Álgebra y Geometría Analítica

Clase 20:
Dependencia e Independencia Lineal

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

Unidad 4 – Clase 20

Repaso de la Clase Anterior

DEFINICIÓN: ESPACIO VECTORIAL

Sean:

V : Conjunto no vacío.

$+$: Operación suma.

$\mathbb{R}$: El conjunto de los números reales

$.$: Operación que relaciona un elemento de $\mathbb{R}$ y V

$(V;+;\mathbb{R};.)$ *es espacio vectorial si se cumple los* 10 *axiomas de espacios vectoriales*

Repaso de la Clase Anterior

DEFINICIÓN: ESPACIO VECTORIAL

AXIOMAS DE ESPACIOS VECTORIALES:

$\forall \vec{x}\in V, \forall \vec{y}\in V, \forall \vec{z}\in V, \forall \alpha\in\mathbb{R}, \forall \beta\in\mathbb{R}:$

A 1) Ley de composición interna: $(\vec{x}+\vec{y})\in V$

A 2) Propiedad Conmutativa: $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$

A 3) Propiedad Asociativa: $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$

A 4) Existencia de elemento neutro: $\exists \vec{0}\in V / \vec{x}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{x}=\vec{x}$

A 5) Existencia de Simétrico (u opuesto): $\exists -\vec{x}\in V / \vec{x}+(-\vec{x})=(-\vec{x})+\vec{x}=\vec{0}$

A 6) Ley de composición externa: $\alpha\vec{x}\in V$

A 7) Propiedad Asociativa mixta: $(\alpha\beta)\vec{x}=\alpha(\beta\vec{x})$

A 8) Existencia de escalar neutro: $\exists 1\in\mathbb{R} / 1\vec{x}=\vec{x}$

A 9) Distributiva respecto de la suma de escalares: $(\alpha+\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{x}$

A10) Distributiva respecto de la suma de vectores: $\alpha(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$

Repaso de la Clase Anterior

PROPIEDADES QUE SE DEDUCEN DE LOS AXIOMAS DE E.V.

$I\ \ )\ 0\vec{x}=\vec{0}_v$

$II\ )\ \alpha\vec{0}_v=\vec{0}_v$

$III\ )\ (-1)\vec{x}=-\vec{x}$

$IV\ )\ \alpha\vec{x}=\vec{0}_v \Rightarrow \alpha=0 \vee \vec{x}=\vec{0}_v$

Repaso de la Clase Anterior

DEFINICIÓN: SUBESPACIO

$Si\ V\ es\ EV\ y\ S\subset V \wedge S\neq \emptyset \Rightarrow S\ es\ suebspacio\ de\ V \Leftrightarrow S\ cumple\ los\ 10\ axiomas\ de\ EV.$

CONDICIONES SUFICIENTES PARA QUE S SEA SUBESPACIO DE V

I) $S\subset V$

II) $S\neq \emptyset$

III) LCI: $\forall \vec{x}\in S \wedge \forall \vec{y}\in S : (\vec{x}+\vec{y})\in S$

IV) LCE: $\forall \vec{x}\in S \wedge \forall \alpha\in \mathbb{R} : (\alpha\vec{x})\in S$

PROPIEDADES

I) $\vec{0}\in S \Rightarrow S$ puede ser subespacio. Pero si $\vec{0}\notin S \Rightarrow S$ no es subespacio de V

II) S_1 y S_2 son subespacios de $S \Rightarrow S_1 \cap S_2$ es subespacio de S

III) Los subespacios triviales son: $S=\{\vec{0}\} \wedge S\equiv V$ (es decir: $S\subset V \wedge V\subset S$)

Dependencia e independencia lineal

COMBINACION LINEAL

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial (EV), se dice que un vector $\vec{v} \in \mathbb{V}$ es combinación lineal (C.L) de un conjunto de vectores, si y solo si existen escalares pertenecientes a $\mathbb{R}$, tal que $\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n$

$$A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots\dots\dots, \vec{v}_n\} \leftrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots\dots\dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \,/\, \vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n$$

Ejemplo

Analizar si el vector $\vec{v} = (0,6,-3)$ es CL del conjunto de vectores $A = \{\vec{v}_1 = (1,2,-1); \vec{v}_2 = (2,-2,1)\}$

Planteando la CL: $(0,6,-3) = \alpha_1(1,2,-1) + \alpha_2(2,-2,1)$ *Las incógnitas son* α_1 y α_2

$$(0,6,-3) = (\alpha_1, 2\alpha_1, -\alpha_1) + (2\alpha_2, -2\alpha_2, \alpha_2)$$

$$(0,6,-3) = (\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_1 - 2\alpha_2, -\alpha_1 + \alpha_2)$$

Armo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 6 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = -3 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & : & 0 \\ 2 & -2 & : & 6 \\ -1 & 1 & : & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & : & 0 \\ 0 & -6 & : & 6 \\ 0 & 3 & : & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & : & 0 \\ 0 & 1 & : & -1 \\ 0 & 1 & : & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 1 & : & -1 \\ 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to \alpha_1 = 2 \\ \to \alpha_2 = -1 \\ \end{matrix}$$

Verificamos: $(0,6,-3) = 2(1,2,-1) + (-1)(2,-2,1) \Rightarrow (0,6,-3) = (2,4,-2) + (-2,2,-1)$

Dependencia e independencia lineal

COMBINACION LINEAL

Para tener en cuenta:

- Cada vez que se busca verificar que un vector es CL de los vectores de un conjunto A, se obtiene un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son los escalares de la CL.
- Si el sistema es SC ==> los escalares existen y la CL es posible.
- Si el sistema es SI ==> no existen los escalares, y la CL no es posible.

Dependencia e independencia lineal

SUBESPACIO GENERADO

Sea V un espacio vectorial (EV) y el conjunto de vectores $A=\{\vec{v}_1;\vec{v}_2;\ldots;\vec{v}_n\}$ con $A\subset V$.
Llamaremos *Subespacio generado por A* al conjunto de todos los vectores que se pueden escribir como CL de los vectores de A

Notación:

$gen(A)$: Subespacio generado por A

$gen(A)=\{\vec{x}\in V\,/\,\vec{x}=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\ldots+\alpha_n\vec{v}_n\}\quad\forall\,\alpha_i\in\mathbb{R}$

Ejemplo $\vec{v}_1=(1,2,-1)$ $\quad\vec{v}_2=(2,-2,1)$ $\qquad gen\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}=\{\vec{x}\in R^3\ /\ \vec{x}=\alpha_1(1,2,-1)+\alpha_2(2,-2,1)\}$

Planteamos la C.L

$$(x_1,x_2,x_3)=\alpha_1(1,2,-1)+\alpha_2(2,-2,1)$$

$$(x_1,x_2,x_3)=(\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_1-2\alpha_2,-\alpha_1+\alpha_2)$$

$$\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2=x_1\\2\alpha_1-2\alpha_2=x_2\\-\alpha_1+\alpha_2=x_3\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&:&x_1\\2&-2&:&x_2\\-1&1&:&x_3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&:&x_1\\0&-6&:&x_2-2x_1\\0&3&:&x_3+x_1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&:&x_1\\0&-6&:&x_2-2x_1\\0&1&:&\dfrac{x_3+x_1}{3}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&:&\dfrac{2x_1}{3}-\dfrac{2x_3}{3}\\0&0&:&x_2+2x_3\\0&1&:&\dfrac{x_3+x_1}{3}\end{pmatrix}$$

Busco un S.C, es decir $rg(A)=rg(A')$

$\boxed{x_2+2x_3=0}$

$\boxed{S_{gen(A)}=\{\vec{x}\in R^3/x_2+2x_3=0\ \forall x_2\forall x_3\in\mathbb{R}\}}$

Dependencia e independencia lineal

SISTEMA GENERADOR

Sea V un espacio vectorial (EV) y el conjunto de vectores $A=\{\vec{v}_1;\vec{v}_2;\ldots;\vec{v}_n\}$ con $A\subset V$.
Diremos que A es un *Sistema Generador de V* sí y solo si para todo vector $\vec{v}\in V$, $\vec{v}$ se puede expresar como CL de los vectores de A.

$$A\ es\ SG\ de\ V\Leftrightarrow\forall\,\vec{v}\in set\ V:\vec{v}=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\ldots\,\alpha_n\vec{v}_n$$

Si un conjunto de vectores A no alcanza a generar todo el espacio vectorial V entonces A no será $SG\ de\ V$ sino que generará un subespacio de V.

Ejemplo: $A=\{\vec{v}_1=(1,2,-1),\vec{v}_2=(2,-2,1)\}$

$S_{gen(A)}=\{\vec{x}\in R^3/x_2+2x_3=0\ \forall x_2\forall x_3\in\mathbb{R}\}$

El conjunto A no genera todo $\mathbb{R}^3$ sino que genera un subespacio de $\mathbb{R}^3$. En este ejemplo, se genera un plano

Dependencia e independencia lineal

SISTEMA GENERADOR

Ejemplo

$A = \{\vec{v}_1 = (1,1,1),\ \vec{v}_2 = (1,1,0),\ \vec{v}_3 = (1,0,0)\}$ ¿$es\ S.G\ de\ R^3$?

$(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,1,0) + \alpha_3(1,0,0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & : & x_2 \\ 1 & 0 & 0 & : & x_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & : & x_1 - x_2 \\ 1 & 1 & 0 & : & x_2 \\ 1 & 0 & 0 & : & x_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & : & x_1 - x_2 \\ 1 & 1 & 0 & : & x_2 \\ 1 & 0 & 0 & : & x_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & : & x_1 - x_2 \\ 0 & 1 & 0 & : & x_2 \\ 1 & 0 & 0 & : & x_3 \end{pmatrix}$$

El Sistema es siempre S.C No hay Restricciones

El conjunto A genera todo R^3! $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ Son Vectores No Coplanares

$S_{gen(A)} = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \quad \forall x_1\ \forall x_2\ \forall x_3 \in \mathbb{R}\}$

Dependencia e independencia lineal

INDEPENDENCIA LINEAL

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial (EV) y $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots \dots \dots, \vec{v}_n\} \subset \mathbb{V}$

Diremos que A es Linealmente Independiente (L.I) $\leftrightarrow \vec{O} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

Es decir, que si un conjunto es L.I, entonces debe verificar que la **única** C.L de los vectores de A que expresa al vector nulo es aquella en la que todos los escalares son cero.

Del mismo modos diremos que $A\ es\ L.D \leftrightarrow \vec{O} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n \rightarrow \exists \alpha_i \neq 0\ \forall i \in R$

$$\vec{O} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n \begin{cases} \nearrow \alpha_i = 0\ \forall i \in R \rightarrow A\ es\ LI\ (\text{C.L única}) \\ \searrow \alpha_i \neq 0\ \forall i \in R \rightarrow A\ es\ LD\ (\text{C.L múltiple}) \end{cases}$$

$A = \{\vec{v}_1 = (1,2), \vec{v}_2 = (-1,5)\} \rightarrow L.I$ $(0,0) = \alpha_1(1,2) + \alpha_2(-1,5)$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & : & 0 \\ 2 & 5 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & : & 0 \\ 0 & 7 & : & 0 \end{pmatrix}$ $\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & : & 0 \\ 0 & 1 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & : & 0 \\ 0 & 1 & : & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \alpha_1 = 0 \\ \rightarrow \alpha_2 = 0 \end{matrix}$	$B = \{\vec{v}_1 = (1,2), \vec{v}_2 = (0,0)\ \vec{v}_3 = (-1,5)\} \rightarrow L.D$ $(0,0) = \alpha_1(1,2) + \alpha_2(0,0) + \alpha_3(-1,5)$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & : & 0 \\ 2 & 0 & 5 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 7 & : & 0 \end{pmatrix}$ $\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \alpha_1 = 0 \\ \rightarrow \alpha_3 = 0 \end{matrix}$ α_2 *puede tomar cualquier valor!*

Dependencia e independencia lineal

INDEPENDENCIA LINEAL: OBSERVACIONES

- Todo conjunto que contiene al vector nulo es L.D
- Todo conjunto unitario es L.I si y solo si, no contiene al vector nulo.
- Toda vez que queramos analizar si un conjunto es LI o LD, se obtiene un sistema de ecuaciones homogéneo.
- La dependencia lineal se dará cuando el sistema sea S.C.I (hay más soluciones además de la trivial)
  Será L.I cuando el sistema sea S.C.D (solución única, la trivial)
- Si el sistema es cuadrado, es decir n vectores de n componentes, se puede aplicar determinantes a una matriz cuyas filas o columnas sean los vectores del conjunto A

Solo en sistemas cuadrados

$$det(A) \neq 0 \rightarrow Solución\ Trivial\ única \rightarrow L.I$$

$$det(A) = 0 \rightarrow Infinitas\ soluciones \rightarrow L.D$$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 4:

Hallar, en cada caso, los valores del ó de los parámetros para los cuales el vector se puede escribir como combinación lineal de los vectores del conjunto indicado. Una vez elegidos los parámetro, ¿la combinación es única? Interpretar geométricamente cuando sea posible.

$(4.1) \quad \vec{v} = (k^2, k) \qquad A = \{\vec{v}_1 = (1,-1),\ \vec{v}_2 = (-1,1)\}$

Expresamos la C.L

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2$$

$$(k^2, k) = \alpha_1(1,-1) + \alpha_2(-1,1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & : & k^2 \\ -1 & 1 & : & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & : & k^2 \\ 0 & 0 & : & \boxed{k+k^2} \end{pmatrix}$$

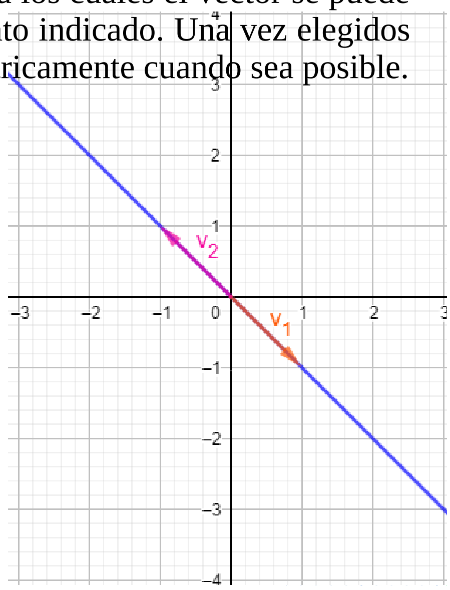
Para que exista la C.L el sistema debe ser S.C

$$\rightarrow k(k+1) = 0$$

Valores de k que hacen posible un S.C

$k = 0 \quad \text{Y} \quad k = -1$

Infinitas soliciones. A es LD, $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ *resultan paralelos.*
Petenecen a la misma recta que pasa por el origen.



Ejercicios de la Guía

Ejercicio 4:

Hallar, en cada caso, los valores del ó de los parámetros para los cuales el vector se puede escribir como combinación lineal de los vectores del conjunto indicado. Una vez elegidos los parámetro, ¿la combinación es única? Interpretar geométricamente cuando sea posible.

(4.2) $\vec{v} = (1,2,k)$ $\quad A = \{\vec{v}_1 = (-1,2,3),\ \vec{v}_2 = (3,-2,0)\}$

Expresamos la C.L

$\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2$

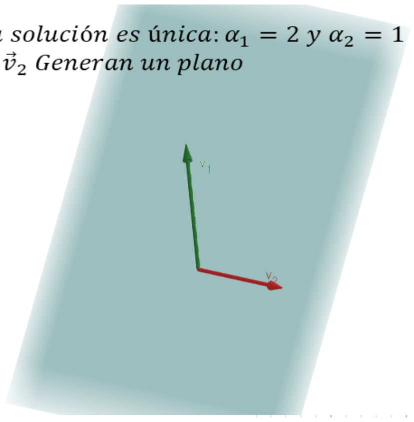
$(1,2,k) = \alpha_1(-1,2,3) + \alpha_2(3,-2,0)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & : & 1 \\ 2 & -2 & : & 2 \\ 3 & 0 & : & k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & : & 1 \\ -1 & 1 & : & -1 \\ 3 & 0 & : & k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & : & 4 \\ -1 & 1 & : & -1 \\ 3 & 0 & : & k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & : & 2 \\ -1 & 1 & : & -1 \\ 3 & 0 & : & k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 1 & : & 1 \\ 0 & 0 & : & \boxed{k-6} \end{pmatrix} \rightarrow k-6=0$$

Valores de k que hacen posible un S.C $\quad k = 6$

Con $k = 6$ la solución es única: $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_2 = 1$
A es LI, $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ Generan un plano



Ejercicios de la Guía

Ejercicio 4:

Hallar, en cada caso, los valores del ó de los parámetros para los cuales el vector se puede escribir como combinación lineal de los vectores del conjunto indicado. Una vez elegidos los parámetro, ¿la combinación es única? Interpretar geométricamente cuando sea posible.

(4.3) $\vec{v} = (k^2,k,0)$ $\quad A = \{\vec{v}_1 = (-1,2,3),\ \vec{v}_2 = (3,-2,0)\ \ \vec{v}_3 = (1,2,6)\}$

Expresamos la C.L

$\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3$

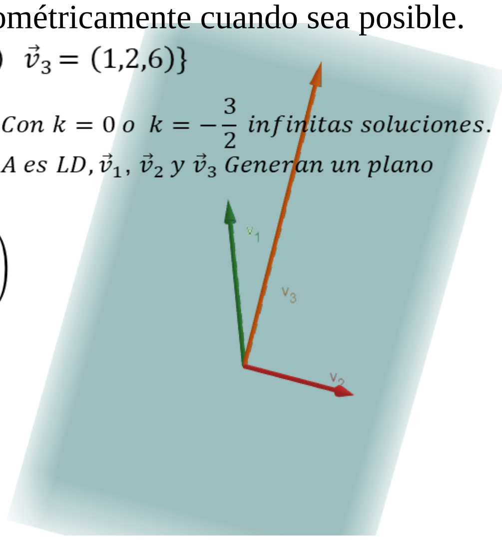
$(k^2,k,0) = \alpha_1(-1,2,3) + \alpha_2(3,-2,0) + \alpha_3(1,2,6)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & : & k^2 \\ 2 & -2 & 2 & : & k \\ 3 & 0 & 6 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & : & k^2 \\ 2 & -2 & 2 & : & k \\ 1 & 0 & 2 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & : & k^2 \\ 0 & -2 & -2 & : & k \\ 1 & 0 & 2 & : & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & : & k^2/3 \\ 0 & -2 & -2 & : & k \\ 1 & 0 & 2 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & : & k^2/3 \\ 0 & 0 & 0 & : & k + \frac{2}{3}k^2 \\ 1 & 0 & 2 & : & 0 \end{pmatrix} \rightarrow k\left(\frac{2}{3}k + 1\right) = 0$$

Valores de k que hacen posible un S.C $\quad k = 0 \ \lor \ k = -\frac{3}{2}$

Con $k = 0$ o $k = -\frac{3}{2}$ infinitas soluciones.
A es LD, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ Generan un plano



Ejercicios de la Guía

Ejercicio 4:

Hallar, en cada caso, los valores del ó de los parámetros para los cuales el vector se puede escribir como combinación lineal de los vectores del conjunto indicado. Una vez elegidos los parámetro, ¿la combinación es única? Interpretar geométricamente cuando sea posible.

$(4.4)\ \vec{v}=\begin{pmatrix}1 & k\\ k^2 & 1\end{pmatrix}\quad A=\left\{\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix},\vec{v}_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\right\}$

Expresando la CL:

$\vec{v}=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2 \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}1 & k\\ k^2 & 1\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & : & 1\\ 0 & 1 & : & k\\ 2 & -1 & : & k^2\\ -1 & 2 & : & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & : & 1\\ 0 & 1 & : & k\\ 0 & -1 & : & k^2-2\\ 0 & 2 & : & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & : & 1\\ 0 & 1 & : & k\\ 0 & 0 & : & k^2+k-2\\ 0 & 0 & : & 2-2k\end{pmatrix}\quad\begin{cases}k^2+k-2=0\Rightarrow \boxed{k=1}\vee k=-2\\ 2(1-k)=0\rightarrow \boxed{k=1}\end{cases}$$

Si $k=1\Rightarrow SCD$ y la solución es única: $\alpha_1=1\wedge\alpha_2=1$

$Verifico:\ \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 4:

Hallar, en cada caso, los valores del ó de los parámetros para los cuales el vector se puede escribir como combinación lineal de los vectores del conjunto indicado. Una vez elegidos los parámetro, ¿la combinación es única? Interpretar geométricamente cuando sea posible.

$(4.5)\ \vec{v}=kx^2-2x+k \quad A=\{\vec{v}_1=x^2+2x+3,\vec{v}_2=3x^2+2x+1\}$

Expresamos la C.L

$\vec{v}=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2$

$kx^2-2x+k=\alpha_1(x^2+2x+3)+\alpha_2(3x^2+2x+1)$

$(k,-2,k)=\alpha_1(1,2,3)+\alpha_2(3,2,1)$

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & : & k\\ 2 & 2 & : & -2\\ 3 & 1 & : & k\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & : & 1\\ 0 & -4 & : & -2-2k\\ 0 & -8 & : & -2k\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & : & 1\\ 0 & 1 & : & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}k\\ 0 & -8 & : & -2k\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & : & -\frac{3}{2}-\frac{k}{2}\\ 0 & 1 & : & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}k\\ 0 & 0 & : & \boxed{2k+4}\end{pmatrix}\rightarrow k=-2$$

Valores de k que hacen posible un S.C

$k=-2 \qquad La\ solución\ es\ única: \alpha_1=-\frac{1}{2}\ y\ \alpha_2=-\frac{1}{2}$

A es LI

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 4:

Hallar, en cada caso, los valores del ó de los parámetros para los cuales el vector se puede escribir como combinación lineal de los vectores del conjunto indicado. Una vez elegidos los parámetro, ¿la combinación es única? Interpretar geométricamente cuando sea posible.

(4.6) $\vec{v} = (1, k, k^2)$ $\qquad A = \{\vec{v}_1 = (k, k, k^2),\ \vec{v}_2 = (k^2, kh, k^2h)\}$

Expresamos la C.L

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2$$

$$(1, k, k^2) = \alpha_1 (k, k, k^2) + \alpha_2 (k^2, kh, k^2 h)$$

$$\begin{pmatrix} k & k^2 & : & 1 \\ k & kh & : & k \\ k^2 & k^2 h & : & k^2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{k \neq 0}$ $\quad F_2/k \ y \ F_3/k^2$

$$\begin{pmatrix} k & k^2 & : & 1 \\ 1 & h & : & 1 \\ 1 & h & : & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & \boxed{k(k-h)} & : & \boxed{1-k} \\ 0 & 0 & : & 0 \\ 1 & h & : & 1 \end{pmatrix}$$

Si $k = h \neq 1$ $\ S.I$

Si $k = h = 1$ $\ S.C.I, A$ *es* $L.D$

Si $k \neq h$ $\ S.C, A$ *es* LI

$\boxed{k = 0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}$$ *Si* $k = 0\ \forall h \in R$ $\ S.I, A$ *es LD, no hay solución.*

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 5:

Ejercicio 5.1. Dado el conjunto de vectores analizar si es **(a)** L.I **(b)** sistema de generadores de R^3

$A = \{\vec{a} = (1,1,1), \vec{b} = (1,-1,5), \vec{c} = (1,3,-3)\}$

Analizamos la dependencia lineal

$$\vec{O} = \alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} + \alpha_3 \vec{c}$$

$$(0,0,0) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,-1,5) + \alpha_3(1,3,-3)$$

$rg(A) = rg(A') = 2 < n = 3$

$SCI \rightarrow A$ *es LD*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 0 \\ 1 & -1 & 3 & : & 0 \\ 1 & 5 & -3 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & -2 & 2 & : & 0 \\ 0 & 4 & -4 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & -1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 1 & -1 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & : & 0 \\ 0 & -1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \rightarrow -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \end{array}$$

Al ser el conjuno A L.D, entonces no es Sistema generador de R^3 *pero analizamos qué Subespacio genera A*

$$(x, y, z) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,-1,5) + \alpha_3(1,3,-3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & x \\ 1 & -1 & 3 & : & y \\ 1 & 5 & -3 & : & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & x \\ 0 & -2 & 2 & : & y-x \\ 0 & 4 & -4 & : & z-x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & -1 & 1 & : & (y-x)/2 \\ 0 & 4 & -4 & : & z-x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & : & 0 \\ 0 & -1 & 1 & : & (y-x)/2 \\ 0 & 0 & 0 & : & \boxed{z-x} \end{pmatrix}$$

El sistema será S.C si $z - x = 0$

$$S_{gen(A)} = \{(x, y, z) \in R^3 \ / \ z - x = 0\}$$