

Álgebra y Geometría Analítica

Clase 21: Base y Dimensión



Unidad 4 – Clase 21

01 Repaso de clases anteriores

02 Base y Dimensión de un EV

03 Ejercicios de la Guía

Repaso de las Clases Anteriores

DEFINICIÓN: ESPACIO VECTORIAL

Sean:

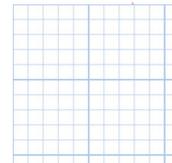
V : Conjunto no vacío.

$+$: Operación suma.

\mathbb{R} : El conjunto de los números reales

\cdot : Operación que relaciona un elemento de \mathbb{R} y V

$(V; +; \mathbb{R}; \cdot)$ es espacio vectorial si se cumple los 10 axiomas de espacios vectoriales



Repaso de las Clases Anteriores

DEFINICIÓN: ESPACIO VECTORIAL

AXIOMAS DE ESPACIOS VECTORIALES:

$\forall \vec{x} \in V, \forall \vec{y} \in V, \forall \vec{z} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}$:

A 1) Ley de composición interna: $(\vec{x} + \vec{y}) \in V$

A 2) Propiedad Conmutativa: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$

A 3) Propiedad Asociativa: $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$

A 4) Existencia de elemento neutro: $\exists \vec{0} \in V / \vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$

A 5) Existencia de Simétrico (u opuesto): $\exists -\vec{x} \in V / \vec{x} + (-\vec{x}) = (-\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0}$

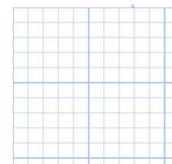
A 6) Ley de composición externa: $\alpha \vec{x} \in V$

A 7) Propiedad Asociativa mixta: $(\alpha\beta) \vec{x} = \alpha(\beta \vec{x})$

A 8) Existencia de escalar neutro: $\exists 1 \in \mathbb{R} / 1 \vec{x} = \vec{x}$

A 9) Distributiva respecto de la suma de escalares: $(\alpha + \beta) \vec{x} = \alpha \vec{x} + \beta \vec{x}$

A10) Distributiva respecto de la suma de vectores: $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \vec{x} + \alpha \vec{y}$



Repaso de las Clases Anteriores

DEFINICIÓN: SUBESPACIO

Si V es EV y $S \subset V \wedge S \neq \emptyset \Rightarrow S$ es subespacio de $V \Leftrightarrow S$ cumple los 10 axiomas de EV.

PROPIEDADES QUE SE DEDUCEN DE LOS AXIOMAS DE E.V.

$$I) 0\vec{x} = \vec{0}_V$$

$$II) \alpha\vec{0}_V = \vec{0}_V$$

$$III) (-1)\vec{x} = -\vec{x}$$

$$IV) \alpha\vec{x} = \vec{0}_V \Rightarrow \alpha = 0 \vee \vec{x} = \vec{0}_V$$

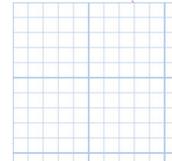
CONDICIONES SUFICIENTES PARA QUE S SEA SUBESPACIO DE V

$$I) S \subset V$$

$$II) S \neq \emptyset$$

$$III) LCI: \forall \vec{x} \in S \wedge \forall \vec{y} \in S: (\vec{x} + \vec{y}) \in S$$

$$IV) LCE: \forall \vec{x} \in S \wedge \forall \alpha \in \mathbb{R}: (\alpha\vec{x}) \in S$$



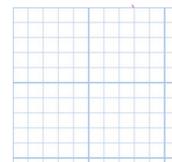
Repaso de las Clases Anteriores

PROPIEDADES

I) $\vec{0} \in S \Rightarrow S$ puede ser subespacio. Pero si $\vec{0} \notin S \Rightarrow S$ no es subespacio de V

II) S_1 y S_2 son subespacios de $S \Rightarrow S_1 \cap S_2$ es subespacio de S

III) Los subespacios triviales son: $S = \{\vec{0}\} \wedge S \equiv V$ (es decir: $S \subset V \wedge V \subset S$)



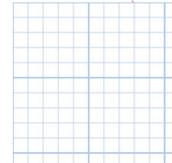
Repaso de las Clases Anteriores

COMBINACION LINEAL

Sea V un espacio vectorial (EV), se dice que un vector $\vec{v} \in V$ es combinación lineal (C.L) de un conjunto de vectores, si y solo si existen escalares pertenecientes a \mathbb{R} , tal que $\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$

Sea V EV. Sea $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $A \neq \emptyset$, $A \subset V$.

$\vec{v} \in V$ es CL de $A \Leftrightarrow \exists \alpha_i \in \mathbb{R} / \vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \vec{v}_i$

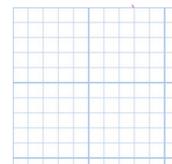


Repaso de las Clases Anteriores

COMBINACION LINEAL

Para tener en cuenta:

- Cada vez que se busca verificar que un vector es CL de los vectores de un conjunto A , se obtiene un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son los escalares de la CL.
- Si el sistema es SC \Rightarrow los escalares existen y la CL es posible.
- Si el sistema es SI \Rightarrow no existen los escalares, y la CL no es posible.



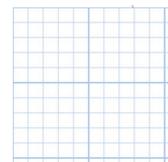
Repaso de las Clases Anteriores

SUBESPACIO GENERADO

Sea \mathbb{V} un espacio vectorial (EV) y el conjunto $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n\}$, llamaremos subespacio generado por A al conjunto de todos los vectores que se pueden escribir como C.L de los vectores de A .

$gen(A) = S$ (S es el subespacio generado por A)

$$S = gen(A) = \{ \vec{x} \in V / \vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \vec{v}_i \} \quad (\vec{x} \text{ es CL de } A)$$



Repaso de las Clases Anteriores

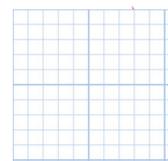
SISTEMA GENERADOR

Sea V un espacio vectorial (EV) y el conjunto de vectores $A = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_n\}$ con $A \subset V$.

Diremos que A es un *Sistema Generador de V* sí y solo si todo vector $\vec{v} \in V$, se puede expresar como CL de los vectores de A .

$$A \text{ es SG de } V \Leftrightarrow \forall \vec{v} \in V : \vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$$

Si un conjunto de vectores A no alcanza a generar todo el espacio vectorial V entonces A no será SG de V sino que generará un subespacio de V .



Repaso de las Clases Anteriores

INDEPENDENCIA LINEAL

Sea \mathbb{V} un espacio vectorial (EV) y $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n\} \subset \mathbb{V}$

Diremos que A es Linealmente Independiente (L.I) $\leftrightarrow \vec{0} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

Es decir, que si un conjunto es L.I, entonces debe verificar que la **única** C.L de los vectores de A que expresa al vector nulo es aquella en la que todos los escalares son cero.

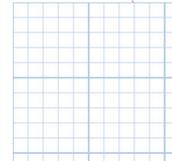
Del mismo modo diremos que A es L.D $\leftrightarrow \vec{0} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n \rightarrow \exists \alpha_i \neq 0 \forall i \in \mathbb{N}$

Un conjunto A es LI \leftrightarrow La CL igualada al vector nulo es posible solo si $\forall i \in \mathbb{N}: \alpha_i = 0$

Del mismo modo:

Un conjunto A es LD \leftrightarrow La CL igualada al vector nulo es posible para algún $\alpha_i \neq 0 \forall i \in \mathbb{N}$

$$\vec{0} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n \begin{cases} \rightarrow \alpha_i = 0 \forall i \in \mathbb{N} \rightarrow A \text{ es LI (C.L única)} \\ \rightarrow \alpha_i \neq 0 \forall i \in \mathbb{N} \rightarrow A \text{ es LD (C.L múltiple)} \end{cases}$$



Repaso de las Clases Anteriores

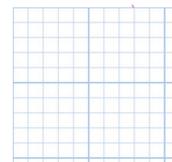
INDEPENDENCIA LINEAL: OBSERVACIONES

- Todo conjunto que contiene al vector nulo es L.D
- Todo conjunto unitario es L.I si y solo si, no contiene al vector nulo.
- Toda vez que queramos analizar si un conjunto es LI o LD, se obtiene un sistema de ecuaciones homogéneo.
- La dependencia lineal se dará cuando el sistema sea S.C.I (hay más soluciones además de la trivial)
- Será L.I cuando el sistema sea S.C.D (solución única, la trivial)
- Si el sistema es cuadrado, es decir n vectores de n componentes, se puede aplicar determinantes a una matriz cuyas filas o columnas sean los vectores del conjunto A

Solo en sistemas cuadrados

$$\det(A) \neq 0 \rightarrow \text{Solución Trivial única} \rightarrow L.I$$

$$\det(A) = 0 \rightarrow \text{Infinitas soluciones} \rightarrow L.D$$



Base y dimensión de un EV

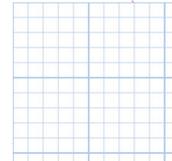
BASE DE UN EV

Definición:

Un conjunto de vectores B de un espacio vectorial V constituye una base de dicho espacio vectorial sí y solo sí, B es linealmente independiente y B es sistema generador para el espacio vectorial.

$$V \text{ EV}, B \subset V$$

$$B \text{ es Base de } V \Leftrightarrow B \text{ es LI} \wedge V = \text{gen}(B)$$



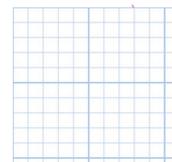
Base y dimensión de un EV

DIMENSIÓN DE UN EV

Definición:

La dimensión de un espacio vectorial es la cantidad de vectores que forman una base del espacio vectorial.

$$V \text{ EV}, B \subset V, B \text{ Base de } V \Rightarrow \dim(V) = \#(B)$$



Base y dimensión de un EV

BASE

Ejemplo:

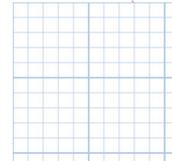
Hallar una base para el conjunto de todas las matrices simétricas de orden 2.

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ es una base para el conjunto de matrices simétricas de orden 2.}$$

La dimensión del espacio de las matrices simétricas de orden 2 es 3.



Base y dimensión de un EV

BASE

Ejemplo: Sea $B = \{ \vec{v}_1 = (3; -2); \vec{v}_2 = (1; 1) \}$. ¿Es B una base de \mathbb{R}^2 ?
Debe demostrarse que B es LI y que $\text{gen}(B) = \mathbb{R}^2$

B es LI:

Armo CL igualada al $\vec{0}_v$: $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 = \vec{0}_v$

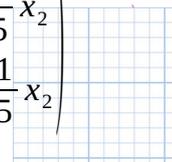
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad r(A) = r(A') = \# \text{ inc} \implies \text{SCD}$$

Luego: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Rightarrow B \text{ es LI}$

gen(B) = \mathbb{R}^2 :

Armo CL igualada al vector genérico \vec{x} : $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 = \vec{x}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & | & x_1 \\ -2 & 1 & | & x_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & | & x_1 \\ -5 & 0 & | & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & | & x_1 \\ 1 & 0 & | & \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & | & \frac{2}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2 \\ 1 & 0 & | & \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_2 \end{pmatrix}$$



Base y dimensión de un EV

BASE

Ejemplo: Sea $B = \{ \vec{v}_1 = (3; -2); \vec{v}_2 = (1; 1) \}$. ¿Es B una base de \mathbb{R}^2 ?
gen(B) = \mathbb{R}^2 :

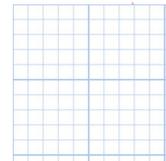
Se tiene entonces que: $\alpha_1 = \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_2 \wedge \alpha_2 = \frac{2}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2$

Reemplazo α_1 y α_2 en la CL:

$$\left(\frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_2 \right) (3; -2) + \left(\frac{2}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2 \right) (1; 1) = (x_1; x_2)$$

$$\left(\frac{3}{5}x_1 - \frac{3}{5}x_2; -\frac{2}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 \right) + \left(\frac{2}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2; \frac{2}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2 \right) = (x_1; x_2) \quad \text{¡Verifica!}$$

Luego: B es una base de \mathbb{R}^2



Base y dimensión de un EV

BASE

Ejemplo: Sea $B = \{ \vec{v} = (1; -2) \}$. ¿Es B una base de \mathbb{R}^2 ?

B es LI:

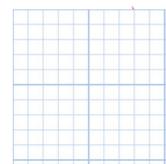
$\alpha \cdot \vec{v} = 0\vec{v} \implies \alpha \cdot (1; -2) = (0; 0) \implies \alpha = 0 \implies B$ es LI

gen(B) = \mathbb{R}^2 :

$$\alpha \vec{v} = 0 \vec{v} \Rightarrow \alpha (1; -2) = (x; y)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & x \\ -2 & y \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c|c} 1 & x \\ 0 & y+2x \end{array} \right) \Rightarrow r(A) = r(A') = 1 \Rightarrow y+2x=0 \Rightarrow \text{gen}(B) \neq \mathbb{R}^2 \text{ (gen}(B) \text{: una recta)}$$

Luego: B NO es una base de \mathbb{R}^2



Ejercicios de la Guía

Ejercicio 5:

Ejercicio 5.1. Dado el conjunto de vectores analizar si es (a) L.I (b) sistema de generadores de R^3

$$A = \{\vec{a} = (1,1,1), \vec{b} = (1,-1,5), \vec{c} = (1,3,-3)\}$$

Analizamos la dependencia lineal

$$\vec{0} = \alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} + \alpha_3 \vec{c}$$

$$(0,0,0) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,-1,5) + \alpha_3(1,3,-3)$$

$$rg(A) = rg(A') = 2 < n = 3$$

SCI \rightarrow A es LD

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 0 \\ 1 & -1 & 3 & : & 0 \\ 1 & 5 & -3 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & -2 & 2 & : & 0 \\ 0 & 4 & -4 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & -1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 1 & -1 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & : & 0 \\ 0 & -1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Al ser el conjunto A L.D, entonces no es Sistema generador de R^3 pero analizamos qué Subespacio genera A

$$(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,-1,5) + \alpha_3(1,3,-3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & x \\ 1 & -1 & 3 & : & y \\ 1 & 5 & -3 & : & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & x \\ 0 & -2 & 2 & : & y-x \\ 0 & 4 & -4 & : & z-x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & -1 & 1 & : & (y-x)/2 \\ 0 & 4 & -4 & : & z-x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & : & 0 \\ 0 & -1 & 1 & : & (y-x)/2 \\ 0 & 0 & 0 & : & z-x \end{pmatrix}$$

El sistema será S.C si $z-x=0$

$$S_{gen(A)} = \{(x,y,z) \in R^3 / z-x=0\}$$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 5: Ejercicio 5.2. Dado el conjunto de vectores A, definir el subespacio que genera A indicando base y dimensión.

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Subespacio generado

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Buscamos un S.C

Condiciones para un SC

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & : & x \\ -1 & -1 & 2 & : & y \\ 0 & 0 & 0 & : & z \\ 2 & -3 & 0 & : & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & : & x \\ 0 & 0 & 0 & : & y+x \\ 0 & 0 & 0 & : & z \\ 0 & -5 & 4 & : & t-2x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} y+x=0 \\ z=0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -x \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

$$S_{gen(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in R^{2 \times 2} / x+y=0 \wedge z=0 \right\}$$

$$S_{gen(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in R^{2 \times 2} / \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -x \\ 0 & t \end{pmatrix} \forall x \in R, \forall t \in R \right\}$$

Base de A

$$B_{S_{gen(A)}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dimensión de la Base

$$\dim(gen(A)) = 2$$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 5:

Ejercicio 5.2. (c) Hallar la intersección del subespacio generado por $B_{S(A)}$ si $a = -1$ y $b = 0$ con S , siendo S el subespacio definido por:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in R^{2 \times 2} / x + t = 0 \wedge t + y = 0 \wedge z = 0 \right\} \quad B_{S_{gen(A)}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Analizamos la condición que debe cumplir S

$$\begin{cases} x + t = 0 & \rightarrow x = -t \\ y + t = 0 & \rightarrow y = -t \\ z = 0 \end{cases} \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in R^{2 \times 2} / \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t & -t \\ 0 & t \end{pmatrix} \forall t \in R \right\}$$

Expresamos el Subespacio S_A

$$S_A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in R^{2 \times 2} / \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & -x_1 \\ 0 & x_4 \end{pmatrix} \forall t \in R \right\}$$

Intersección $S \cap S_A$

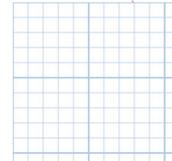
$$\begin{pmatrix} -t & -t \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & -x_1 \\ 0 & x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -t \\ -x_1 = -t \\ x_4 = t \end{cases}$$

Sumando las dos primeras ecuaciones

$$x_1 - x_1 = -2t \rightarrow 0 = -2t \rightarrow t = 0$$

$$S \cap S_A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$



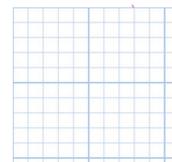
Ejercicios de la Guía

Ejercicio 6:

6.1 Los siguientes ítems se pueden contestar sin necesidad de realizar cálculo alguno muy elaborado. Existe una justificación elemental en cada caso.

6.1.a Sea S_1 el subespacio formado por las matrices diagonales de orden 2. El conjunto A no puede constituir una base.

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$



Ejercicios de la Guía

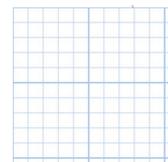
Ejercicio 6:

6.1 Los siguientes ítems se pueden contestar sin necesidad de realizar cálculo alguno muy elaborado. Existe una justificación elemental en cada caso.

6.1.a Sea S_1 el subespacio formado por las matrices diagonales de orden 2. El conjunto A no puede constituir una base.

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Rta. La tercer matriz es CL de la primera y la segunda $\implies A$ es LD



Ejercicios de la Guía

Ejercicio 7:

Identificación de la información contenida en los datos del problema. Discusión de alternativas plausibles y demostración de hipótesis en un contexto donde la visualización geométrica constituye una ayuda heurística.

7.1 Sean A y B dos conjuntos LI de \mathbb{R}^3 definidos por $A = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2\}$ y $B = \{\vec{v}_3\}$. Analizar la dependencia o independencia lineal del conjunto $C = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3\}$. ¿Constituye C una base de \mathbb{R}^3 ?

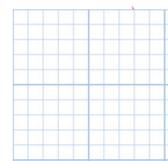
Armo la CL igualada al vector nulo: $\vec{0}_v = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3$

Si \vec{v}_3 es CL de \vec{v}_1 y \vec{v}_2 : $\vec{v}_3 = \beta \vec{v}_1 + \gamma \vec{v}_2$ (con $\beta \neq 0 \vee \gamma \neq 0$) $\implies C$ es LD

Sino: C es LI

Si C es LI: $\implies C$ es base de \mathbb{R}^3

Si C es LD: $\implies C$ NO es base de \mathbb{R}^3



Ejercicios de la Guía

Ejercicio 7:

Identificación de la información contenida en los datos del problema. Discusión de alternativas plausibles y demostración de hipótesis en un contexto donde la visualización geométrica constituye una ayuda heurística.

7.4 Demostrar que cualquiera sean \vec{a} ; \vec{b} ; \vec{c} vectores de \mathbb{R}^3 el conjunto

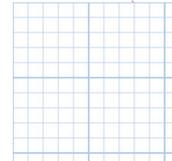
$A = \{ \vec{a}-\vec{b}; \vec{b}-\vec{c}; \vec{c}-\vec{a} \}$ es LD.

H) $\vec{a}=(a_1; a_2; a_3), \vec{b}=(b_1; b_2; b_3), \vec{c}=(c_1; c_2; c_3)$

T) $A = \{ a-b; b-c; c-a \}$ es LD.

D) Armo la CL igualada al $\vec{0}_v$: $\alpha_1(\vec{a}-\vec{b})+\alpha_2(\vec{b}-\vec{c})+\alpha_3(\vec{c}-\vec{a})=\vec{0}_v$

$$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & b_1-c_1 & c_1-a_1 \\ a_2-b_2 & b_2-c_2 & c_2-a_2 \\ a_3-b_3 & b_3-c_3 & c_3-a_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{C1=C1+C3 \\ C1=(-1) C1}} \begin{vmatrix} c_1-b_1 & b_1-c_1 & c_1-a_1 \\ c_2-b_2 & b_2-c_2 & c_2-a_2 \\ c_3-b_3 & b_3-c_3 & c_3-a_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{C1} \begin{vmatrix} b_1-c_1 & b_1-c_1 & c_1-a_1 \\ b_2-c_2 & b_2-c_2 & c_2-a_2 \\ b_3-c_3 & b_3-c_3 & c_3-a_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow A \text{ es LD}$$



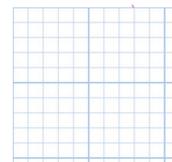
Ejercicios de la Guía

Ejercicio 7:

Identificación de la información contenida en los datos del problema. Discusión de alternativas plausibles y demostración de hipótesis en un contexto donde la visualización geométrica constituye una ayuda heurística.

7.5 Analizar los resultados posibles de $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ si $A = \{ \vec{a}; \vec{b} \}$ es LD.

Si A es LD: $(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$ luego: $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{0}$



Ejercicios de la Guía

Ejercicio 7:

Identificación de la información contenida en los datos del problema. Discusión de alternativas plausibles y demostración de hipótesis en un contexto donde la visualización geométrica constituye una ayuda heurística.

7.7 Dados los vectores \bar{u} y \bar{v} de \mathbb{R}^3 .

7.7.b. Analizar los casos cuando $A = \{ \bar{u} ; \bar{v} \}$ es LI o LD. Indicar dimensión del subespacio generado, dar una base e interpretación geométrica

- **Caso 1:** Si A es LD con $\bar{u} = \bar{0}$ y $\bar{v} = \bar{0}$; $\text{gen}(A) = S$. $\dim(S) = 0$. $B_S = \emptyset$. $S = \{\bar{0}\}$.
- **Caso 2:** Si A es LD: $\text{gen}(A) = S$. $\dim(S) = 1$. $B_S = \{ \bar{u} \}$. S: una recta (que pasa por el origen) dirigida por u.
- **Caso 3:** Si A es LI: $\text{gen}(A) = S$. $\dim(S) = 2$. $B_S = \{ \bar{u} ; \bar{v} \}$. S: un plano (que pasa por el origen) dirigido por \bar{u} y \bar{v} .

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 8: Justificar si es verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones. En caso de ser falsa, proponer un contraejemplo.

8.1. Sean los vectores $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ y \bar{v}_4 de \mathbb{R}^3 .

- Si $\{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \}$ es LI $\implies \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4 \}$ es SG de \mathbb{R}^3 . (Verdadero)
- Si $\{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \}$ es LI $\implies \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \}$ es Base \mathbb{R}^3 . (Verdadero)
- Si $\{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \}$ es LI $\implies \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2 \}$ es LI. (Verdadero)
- Si $\{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \}$ es LD $\implies \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2 \}$ es LD. (Falso)
- $\{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4 \}$ es SG de $\mathbb{R}^3 \implies \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \}$ es Base \mathbb{R}^3 .

Sea $\bar{v}_3 = \alpha \bar{v}_1 + \beta \bar{v}_2$, $\{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \}$ es LD pero $\{ \bar{v}_1, \bar{v}_2 \}$ puede ser LI. Ejemplo: $\{(1;0;0);(0;1;0);(1;1;0)\}$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 8: Justificar si es verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones. En caso de ser falsa, proponer un contraejemplo.

8.1. Sean los vectores $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ y \underline{v}_4 de \mathbb{R}^3 .

- a) Si $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ es LI $\implies \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ es SG de \mathbb{R}^3 . (Verdadero)
b) Si $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ es LI $\implies \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ es Base \mathbb{R}^3 . (Verdadero)
c) Si $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ es LI $\implies \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ es LI. (Verdadero)
d) Si $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ es LD $\implies \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ es LD. (Falso)
e) $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ es SG de $\mathbb{R}^3 \implies \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ es Base \mathbb{R}^3 . (Falso)

Contraejemplo: $\{(1;0;0);(0;1;0);(1;1;0);(0;0;1)\}$
es SG de \mathbb{R}^3 pero $\{(1;0;0);(0;1;0);(1;1;0)\}$ es LD
entonces, no es Base.