Álgebra y Geometría Analítica

Clase 18: Sistemas homogéneos y cuadrados

UNIVERSIDAD
TECNOLÓGICA
NACIONAL

Unidad 3 – Clase 18

Repaso de la Clase Anterior

IGUALDAD – ECUACIONES – IDENTIDADES:

Igualdad: Es la relación de comparación. Se usa tanto en ecuaciones como en identidades.

Ecuaciones: La igualdad se cumple para *algunos* de los valores del espacio en el cual se plantea el problema. P/ej.: $2x = 4$ (1)

Identidades: La igualdad se cumple para *todos* los valores del espacio en el cual se planteó el problema. P/ej.: $2x + 4 = 2\,(x + 2)$ (2)

Solución de una ecuación: El valor o los valores de la incógnita que hacen que la igualdad se cumpla se llaman *solución de la ecuación*. P/ej.: 2 es solución de (1).

Ecuaciones lineales: Cuando se habla de ecuaciones lineales, todas las variables intervinientes en la ecuación tienen exponente uno.

Repaso de la Clase Anterior

NOTACIÓN:

Notación general:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Es un sistema de ecuaciones lineales de m ecuaciones y n incógnitas

Repaso de la Clase Anterior

NOTACIÓN:

Notación Matricial:

Un sistema de ecuaciones lineales puede expresarse utilizando notación matricial siendo: A la matriz de los coeficientes de las ecuaciones ($A \in R^{m \times n}$), X la matriz de las variables ($X \in R^{n \times 1}$) y B la matriz de los términos independientes ($B \in R^{m \times 1}$).

Así, un sistema de m ecuaciones y n incógnitas puede expresarse con notación matricial:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_i \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A . X = B}$$

Repaso de la Clase Anterior

CLASIFICACIÓN:

- **SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES**
  - **COMPATIBLE (SC) (Existe Solución)**
    - **DETERMINADO (SCD) (solución única)**
    - **INDETERMINADO (SCI) (infinitas soluciones)**
  - **INCOMPATIBLE (SI) (No existe Solución)**

Repaso de la Clase Anterior

EN EL PLANO:

Ejemplo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

En R^2: es un sistema de ecuaciones compuesto por dos ecuaciones de rectas. Será:

- **SCD**: Las rectas se cortan. La solución es única: un punto.
- **SCI**: Las rectas coinciden. Infinitas soluciones.
- **SI**: Las rectas son paralelas (no se cortan). No tiene solución

Repaso de la Clase Anterior

EN EL ESPACIO:

Ejemplo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

En R^3: es un sistema de ecuaciones compuesto por tres ecuaciones de planos. Será:

- **SCD**: Los planos se cortan en un punto. La solución es única: un punto.
- **SCI**: Los planos se cortan en una recta o son coincidentes. Infinitas soluciones.
- **SI**: Los planos no se cortan (simultáneamente). No tiene solución

Repaso de la Clase Anterior

TEOREMA DE ROUCHE FROBENIUS:

Sea el sistema de ecuaciones expresado matricialmente: A . X = B con A la matriz de los coeficientes de las ecuaciones ($A \in R^{m \times n}$), X la matriz de las variables ($X \in R^{n \times 1}$) y B la matriz de los términos independientes ($B \in R^{m \times 1}$).

Todo sistema de ecuaciones lineales resulta compatible sí y solo sí el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada.

A’: matriz ampliada

$A' = (A \mid B)$ con $A' \in R^{m \times (n+1)}$

Simbólicamente: $S.E.L.\ es\ compatible \Leftrightarrow r(A) = r(A')$

Normalmente, de la doble implicación se usa solo la implicación: ’ <= ’

Repaso de la Clase Anterior

TEOREMA DE ROUCHE FROBENIUS:

Corolarios del Teorema de RF:

$$I)\ \ r(A) \neq r(A') \Rightarrow SI$$
$$II)\ r(A) = r(A') = n \left(n: n° \, de \, incógnitas\right) \Rightarrow SCD$$
$$III)\ r(A) = r(A') = h < n \Rightarrow SCI \left(con\ n - h\ grados\ de\ libertad\right)$$

Grados de Libertad:

Los grados de libertad son la cantidad de variables a las que se le puede asignar valores libremente.

El resto de las variables no son libres, sino que dependen de otras.

Sistemas Homogeneos

DEFINICIÓN

Se llama sistema homogéneo a toda aquel que tiene todos sus términos independientes iguales a cero. Es decir:

A.X = O

Observación:

Como r(A) = r(A’) ==> A.X = O es siempre compatible

Sistemas Homogeneos

SOLUCION TRIVIAL

En un sistema homogéneo, el vector nulo SIEMPRE es solución.

Ejemplo: $\begin{cases} 3x-2y+\ z=0 \\ -x+4y+2z=0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ \frac{-7}{8} & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 0 & 1 \\ \frac{-7}{8} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{4}x \quad + \quad z=0 \\ \frac{-7}{8}x+y \quad\quad =0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{-5}{4}x \\ y = \frac{7}{8}x \end{cases} \Rightarrow S_H=\left\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 / (x;y;z)=\left(\lambda;\frac{7}{8}\lambda;\frac{-5}{4}\lambda\right) \forall\lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

$$S_H=\left\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 / \boxed{(x;y;z)=\lambda\left(1;\frac{7}{8};\frac{-5}{4}\right)} \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

Es una recta que pasa por el **origen**
y está dirigida por (–8 ; –7 ; 10)

Sistemas Homogeneos

SOLUCION TRIVIAL

Ejemplo (cont.): OBSERVACION INTERESANTE

El vector normal del primer plano: $\vec{n}_\alpha = (3\,;-2\,;1)$
El vector normal del segundo plano: $\vec{n}_\beta = (-1\,;4\,;2)$

==> $\boxed{\vec{n} = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = (-8\,;-7\,;10)}$

Observar que el valor del vector $\bar{n}$ es el mismo que el vector director de la recta que es solución S_H.

Sistemas Homogeneos

Ejemplo:

r(A) = r(A') = 2 < n=3
=> SCI con 1 gl (x2)

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=0 \\ x_1+x_2 \qquad =0 \\ \qquad x_2+x_3=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{cases} x_1=-x_2 \\ x_3=-x_2 \end{cases}$$

Armado de la solución:

$$S_H=\left\{(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3/(x_1;x_2;x_3)=(-\lambda;\lambda;-\lambda)\Rightarrow\boxed{(x_1;x_2;x_3)=\lambda(-1;1;-1)}\,\forall\,\lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

Es una recta que pasa por el origen
y está dirigida por (–1;1;–1)

Sistemas Homogeneos

Ejemplo: Segunda parte: Resolver el sistema inhomogéneo

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \boxed{\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)}$$

r(A)=r(A')=2 < 3

==> SCI 1 gl

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_2 \\ x_3 = -x_2 \end{cases}$$

Armado de la solución:

$$S_{inh} = \left\{ (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 / \boxed{(x_1; x_2; x_3) = \boxed{(2;0;0)} + \lambda \boxed{(-1;1;-1)}} \; \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Es una recta que pasa por (2;0;0)
y está dirigida por (–1;1;–1)

Sol. particular

Sol. del homogeneo asociado

Sistemas Homogeneos

CONCLUSIÓN:

$$\boxed{S_{inh} = S_{part} + S_H}$$

Nota: Sabiendo esto, y sabiendo que (1;1;1) es solución, para hallar la solución del sistema, hubiera sido suficiente con hallar la solución del sistema homogéneo y usar (1;1;1) como solución particular

Pregunta: Si el sistema es SCD y se entrega una solución particular. ¿Cuál será la solución del sistema inhomogéneo?
Rta.: La misma solución Particular

Sistemas Cuadrados

Son sistemas donde $A \in R^{n \times n}$:

Sistemas Cuadrados

METODO DE LA MATRIZ INVERSA

$$A.X = B \qquad Si\ det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$$

$$I.X = A^{-1}.B$$

$$X = A^{-1}.B$$

Nota: Si un sistema admite solución por el método de la matriz inversa, el sistema es SCD siempre, ya que si existe A^{-1}, su determinante no es nulo y entonces, r(A) = r(A') = n

Sistemas Cuadrados

METODO DE LA MATRIZ INVERSA

Ejemplo:

$$\begin{cases} x+y+2z=\ 1 \\ x+2y-z=-2 \\ x+3y+z=\ 5 \end{cases} \qquad det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}=5$$

(LP por columna 1)

$$Cof(A)=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & -2 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(A)=\begin{pmatrix} 5 & 5 & -5 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 5 & -5 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}.B=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 5 & -5 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -30 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Sistemas Cuadrados

REGLA DE CRAMER

$X_j = \frac{\Delta X_j}{\Delta} = \frac{\Delta X_j}{det(A)}$ ΔX_j es la matriz donde a la columna j se la reemplaza por B

Para resolver sistemas de ecuaciones usando la regla de Cramer, los sistemas deben ser cuadrados y las matrices asociadas a los coeficientes deben ser regulares.

La regla de Cramer también resuelve sistemas SCD.

Sistemas Cuadrados

REGLA DE CRAMER

Ejemplo:

$$\begin{cases} x+y \quad =a \\ x-y \quad =b \\ x+y+z=c \end{cases}$$

$$\Delta=det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2 \quad \text{LP x Col 3}$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ b & -1 & 0 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}=-a-b$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix}=b-a$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & b-a \\ 0 & 0 & c-a \end{vmatrix}=-2(c-a)$$

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{-a-b}{-2}=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{b-a}{-2}=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$$

$$z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{-2(c-a)}{-2}=c-a$$

$$\boxed{\Rightarrow S=\left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b \\ c-a \end{matrix} \right\}}$$

Ejercicios de la Guía

3.1.a Analizar los siguientes sistemas de ecuaciones lineales indicando para qué valores del parámetro a∈R, cada uno de ellos es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible. Escribir el conjunto solución e indicar el grado de libertad cuando correspondiere.

$$\begin{cases} x_2+(a-1)x_3=a \\ (a-1)x_2+x_3=a \\ (a-2)x_1=a+2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & a-1 & a \\ 0 & a-1 & 1 & a \\ a-2 & 0 & 0 & a+2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} a-2 & 0 & 0 & a+2 \\ 0 & a-1 & 1 & a \\ 0 & 1 & a-1 & a \end{array}\right) \sim$$

$$a\neq 2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a+2/a-2 \\ 0 & a-1 & 1 & a \\ 0 & 1 & a-1 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a+2/a-2 \\ 0 & a-1 & 1 & a \\ 0 & -a(a-2) & 0 & -a(a-2) \end{array}\right) \sim$$

$$a\neq 0 \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a+2/a-2 \\ 0 & a-1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \boxed{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a+2/a-2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)} \qquad \begin{cases} x=a+2/a-2 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

Ejercicios de la Guía

3.1.a CONTINUACIÓN:

I) Se analiza si a ≠ 2 y a ≠ 0:

r(A) = r(A') = 3 = n ==> SCD

$$S=\left\{(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3/(x_1;x_2;x_3)=\left(\frac{a+2}{a-2};1;1\right)\right\}$$

II) Se analiza para a = 0:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&-1&0\\0&-1&1&0\\-2&0&0&2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&-1&0\\0&0&0&0\\-2&0&0&2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&-1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&-1\end{array}\right)$$

r(A)=r(A')=2<n=3
==> SCI 1 gl (a x3) $\begin{cases}y=z\\x=-1\end{cases}$

$$S=\left\{(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3/\boxed{(x_1;x_2;x_3)=(-1;0;0)+\lambda(0;1;1)}\ \forall\lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

Una recta que pasa por (-1;0;0)
Dirigida por (0;1;1)

Ejercicios de la Guía

3.1.a CONTINUACIÓN:

III) Se analiza para a = 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

r(A) = 1 < r(A') = 2 ==> SI

Ejercicios de la Guía

5.1.c Analizar para qué valores de "a" el sistema resulta SCD, SCI o SI (de Guía vieja)..

$$\begin{cases} (a-6)x_2+3x_3=0 \\ 2x_1 \quad +x_2-x_3 \ =a-4 \\ (a+1)x_1+2x_2 \quad =3 \end{cases} \qquad det(A)=\begin{vmatrix} 0 & a-6 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ a+1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & a-6 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \\ a+1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$det(A)=\begin{vmatrix} 6 & a-3 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ a+1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow det(A)=-1(12-a^2+3a-a+3)=a^2-2a-15$$

(raíces: a = 5, a = –3)

I) $Si \ a\neq 5 \wedge a\neq -3 \Rightarrow r(A)=3=r(A')\Rightarrow SCD$

Ejercicios de la Guía

5.1.c CONTINUACION

II) Se analiza para a = 5:

$$\begin{cases} -x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+x_2-x_3=1 \\ 6x_1+2x_2=3 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 6 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right) \sim \boxed{\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}$$

r(A) = r(A')=2<n=3
==> SCI 1 gl (x3)

Ejercicios de la Guía

5.1.c CONTINUACION

III) Se analiza para a = -3:

$$\begin{cases} -9x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+x_2-x_3=-7 \\ -2x_1+2x_2=3 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -9 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -7 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 7 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 7 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 7/2 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 7/2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

$$r(A)=2 \neq r(A')=3 \Rightarrow SI$$

Ejercicios de la Guía

M2

Sean la recta dada como intersección de dos planos $r = \pi 1 \cap \pi 2$ y el plano $\pi 3$. Se plantea el sistema formado con las tres ecuaciones de los planos $\pi 1$, $\pi 2$ y $\pi 3$. Sean $A \in R^{3\times 3}$ y $A' \in R^{3\times 4}$ las matrices asociadas al sistema de ecuaciones lineales.
Analizar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar claramente cada respuesta.

a) Si $r(A) = r(A') = 2$ entonces la recta $r \subset \pi 3$. **Es V**
b) Si $r(A) = r(A') = 3$ entonces $r \perp \pi 3$. **Es F**
c) Si $r(A) < r(A')$ entonces $r \parallel \pi 3$ sin que $r \subset \pi 3$. **Es V**