Álgebra y Geometría Analítica

Clase 21: Base y Dimensión

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

Unidad 4 – Clase 21

01 Repaso de clases anteriores

02 Base y Dimensión de un EV

03 Ejercicios de la Guía

Repaso de las Clases Anteriores

DEFINICIÓN: ESPACIO VECTORIAL

Sean:

V : Conjunto no vacío.

$+$: Operación suma.

$\mathbb{R}$: El conjunto de los números reales

$.$: Operación que relaciona un elemento de $\mathbb{R}$ y V

$(V;+;\mathbb{R};.)$ *es espacio vectorial si se cumple los* 10 *axiomas de espacios vectoriales*

Repaso de las Clases Anteriores

DEFINICIÓN: ESPACIO VECTORIAL

AXIOMAS DE ESPACIOS VECTORIALES:

$\forall \vec{x} \in V, \forall \vec{y} \in V, \forall \vec{z} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}:$

A 1) Ley de composición interna: $(\vec{x}+\vec{y}) \in V$
A 2) Propiedad Conmutativa: $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$
A 3) Propiedad Asociativa: $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$
A 4) Existencia de elemento neutro: $\exists \vec{0} \in V / \vec{x}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{x}=\vec{x}$
A 5) Existencia de Simétrico (u opuesto): $\exists -\vec{x} \in V / \vec{x}+(-\vec{x})=(-\vec{x})+\vec{x}=\vec{0}$
A 6) Ley de composición externa: $\alpha \vec{x} \in V$
A 7) Propiedad Asociativa mixta: $(\alpha \beta)\vec{x}=\alpha(\beta \vec{x})$
A 8) Existencia de escalar neutro: $\exists 1 \in \mathbb{R} / 1\vec{x}=\vec{x}$
A 9) Distributiva respecto de la suma de escalares: $(\alpha+\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{x}$
A10) Distributiva respecto de la suma de vectores: $\alpha(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$

Repaso de las Clases Anteriores

DEFINICIÓN: SUBESPACIO

$Si\ V\ es\ EV\ y\ S \subset V \wedge S \neq \emptyset \Rightarrow S\ es\ suebspacio\ de\ V \Leftrightarrow S\ cumple\ los\ 10\ axiomas\ de\ EV.$

PROPIEDADES QUE SE DEDUCEN DE LOS AXIOMAS DE E.V.

$I\ )\ 0\vec{x}=\vec{0}_v$

$II\ )\ \alpha\vec{0}_v=\vec{0}_v$

$III\ )\ (-1)\vec{x}=-\vec{x}$

$IV\ )\ \alpha\vec{x}=\vec{0}_v \Rightarrow \alpha=0 \vee \vec{x}=\vec{0}_v$

CONDICIONES SUFICIENTES PARA QUE S SEA SUBESPACIO DE V

I) $S \subset V$

II) $S \neq \emptyset$

III) LCI: $\forall \vec{x} \in S \wedge \forall \vec{y} \in S : (\vec{x}+\vec{y}) \in S$

IV) LCE: $\forall \vec{x} \in S \wedge \forall \alpha \in \mathbb{R} : (\alpha\vec{x}) \in S$

Repaso de las Clases Anteriores

PROPIEDADES

I) $\vec{0} \in S \Rightarrow S$ puede ser subespacio. Pero si $\vec{0} \notin S \Rightarrow S$ no es subespacio de V

II) $S_1\ y\ S_2$ son subespacios de $S \Rightarrow S_1 \cap S_2$ es subespacio de S

III) Los subespacios triviales son: $S=\{\vec{0}\} \wedge S \equiv V$ (es decir: $S \subset V \wedge V \subset S$)

Repaso de las Clases Anteriores

COMBINACION LINEAL

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial (EV), se dice que un vector $\vec{v} \in \mathbb{V}$ es combinación lineal (C.L) de un conjunto de vectores, si y solo si existen escalares pertenecientes a $\mathbb{R}$, tal que $\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n$

$$Sea\ V\ EV.\ \ Sea\ A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, A \neq \emptyset, A \subset V.$$

$$\vec{v} \in V\ es\ CL\ de\ A \Leftrightarrow \exists\, \alpha_i \in \mathbb{R} / \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . \vec{v}_i$$

Repaso de las Clases Anteriores

COMBINACION LINEAL

Para tener en cuenta:

- Cada vez que se busca verificar que un vector es CL de los vectores de un conjunto A, se obtiene un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son los escalares de la CL.
- Si el sistema es SC ==> los escalares existen y la CL es posible.
- Si el sistema es SI ==> no existen los escalares, y la CL no es posible.

Repaso de las Clases Anteriores

SUBESPACIO GENERADO

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial (EV) y el conjunto $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots\dots\dots, \vec{v}_n\}$, llamaremos subespacio generado por A al conjunto de todos los vectores que se pueden escribir como $C.L$ de los vectores de A.

$gen(A) = S$ (S es el subespacio generado por A)

$S = gen(A) = \{\vec{x} \in V / \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . \vec{v}_i\}$ ($\vec{x}$ es CL de A)

Repaso de las Clases Anteriores

SISTEMA GENERADOR

Sea V un espacio vectorial (EV) y el conjunto de vectores $A = \{\vec{v}_1 ; \vec{v}_2 ; \dots ; \vec{v}_n\}$ con $A \subset V$. Diremos que A es un $Sistema\, Generador\, de\, V$ sí y solo si todo vector $\vec{v} \in V$, se puede expresar como CL de los vectores de A.

$$A\, es\, SG\, de\, V \Leftrightarrow \forall\, \vec{v} \in V : \vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots \alpha_n \vec{v}_n$$

Si un conjunto de vectores A no alcanza a generar todo el espacio vectorial V entonces A no será $SG\, de\, V$ sino que generará un subespacio de V.

Repaso de las Clases Anteriores

INDEPENDENCIA LINEAL

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial (EV) y $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots \ldots \ldots, \vec{v}_n\} \subset \mathbb{V}$

Diremos que A es Linealmente Independiente (L. I) $\leftrightarrow \vec{O} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n \to \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

Es decir, que si un conjunto es L. I, entonces debe verificar que la **única** C.L de los vectores de A que expresa al vector nulo es aquella en la que todos los escalares son cero.

Del mismo modos diremos que $A\ es\ L.D \leftrightarrow \vec{O} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n \to \exists\alpha_i \neq 0\ \forall i \in R$

Un conjunto A es LI $\Leftrightarrow$ La CL igualada al vector nulo es posible solo si $\forall i \in \mathbb{N}: \alpha_i = 0$
Del mismo modo:
Un conjunto A es LD $\Leftrightarrow$ La CL igualada al vector nulo es posible para algún $\alpha_i \neq 0\ \forall i \in \mathbb{N}$

$$\vec{O} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n \begin{cases} \alpha_i = 0\ \forall i \in R \to A\ es\ LI\ (\text{C. L única}) \\ \alpha_i \neq 0\ \forall i \in R \to A\ es\ LD\ (\text{C. L múltiple}) \end{cases}$$

Repaso de las Clases Anteriores

INDEPENDENCIA LINEAL: OBSERVACIONES

- Todo conjunto que contiene al vector nulo es L.D
- Todo conjunto unitario es L.I si y solo si, no contiene al vector nulo.
- Toda vez que queramos analizar si un conjunto es LI o LD, se obtiene un sistema de ecuaciones homogéneo.
- La dependencia lineal se dará cuando el sistema sea S.C.I (hay más soluciones además de la trivial)
  Será L.I cuando el sistema sea S.C.D (solución única, la trivial)
- Si el sistema es cuadrado, es decir n vectores de n componentes, se puede aplicar determinantes a una matriz cuyas filas o columnas sean los vectores del conjunto A

Solo en sistemas cuadrados

$$det(A) \neq 0 \to Solución\ Trivial\ \text{única} \to L.I$$

$$det(A) = 0 \to Infinitas\ soluciones \to L.D$$

Base y dimensión de un EV

BASE DE UN EV

Definición:
Un conjunto de vectores B de un espacio vectorial V constituye una base de dicho espacio vectorial sí y solo sí, B es linealmente independiente y B es sistema generador para el espacio vectorial.

$V\ EV, B \subset V$
B es Base de $V \Leftrightarrow B\ es\ LI \wedge V = gen(B)$

Base y dimensión de un EV

DIMENSIÓN DE UN EV

Definición:
La dimensión de un espacio vectorial es la cantidad de vectores que forman una base del espacio vectorial.

$V\ EV,\ B \subset V, B$ Base de $V \Rightarrow dim(V) = \#(B)$

Base y dimensión de un EV

BASE

Ejemplo:
Hallar una base para el conjunto de todas las matrices simétricas de orden 2.

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ es una base para el conjunto de matrices simétricas de orden 2.}$$

La dimensión del espacio de las matrices simétricas de orden 2 es 3.

Base y dimensión de un EV

BASE

Ejemplo: Sea B = { $\overline{v}_1 = (3\ ;\ -2)$; $\overline{v}_2 = (1\ ;\ 1)$}. ¿Es B una base de R^2?
Debe demostrarse que B es LI y que gen(B) = R^2
B es LI:

Armo CL igualada al $\vec{0}_v$: $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 = \vec{0}_v$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

r(A) = r(A') = # inc ==> SCD
Luego: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Rightarrow B\ \ es\ \ LI$

gen(B) = R^2:

Armo CL igualada al vector genérico $\vec{x}$: $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 = \vec{x}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & x_1 \\ -2 & 1 & x_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & x_1 \\ -5 & 0 & x_2 - x_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & x_1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{2}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2 \\ 1 & 0 & \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_2 \end{array}\right)$$

Base y dimensión de un EV

BASE

Ejemplo: Sea B = { $\overline{v}_1$ = (3 ; –2); $\overline{v}_2$ = (1 ; 1)}. ¿Es B una base de R^2?
gen(B) = R^2:

Se tiene entonces que: $\alpha_1=\frac{1}{5}x_1-\frac{1}{5}x_2 \wedge \alpha_2=\frac{2}{5}x_1+\frac{3}{5}x_2$

Reemplazo α_1 y α_2 en la CL:

$$\left(\frac{1}{5}x_1-\frac{1}{5}x_2\right)(3;-2)+\left(\frac{2}{5}x_1+\frac{3}{5}x_2\right)(1;1)=(x_1;x_2)$$

$$\left(\frac{3}{5}x_1-\frac{3}{5}x_2;-\frac{2}{5}x_1+\frac{2}{5}x_2\right)+\left(\frac{2}{5}x_1+\frac{3}{5}x_2;\frac{2}{5}x_1+\frac{3}{5}x_2\right)=(x_1;x_2)$$

¡Verifica!

Luego: B es una base de R^2

Base y dimensión de un EV

BASE

Ejemplo: Sea B = { $\overline{v}$ = (1 ; –2)}. ¿Es B una base de R^2?
B es LI:
$\alpha.\overline{v} = 0v$ ==> α.(1 ; –2) = (0 ; 0) ==> $\alpha = 0$ ==> B es LI

gen(B) = R^2:
$\alpha\vec{v}=0_v \Rightarrow \alpha(1;-2)=(x;y)$

$$\begin{pmatrix} 1 & | & x \\ -2 & | & y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & | & x \\ 0 & | & y+2x \end{pmatrix} \Rightarrow r(A)=r(A')=1 \Rightarrow y+2x=0 \Rightarrow gen(B)\neq \mathbb{R}^2 (gen(B): una\, recta)$$

Luego: B NO es una base de R^2

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 5:

Ejercicio 5.1. Dado el conjunto de vectores analizar si es **(a)** L.I **(b)** sistema de generadores de R^3

$A = \{\vec{a} = (1,1,1), \vec{b} = (1,-1,5), \vec{c} = (1,3,-3)\}$

Analizamos la dependencia lineal

$\vec{O} = \alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + \alpha_3\vec{c}$

$(0,0,0) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,-1,5) + \alpha_3(1,3,-3)$

$rg(A) = rg(A') = 2 < n = 3$

$SCI \rightarrow A\ es\ LD$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 0 \\ 1 & -1 & 3 & : & 0 \\ 1 & 5 & -3 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & -2 & 2 & : & 0 \\ 0 & 4 & -4 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & -1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 1 & -1 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & : & 0 \\ 0 & -1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \rightarrow -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \end{matrix}$$

Al ser el conjuno A L.D, entonces no es Sistema generador de R^3 pero analizamos qué Subespacio genera A

$(x,y,z) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,-1,5) + \alpha_3(1,3,-3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & x \\ 1 & -1 & 3 & : & y \\ 1 & 5 & -3 & : & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & x \\ 0 & -2 & 2 & : & y-x \\ 0 & 4 & -4 & : & z-x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & -1 & 1 & : & (y-x)/2 \\ 0 & 4 & -4 & : & z-x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & : & 0 \\ 0 & -1 & 1 & : & (y-x)/2 \\ 0 & 0 & 0 & : & \boxed{z-x} \end{pmatrix}$$

El sistema será S.C si $z - x = 0$

$S_{gen(A)} = \{(x,y,z) \in R^3 \ / \ z - x = 0\}$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 5:

Ejercicio 5.2. Dado el conjunto de vectores A, definir el subespacio que genera A indicando base y dimensión.

$A = \left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

Subespacio generado

$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Buscamos un S.C

Condiciones para un SC

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & : & x \\ -1 & -1 & 2 & : & y \\ 0 & 0 & 0 & : & z \\ 2 & -3 & 0 & : & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & : & x \\ 0 & 0 & 0 & : & y+x \\ 0 & 0 & 0 & : & z \\ 0 & -5 & 4 & : & t-2x \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow y + x = 0 \\ \rightarrow z = 0 \end{matrix}$$

$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -x \\ 0 & t \end{pmatrix}$

$S_{gen(A)} = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in R^{2\times 2} \ / \ x + y = 0 \wedge z = 0\right\}$

$S_{gen(A)} = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in R^{2\times 2} \ / \ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -x \\ 0 & t \end{pmatrix} \ \forall x \in R, \forall t \in R\right\}$

Base de A

$B_{S_{gen(A)}} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

Dimensión de la Base

$dim(gen(A)) = 2$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 5:

Ejercicio 5.2. (c) Hallar la intersección del subespacio generado por $B_{S_{(A)}}$ si a $= -1$ y $b = 0$ con S, siendo S el subespacio definido por:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in R^{2\times 2} / \ x + t = 0 \wedge t + y = 0 \wedge z = 0 \right\} \qquad B_{S_{gen(A)}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Analizamos la condición que debe cumplir S

$$\begin{cases} x + t = 0 & \rightarrow x = -t \\ y + t = 0 & \rightarrow y = -t \\ z = 0 \end{cases} \qquad S = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in R^{2\times 2} / \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t & -t \\ 0 & t \end{pmatrix} \ \forall t \in R \right\}$$

Expresamos el Subespacio S_A

$$S_A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in R^{2\times 2} / \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & -x_1 \\ 0 & x_4 \end{pmatrix} \ \forall t \in R \right\}$$

Intersección $S \cap S_A$

$$\begin{pmatrix} -t & -t \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & -x_1 \\ 0 & x_4 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = -t \\ -x_1 = -t \\ x_4 = t \end{cases}$$

Sumando las dos primeras ecuaciones

$$x_1 - x_1 = -2t \rightarrow 0 = -2t \rightarrow t = 0$$

$$\boxed{S \cap S_A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 6:

6.1 Los siguientes ítems se pueden contestar sin necesidad de realizar cálculo alguno muy elaborado. Existe una justificación elemental en cada caso.

6.1.a Sea S1 el subespacio formado por las matrices diagonales de orden 2. El conjunto A no puede constituir una base.

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 6:

6.1 Los siguientes ítems se pueden contestar sin necesidad de realizar cálculo alguno muy elaborado. Existe una justificación elemental en cada caso.
6.1.a Sea S1 el subespacio formado por las matrices diagonales de orden 2. El conjunto A no puede constituir una base.

$$A=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

Rta. La tercer matriz es CL de la primera y la segunda ==> A es LD

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 7:

Identificación de la información contenida en los datos del problema. Discusión de alternativas plausibles y demostración de hipótesis en un contexto donde la visualización geométrica constituye una ayuda heurística.
7.1 Sean A y B dos conjuntos LI de R^3 definidos por A = $\{\bar{v}_1 ; \bar{v}_2\}$ y B = $\{\bar{v}_3\}$. Analizar la dependencia o independencia lineal del conjunto C = $\{\bar{v}_1 ; \bar{v}_2 ; \bar{v}_3\}$. ¿Constituye C una base de R^3?

Armo la CL igualada al vector nulo: $\vec{0}_v=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\alpha_3\vec{v}_3$
Si $\vec{v}_3$ es CL de $\vec{v}_1\, y\, \vec{v}_2$: $\vec{v}_3=\beta\vec{v}_1+\gamma\vec{v}_2\ \left(con\ \ \beta\neq 0\vee\gamma\neq 0\right)\Rightarrow C\, es\, LD$
Sino: C es LI
Si C es LI: $\Rightarrow C\ \ es\ \ base\ \ de\ \ R^3$
Si C es LD: $\Rightarrow C\ \ NO\ \ es\ \ base\ \ de\ \ R^3$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 7:

Identificación de la información contenida en los datos del problema. Discusión de alternativas plausibles y demostración de hipótesis en un contexto donde la visualización geométrica constituye una ayuda heurística.

7.4 Demostrar que cualquiera sean $\overline{a}$; $\overline{b}$; $\overline{c}$ vectores de R^3 el conjunto
A = { $\overline{a}-\overline{b}$; $\overline{b}-\overline{c}$; $\overline{c}-\overline{a}$} es LD.

H) $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3),\vec{b}=(b_1;b_2;b_3),\vec{c}=(c_1;c_2;c_3)$

T) A = { $\overline{a}-\overline{b}$; $\overline{b}-\overline{c}$; $\overline{c}-\overline{a}$} es LD.

D) Armo la CL igualada al $\vec{0}_v$: $\alpha_1(\vec{a}-\vec{b})+\alpha_2(\vec{b}-\vec{c})+\alpha_3(\vec{c}-\vec{a})=\vec{0}_v$

$$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & b_1-c_1 & c_1-a_1 \\ a_2-b_2 & b_2-c_2 & c_2-a_2 \\ a_3-b_3 & b_3-c_3 & c_3-a_3 \end{vmatrix} \underset{C1=C1+C3}{=} \begin{vmatrix} c_1-b_1 & b_1-c_1 & c_1-a_1 \\ c_2-b_2 & b_2-c_2 & c_2-a_2 \\ c_3-b_3 & b_3-c_3 & c_3-a_3 \end{vmatrix} \underset{C1=(-1)\,C1}{=} \begin{vmatrix} b_1-c_1 & b_1-c_1 & c_1-a_1 \\ b_2-c_2 & b_2-c_2 & c_2-a_2 \\ b_3-c_3 & b_3-c_3 & c_3-a_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow A\ es\ LD$$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 7:

Identificación de la información contenida en los datos del problema. Discusión de alternativas plausibles y demostración de hipótesis en un contexto donde la visualización geométrica constituye una ayuda heurística.

7.5 Analizar los resultados posibles de ($\overline{a}$ x $\overline{b}$) x $\overline{c}$ si A = { $\overline{a}$; $\overline{b}$} es LD.

Si A es LD: ($\overline{a}$ x $\overline{b}$) = $\overline{0}$ luego: ($\overline{a}$ x $\overline{b}$) x $\overline{c}$ = $\overline{0}$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 7:

Identificación de la información contenida en los datos del problema. Discusión de alternativas plausibles y demostración de hipótesis en un contexto donde la visualización geométrica constituye una ayuda heurística.

7.7 Dados los vectores $\overline{u}$ y $\overline{v}$ de R^3.

7.7.b. Analizar los casos cuando A = { $\overline{u}$; $\overline{v}$ } es LI o LD. Indicar dimensión del subespacio generado, dar una base e interpretación geométrica

- **Caso 1:** Si A es LD con $\overline{u} = \overline{0}$ y $\overline{v} = \overline{0}$**;** gen(A) = S. dim(S) = 0. Bs = Ø. S ={$\overline{0}$}.
- **Caso 2:** Si A es LD: gen(A) = S. dim(S) = 1. Bs = { $\overline{u}$ }. S: una recta (que pasa por el origen) dirigida por $\overline{u}$.
- **Caso 3:** Si A es LI: gen(A) = S. dim(S) = 2. Bs = { $\overline{u}$; $\overline{v}$ }. S: un plano (que pasa por el origen) dirigido por $\overline{u}$ y $\overline{v}$.

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 8: Justificar si es verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones. En caso de ser falsa, proponer un contraejemplo.

8.1. Sean los vectores $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, $\overline{v}_3$ y $\overline{v}_4$ de R^3.

a) Si { $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, $\overline{v}_3$} es LI ==> { $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, $\overline{v}_3$, $\overline{v}_4$} es SG de R^3. (Verdadero)
b) Si { $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, $\overline{v}_3$} es LI ==> { $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, $\overline{v}_3$} es Base R^3. (Verdadero)
c) Si { $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, $\overline{v}_3$} es LI ==> { $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$} es LI. (Verdadero)
d) Si { $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, $\overline{v}_3$} es LD ==> { $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$} es LD. (Falso)
e) { $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, $\overline{v}_3$, $\overline{v}_4$} es SG de R^3 ==> { $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, $\overline{v}_3$} es Base R^3.

Sea $\overline{v}_3 = \alpha\,\overline{v}_1 + \beta\,\overline{v}_2$ $\overline{v}_3$, { $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, $\overline{v}_3$} es LD pero { $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$} puede ser LI. Ejemplo: {(1;0;0);(0;1;0);(1;1;0)}

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 8: Justificar si es verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones. En caso de ser falsa, proponer un contraejemplo.

8.1. Sean los vectores $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ y $\overline{v}_4$ de R^3.

a) Si $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ es LI ==> $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4\}$ es SG de R^3. (Verdadero)

b) Si $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ es LI ==> $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ es Base R^3. (Verdadero)

c) Si $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ es LI ==> $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$ es LI. (Verdadero)

d) Si $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ es LD ==> $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$ es LD. (Falso)

e) $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4\}$ es SG de R^3 ==> $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ es Base R^3. (Falso)

Contraejemplo: {(1;0;0);(0;1;0);(1;1;0);(0;0;1)} es SG de R^3 pero {(1;0;0);(0;1;0);(1;1;0)} es LD entonces, no es Base.