Álgebra y Geometría Analítica

Clase 19: Subespacios

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

Unidad 4 – Clase 19

Espacios Vectoriales

DEFINICIÓN

Sean:

V : Conjunto no vacío.

$+$: Operación suma.

$\mathbb{R}$: El conjunto de los números reales

$.$: Operación que relaciona un elemento de $\mathbb{R}$ y V

$(V\,;+;\mathbb{R}\,;.)$ *es espacio vectorial si se cumple los* 10 *axiomas de espacios vectoriales*

Espacios Vectoriales

DEFINICIÓN

LOS 10 AXIOMAS DE ESPACIOS VECTORIALES:

$\forall\,\vec{x}\in V,\forall\,\vec{y}\in V,\forall\,\vec{z}\in V,\forall\,\alpha\in\mathbb{R},\forall\,\beta\in\mathbb{R}:$

A 1) Ley de composición interna: $(\vec{x}+\vec{y})\in V$

A 2) Propiedad Conmutativa: $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$

A 3) Propiedad Asociativa: $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$

A 4) Existencia de elemento neutro: $\exists\vec{0}\in V/\vec{x}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{x}=\vec{x}$

A 5) Existencia de Simétrico (u opuesto): $\exists-\vec{x}\in V/\vec{x}+(-\vec{x})=(-\vec{x})+\vec{x}=\vec{0}$

A 6) Ley de composición externa: $\alpha\vec{x}\in V$

A 7) Propiedad Asociativa mixta: $(\alpha\beta)\vec{x}=\alpha(\beta\vec{x})$

A 8) Existencia de escalar neutro: $\exists 1\in\mathbb{R}/1\vec{x}=\vec{x}$

A 9) Distributiva respecto de la suma de escalares: $(\alpha+\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{x}$

A10) Distributiva respecto de la suma de vectores: $\alpha(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$

Espacios Vectoriales

DEFINICIÓN

EJEMPLOS:

1) (R^3 ; + ; R ; .): Cumple con los 10 axiomas ==> R^3 es E.V.
2) (R^{mxn} ; + ; R ; .): Cumple con los 10 axiomas ==> R^{mxn} es E.V.
3) (f(x) ; + ; R ; .): f(x): El espacio de las funciones continuas cumple con los 10 axiomas ==> f(x) es E.V.
4) ($R_{=2}[x]$; + ; R ; .): El espacio de los polinomios de grado 2 no cumple ya que sumando dos polinomios de grado 2 puede dar otro de grado 1 (no cumple A1). Además el polinomio nulo no tiene grado definido.
==> $R_{=2}[x]$ no es E.V.
5) ($R_{\leq 2}[x]$; + ; R ; .): El espacio de los polinomios de grado 2 incluyendo al polinomio nulo cumple con los 10 axiomas ==> $R_{\leq 2}[x]$ es E.V.

A todos los elementos de los conjuntos que son EV se los puede llamar "Vector"

Espacios Vectoriales

PROPIEDADES QUE SE DEDUCEN DE LOS AXIOMAS DE E.V.

$I\ )\ 0\vec{x}=\vec{0}_v$

$II\ )\ \alpha\vec{0}_v=\vec{0}_v$

$III\ )\ (-1)\vec{x}=-\vec{x}$

$IV\ )\ \alpha\vec{x}=\vec{0}_v \Rightarrow \alpha=0 \vee \vec{x}=\vec{0}_v$

Subespacios Vectoriales

DEFINICIÓN

$Si\ V\ es\ EV\ y\ S \subset V \wedge S \neq \emptyset \Rightarrow S\ es\ suebspacio\ de\ V \Leftrightarrow S\ cumple\ los\ 10\ axiomas\ de\ EV.$

CONDICIONES SUFICIENTES PARA QUE S SEA SUBESPACIO DE V

I) $S \subset V$
II) $S \neq \emptyset$
III) LCI: $\forall \vec{x} \in S \wedge \forall \vec{y} \in S : (\vec{x} + \vec{y}) \in S$
IV) LCE: $\forall \vec{x} \in S \wedge \forall \alpha \in \mathbb{R} : (\alpha \vec{x}) \in S$

PROPIEDADES

I) $\vec{0} \in S \Rightarrow S$ puede ser subespacio. Pero si $\vec{0} \notin S \Rightarrow S$ no es subespacio de V
II) $S_1\ y\ S_2$ son subespacios de $S \Rightarrow S_1 \cap S_2$ es subespacio de S
III) Los subespacios triviales son: $S = \{\vec{0}\} \wedge S \equiv V$ (es decir: $S \subset V \wedge V \subset S$)

Subespacios Vectoriales

EJEMPLOS

Ejemplo 1: $S = \{(x, y) \in R^2 / 2x + 3y = 0\}$

(1) $S \neq \emptyset\ \ \exists \vec{0}\ es\ decir, (0,0) \in R^2$

(2) $S \subset R^2\ por\ definición\ de\ S$

(3) $L.C.I\ \ \vec{v}_1 \in R^2\ \ \vec{v}_1 = (x_1, y_1), \vec{v}_2 \in R^2\ \vec{v}_2 = (x_2, y_2)$

$\vec{v}_1 \in S \rightarrow 2x_1 + 3y_1 = 0$

$\vec{v}_2 \in S \rightarrow 2x_2 + 3y_2 = 0$

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

¿ $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in S$? Para ello deben verificar la ecuación

$2(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2) = 0$

$2(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2) = 2x_1 + 2x_2 + 3y_1 + 3y_2$
$= (2x_1 + 3y_1) + (2x_2 + 3y_2)$
$= (0) + (0)$

Se verificó: $2(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2) = 0$

(4) $L.C.E.\ \vec{v}_1 \in R^2\ \ \vec{v}_1 = (x_1, y_1)\ y\ \alpha \in \mathbb{R}$

$\vec{v}_1 \in S \rightarrow 2x_1 + 3y_1 = 0$

$\alpha\vec{v}_1 = (\alpha x_1, \alpha y_1)$

¿ $\alpha\vec{v}_1 \in S$? Para ello deben verificar la ecuación

$2(\alpha x_1) + 3(\alpha y_1) = 0$

$2(\alpha x_1) + 3(\alpha y_1) = \alpha(2x_1) + \alpha(3y_1)$
$= \alpha(2x_1 + 3y_1)$
$= \alpha(0)$

$2(\alpha x_1) + 3(\alpha y_1) = 0$

$\boxed{De\ (1), (2), (3)\ y (4)\ S\ es\ un\ Subespacio}$

Subespacios Vectoriales

EJEMPLOS

Ejemplo 2: $S = \{A \in R^{n\times n} / \ A = A^T\}$

(1) $S \neq \emptyset \ \exists \ \mathrm{N} = N^T \in R^{n\times n}$

(2) $S \subset R^{n\times n}$ *por definición de* S

(3) $L.C.I \quad A_1 \in R^{n\times n}, A_2 \in R^{n\times n}$

$A_1 \in S \rightarrow A_1 = {A_1}^T$

$A_2 \in S \rightarrow A_2 = {A_2}^T$

$(A_1 + A_2)^T = (A_1)^T + (A_2)^T$

¿ $A_1 + A_2 \in S$? Para ello deben verificar la Condición

$(A_1 + A_2)^T = (A_1 + A_2)$

$(A_1 + A_2)^T = (A_1)^T + (A_2)^T$

$= {A_1}^T + {A_2}^T$

$= A_1 + A_2$

Se verificó: $(A_1 + A_2)^T = A_1 + A_2$

(4) $L.C.E \quad A_1 \in R^{n\times n} \ y \ \alpha \in \mathbb{R}$

$A_1 \in S \rightarrow A_1 = {A_1}^T$

$(\alpha A_1) = (\alpha A_1)^T$

¿ $\alpha A_1 \in S$? Para ello deben verificar la Condición

$(\alpha A_1)^T = (\alpha A_1)$

$(\alpha A_1)^T = \alpha (A_1)^T$

$= \alpha (A_1)$

$(\alpha A_1)^T = (\alpha A_1)$

$De \ (1), (2), (3) \ y (4) \ S \ es \ un \ Subespacio$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 1:

Identificar si los siguientes conjuntos de vectores son subespacios Vectoriales de los espacios vectoriales reales implícitos en cada definición.

1.1) $D_1 = \{(0,0);(0,1);(1,0);(1,1)\} \ D_1 \subset \mathbb{R}^2$

$(C_1) \ D_1 \neq \emptyset \ \exists (0,0) \in D_1$

$(C_2) D_1 \subset \mathbb{R}^2$ *por definición de* D_1

$(C_3) \ LCI:$

Tomamos elementos de D_1

$\vec{v}_1 = (0,1) \in D_1$

$\vec{v}_2 = (1,1) \in D_1$

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (0,1) + (1,1) = (1,2)$

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (1,2) \ \notin D_1$ *No se cumple la L.C.I*

Luego: D_1 No es Subespacio de R^2

(ya que debe cumplir las 4 condiciones pero no cumple con C3)

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 1:
Identificar si los siguientes conjuntos de vectores son subespacios Vectoriales de los espacios vectoriales reales implícitos en cada definición.

1.2) $D_2 = \{(x,y) / \ x^2 + y^2 \leq 1\} \quad D_2 \subset R^2$

✔ $(C_1)\, D_2 \neq \emptyset \;\; \exists (0,0) \in D_2$

✔ $(C_2)\, D_2 \subset \mathbb{R}^2$ *por definición de* D_2

✖ $(C_3)\, L.C.I.$

Tomamos elementos de D_2

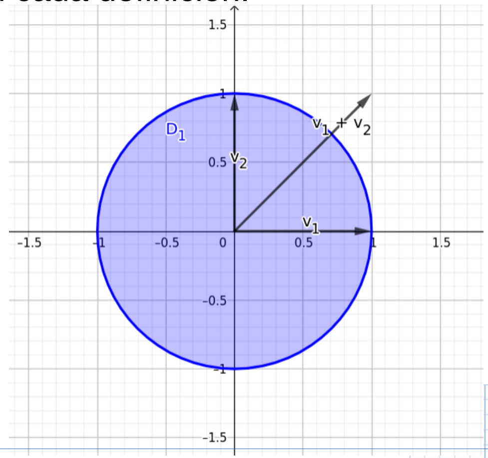
$\vec{v}_1 = (1,0) \in D_2$

$\vec{v}_2 = (0,1) \in D_2$

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (1,0) + (0,1) = (1,1)$

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (1,1) \notin D_2 \quad (1)^2 + (1)^2 \not\leq 1$

No se cumple la L.C.I



Luego: D_2 No es Subespacio de R^2

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 1:
Identificar si los siguientes conjuntos de vectores son subespacios Vectoriales de los espacios vectoriales reales implícitos en cada definición.

1.3) $D_3 = \{(x,y) \ / \ x^2 + y^2 = -1\} \quad D_3 \subset R^2$

✖ $(C_1)\, \forall\, x \in \mathbb{R} \wedge \forall\, y \in \mathbb{R} : \nexists (x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2 / (x\,;\,y) \in D_3 \Rightarrow D_3 = \emptyset$

Luego: D_3 No es Subespacio de R^2

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 1:
Identificar si los siguientes conjuntos de vectores son subespacios Vectoriales de los espacios vectoriales reales implícitos en cada definición.

1.5) $D_5=\{(x,y,z)/z=0\}$ $D_5\subset R^3$ Plano coordenado (x,y)

✔ (C_1) $D_5\neq\emptyset$ $\exists(0,0,0)\in D_5$

✔ (C_2) $D_5\subset\mathbb{R}^3$ *por definición de* D_5

✔ (C_3) $L.C.I.$

Tomamos elementos de D_5

$\vec{v}_1=(x_1,y_1,0)\in D_5$

$\vec{v}_2=(x_2,y_2,0)\in D_5$

$\vec{v}_1+\vec{v}_2=(x_1,y_1,0)+(x_2,y_2,0)=(x_1+x_2,y_1+y_2,0)$

$\vec{v}_1+\vec{v}_2=(x_1+x_2,y_1+y_2,0)\in D_5$

✔ (C_4) $L.C.E.$ $\vec{v}_1\in D_5$ y $\alpha\in\mathbb{R}$

$\vec{v}_1=(x_1,y_1,0)\in D_5$

¿$\alpha\vec{v}_1\in D_5$?

$\alpha\vec{v}_1=\alpha(x_1,y_1,0)=(\alpha x_1,\alpha y_1,0)\ \forall\alpha\in R$

$\alpha\vec{v}_1=(\alpha x_1,\alpha y_1,0)\in D_5$

Luego: D_5 Es Subespacio de R^3

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 1:
Identificar si los siguientes conjuntos de vectores son subespacios Vectoriales de los espacios vectoriales reales implícitos en cada definición.

1.7) $D_7=\{(x,y,z)/x+y+z=0\}$ $D_7\subset R^3$
Plano que pasa por el origen

✔ (C_1) $D_7\neq\emptyset$ $\exists(0,0,0)\in D_7$

✔ (C_2) $D_7\subset\mathbb{R}^3$ *por definición de* D_7

✔ (C_3) $L.C.I.$

Tomamos elementos de D_7 *que cumplan con la ecuación*

$\vec{v}_1=(x_1,y_1,z_1)\in D_7 \rightarrow x_1+y_1+z_1=0$

$\vec{v}_2=(x_2,y_2,z_2)\in D_7 \rightarrow x_2+y_2+z_2=0$

$\vec{v}_1+\vec{v}_2=(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$

$(x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2)=0$

$(x_1+y_1+z_1)+(x_2+y_2+z_2)=0$

$(0)+(0)=0\ \in D_7$

✔ (C_4) $L.C.E$ $\vec{v}_1\in D_7$ y $\alpha\in\mathbb{R}$

$\vec{v}_1=(x_1,y_1,z_1)\in D_7$

¿$\alpha\vec{v}_1\in D_7$?

$\alpha\vec{v}_1=\alpha(x_1,y_1,z_1)=(\alpha x_1,\alpha y_1,\alpha z_1)$

$\alpha x_1+\alpha y_1+\alpha z_1=0$

$\alpha(x_1+y_1+z_1)=\alpha 0=0$

Luego: D_7 Es Subespacio de R^3