B base del Subespacio complemento ortogonal de $S, A=\{\vec{v}_1;\vec{v}_2;\ldots;\vec{v}_p\}, B=\{\vec{w}_1;\vec{w}_2;\ldots;\overrightarrow{w_{n-p}}\}$.

Demostrar que si se define el conjunto $c=\{\vec{v}_1;\vec{v}_2;\ldots;\vec{v}_p;\vec{w}_1;\vec{w}_2;\ldots;\overrightarrow{w_{n-p}}\}C\subset V, C$ es base de V.

$H)\; V\,EV, S\subset V, A=\{\vec{v}_1;\vec{v}_2;\ldots;\vec{v}_p\}, A\;base\;de\;S, S^{\perp}\subset V, B=\{\vec{w}_1;\vec{w}_2;\ldots;\overrightarrow{w_{n-p}}\},$

$B\;base\;de\;S^{\perp}, C=\{\vec{v}_1;\vec{v}_2;\ldots;\vec{v}_p;\vec{w}_1;\vec{w}_2;\ldots;\overrightarrow{w_{n-p}}\}$

$T)\; C\;es\;base\;de\;V, dim(C)=n$

$D)$ Se necesita demostrar que C es LI y V=gen(C) .

C es LI: A es base de S$\Rightarrow$ A es LI.

$\forall\, j\in[1,n-p]:\vec{w}_j\in B:\vec{w}_j\notin S$ (por ser $\vec{w}\in S^{\perp}$) $\Rightarrow\{\vec{v}_1;\vec{v}_2;\ldots\vec{v}_p\}\cup\{\vec{w}_j\}$ es LI (Teo 7.a).

Luego también $\{\vec{v}_1;\vec{v}_2;\ldots\vec{v}_p\}\cup\{\vec{w}_1;\vec{w}_2;\ldots;\overrightarrow{w_{n-p}}\}$ es LI.

$C=A\cup B\,es\,LI$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio M6: Cont.

$V = gen(C)$:

$S = gen(A): \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + ... + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{X} \wedge dim(X) = p$

$S^{\perp} = gen(B): \beta_1 \vec{w}_1 + \beta_2 \vec{w}_2 + ... + \beta_{n-p} \overrightarrow{w_{n-p}} = \vec{Y} \wedge dim(Y) = n - p$

$S \cup S^{\perp}: \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + ... + \alpha_n \vec{v}_n + \beta_1 \vec{w}_1 + \beta_2 \vec{w}_2 + ... + \beta_{n-p} \overrightarrow{w_{n-p}} = \vec{X} + \vec{Y}$

$con: dim(\vec{X}) + dim(\vec{Y}) = p + n - p = n$

Luego: V = gen(C) (por Teorema 12)

Finalmente: C es base de V y dim(V) = n

Ejercicios de la Guía

Ejercicio M6: c) Sea V EV, S $\subset$ V. Si el conjunto A constituye una base ortonormal para S y el conjunto B corresponde a una base ortonormal del subespacio Complemento ortogonal donde:

$A = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; ...; \vec{v}_n\}, dim(S) = p, B = \{\vec{w}_1; \vec{w}_2; ...; \overrightarrow{w_{n-p}}\}, dim(S^{\perp}) = n - p$

El conjunto: $C = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; ...; \vec{v}_n; \vec{w}_1; \vec{w}_2; ...; \overrightarrow{w_{n-p}}\}$ constituye una base ortonormal de V

$H)\ V\ EV, S \subset V . S^{\perp} \subset V .$

$A = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; ...; \vec{v}_n\}, A\ base\ de\ S, \langle v_i; v_j \rangle = \delta_{i,j}$ (A es base ortonormal de S)

$B = \{\vec{w}_1; \vec{w}_2; ...; \overrightarrow{w_{n-p}}\}, B\ base\ de\ S^{\perp}, \langle w_i; w_j \rangle = \delta_{i,j}$ (B es base ortonormal de $S^{\perp}$)

$C = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; ...; \vec{v}_n; \vec{w}_1; \vec{w}_2; ...; \overrightarrow{w_{n-p}}\}$

$T)$ C es base ortonormal.

Ejercicios de la Guía

Ejercicio M6: cont.

D) Para demostrar que C es base ortonormal hay que demostrar que C es base y C es conjunto ortonormal.

$C=\{\vec{v}_1;\vec{v}_2;\ldots;\vec{v}_p;\vec{w}_1;\vec{w}_2;\ldots;\overrightarrow{w_{n-p}}\}$.C es base de V por ej. anterior.

$B=\{\vec{w}_1;\vec{w}_2;\ldots;\overrightarrow{w_{n-p}}\}=\{\overrightarrow{v_{p+1}};\overrightarrow{v_{p+2}};\ldots;\overrightarrow{v_{p+n-p}}\}$

Luego: $C=\{\vec{v}_1;\vec{v}_2;\ldots;\vec{v}_n\}$ es base de V.

$Si: 1\leq i\leq p \wedge 1\leq j\leq p: \langle\vec{v}_i;\vec{v}_j\rangle=\delta_{i;j}$ (por ser A base ortonormal).

$Si: p+1\leq i\leq n \wedge p+1\leq j\leq n: \langle\vec{v}_i;\vec{v}_j\rangle=\delta_{i;j}$ (por ser B base ortonormal).

Luego: C es conjunto ortonormal

Luego: C es base ortonormal de V

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 14:

14.1. Usando $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & sen\,\alpha\\ -sen\,\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ demostrar que los vectores fila constituyen un conjunto ortonormal. $\vec{v}_1=(\cos\alpha; sen\,\alpha), \vec{v}_2=(-sen\,\alpha;\cos\alpha), A=\{\vec{v}_1;\vec{v}_2\}$

A es conjunto ortonormal si cumple:

$<\vec{v}_1;\vec{v}_2>=0$

$<\vec{v}_1;\vec{v}_1>=1\wedge<\vec{v}_2;\vec{v}_2>=1$

Reemplazando por datos:

$<\vec{v}_1;\vec{v}_2>=<(\cos\alpha; sen\,\alpha);(-sen\,\alpha;\cos\alpha;)>=\cos\alpha.(-sen\,\alpha)+sen\,\alpha.\cos\alpha=0$

$<\vec{v}_1;\vec{v}_1>=<(\cos\alpha; sen\,\alpha);(\cos\alpha; sen\,\alpha)>=(\cos\alpha)^2+(sen\,\alpha)^2=\cos^2\alpha+sen^2\alpha=1$

$<\vec{v}_2;\vec{v}_2>=<(-sen\,\alpha;\cos\alpha;);(-sen\,\alpha;\cos\alpha;)>=(-sen\,\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

Luego: A es un conjunto ortonormal.

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 14:

14.2. Sean: $\vec{a}=(1;2;-1), S=\{(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3 / x_1=x_3 \wedge x_2=0\}$. Demostrar que $\vec{a}\perp S$

Armado de una base de S: Si $\vec{x}\in S \Rightarrow \vec{x}=(x_1;0;x_1)$

Si $x_1=\lambda : \vec{x}=\lambda(1;0;1) \quad \forall \lambda\in\mathbb{R}$ (una recta que pasa por el origen, dirigida por $v=(1;0;1)$.

luego: $B_S=\{\vec{v}=(1;0;1)\}$

$A=\{\vec{a}=(1;2;-1), \vec{v}=(1;0;1)\}$

A es conjunto ortogonal $\Leftrightarrow <\vec{a};\vec{v}>=0$

$<\vec{a};\vec{v}>=<(1;2;-1);(1;0;1)>=0$

Luego: A es conjunto ortogonal.

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 14:

14.5. Hallar $a\in\mathbb{R} / B_2$ sea base ortonormal de $\mathbb{R}^3$

con $B_2=\{(0;1;0),(\frac{-4}{5};0;\frac{3}{5}),(\frac{3}{5};0;a)\}$

B_2 es Base ortonormal $\Leftrightarrow B_2$ es LI $\wedge B_2$ es conjunto ortonormal

B_2 es LI $\Leftrightarrow det(B_2)\neq 0$

$$det(B_2)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & a \end{vmatrix}=(-1)^{1+2}((\frac{-4}{5}a)-\frac{9}{25})=\frac{4}{5}a+\frac{9}{25}$$

$$B_2 es\ LI \Leftrightarrow det(B_2)\neq 0 \Leftrightarrow a\neq\frac{-9}{20}$$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 14:

14.5. Hallar $a \in \mathbb{R} / B_2$ sea base ortonormal de $\mathbb{R}^3$

con $B_2 = \{(0;1;0),(\frac{-4}{5};0;\frac{3}{5}),(\frac{3}{5};0;a)\}$

B_2 es Base ortonormal $\Leftrightarrow B_2$ es LI $\wedge B_2$ es conjunto ortonormal

B_2 es conjunto ortonormal si cumple:

$<\vec{v}_1;\vec{v}_2> = <\vec{v}_1;\vec{v}_3> = <\vec{v}_2;\vec{v}_3> 0$

$<\vec{v}_1;\vec{v}_1> = <\vec{v}_2;\vec{v}_2> = <\vec{v}_3;\vec{v}_3> = 1$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 14:

14.5. Hallar $a \in \mathbb{R} / B_2$ sea base ortonormal de $\mathbb{R}^3$

con $B_2 = \{(0;1;0),(\frac{-4}{5};0;\frac{3}{5}),(\frac{3}{5};0;a)\}$

$<\vec{v}_1;\vec{v}_2> = <(0;1;0);(\frac{-4}{5};0;\frac{3}{5})> = 0$

$<\vec{v}_1;\vec{v}_3> = <(0;1;0);(\frac{3}{5};0;a)> = 0$

$<\vec{v}_2;\vec{v}_3> = <(\frac{-4}{5};0;\frac{3}{5});(\frac{3}{5};0;a)> = \frac{-12}{25} + \frac{3}{5}a$

$<\vec{v}_1;\vec{v}_1> = <(0;1;0);(0;1;0)> = 1$

$<\vec{v}_2;\vec{v}_2> = <(\frac{-4}{5};0;\frac{3}{5});(\frac{-4}{5};0;\frac{3}{5})> = 1$

$<\vec{v}_3;\vec{v}_3> = <(\frac{3}{5};0;a);(\frac{3}{5};0;a)> = \frac{9}{25} + a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{16}{25}$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 14:

14.5. Hallar $a \in \mathbb{R} / B_2$ sea base ortonormal de $\mathbb{R}^3$

con $B_2 = \{(0;1;0),(\frac{-4}{5};0;\frac{3}{5}),(\frac{3}{5};0;a)\}$

$$\begin{cases} <\vec{v}_2;\vec{v}_3> = <(\frac{-4}{5};0;\frac{3}{5});(\frac{3}{5};0;a)> = \frac{-12}{25} + \frac{3}{5}a \\ <\vec{v}_3;\vec{v}_3> = <(\frac{3}{5};0;a);(\frac{3}{5};0;a)> = \frac{9}{25} + a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{16}{25} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{-12}{25} + \frac{3}{5}a = 0 \\ a^2 = \frac{16}{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{5} \\ a = \frac{4}{5} \vee a = \frac{-4}{5} \end{cases} \Rightarrow \text{Luego: para } a = \frac{4}{5} \;\; B_2 \text{ es base ortonormal}$$