Álgebra y Geometría Analítica

Clase 17: Sistemas de Ecuaciones Lineales

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

Unidad 3 – Clase 17

Sistemas de Ecuaciones Lineales

IGUALDAD – ECUACIONES – IDENTIDADES:

Igualdad: Es la relación de comparación. Se usa tanto en ecuaciones como en identidades.

Ecuaciones: La igualdad se cumple para *algunos* de los valores del espacio en el cual se plantea el problema. P/ej.: $2x = 4$ (1)

Identidades: La igualdad se cumple para *todos* los valores del espacio en el cual se planteó el problema. P/ej.: $2x + 4 = 2(x + 2)$ (2)

Solución de una ecuación: El valor o los valores de la incógnita que hacen que la igualdad se cumpla se llaman *solución de la ecuación*. P/ej.: 2 es solución de (1).

Ecuaciones lineales: Cuando se habla de ecuaciones lineales, todas las variables intervinientes en la ecuación tienen exponente uno.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

NOTACIÓN:

Notación general:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Es un sistema de ecuaciones lineales de m ecuaciones y n incógnitas

Sistemas de Ecuaciones Lineales

NOTACIÓN:

Notación Matricial:

Un sistema de ecuaciones lineales puede expresarse utilizando notación matricial siendo: A la matriz de los coeficientes de las ecuaciones ($A \in R^{m \times n}$), X la matriz de las variables ($X \in R^{n \times 1}$) y B la matriz de los términos independientes ($B \in R^{m \times 1}$).

Así, un sistema de m ecuaciones y n incógnitas puede expresarse con notación matricial:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_i \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A.X=B}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

CLASIFICACIÓN:

- **SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES**
  - **COMPATIBLE (SC) (Existe Solución)**
    - **DETERMINADO (SCD) (solución única)**
    - **INDETERMINADO (SCI) (infinitas soluciones)**
  - **INCOMPATIBLE (SI) (No existe Solución)**

Sistemas de Ecuaciones Lineales

EN EL PLANO:

Ejemplo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

En R^2: es un sistema de ecuaciones compuesto por dos ecuaciones de rectas. Será:

- **SCD**: Las rectas se cortan. La solución es única: un punto.
- **SCI**: Las rectas coinciden. Infinitas soluciones.
- **SI**: Las rectas son paralelas (no se cortan). No tiene solución

Sistemas de Ecuaciones Lineales

EN EL ESPACIO:

Ejemplo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

En R^3: es un sistema de ecuaciones compuesto por tres ecuaciones de planos. Será:

- **SCD**: Los planos se cortan en un punto. La solución es única: un punto.
- **SCI**: Los planos se cortan en una recta o son coincidentes. Infinitas soluciones.
- **SI**: Los planos no se cortan (simultáneamente). No tiene solución

Sistemas de Ecuaciones Lineales

TEOREMA DE ROUCHE FROBENIUS:

Sea el sistema de ecuaciones expresado matricialmente: A . X = B con A la matriz de los coeficientes de las ecuaciones ($A \in R^{m \times n}$), X la matriz de las variables ($X \in R^{n \times 1}$) y B la matriz de los términos independientes ($B \in R^{m \times 1}$).

Todo sistema de ecuaciones lineales resulta compatible sí y solo sí el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada.

A’: matriz ampliada

$A' = (A \mid B)$ con $A' \in R^{m \times (n+1)}$

Simbólicamente: $S.E.L.\ es\ compatible \Leftrightarrow r(A) = r(A')$

Normalmente, de la doble implicación se usa solo la implicación: ’ <= ’

Sistemas de Ecuaciones Lineales

TEOREMA DE ROUCHE FROBENIUS:

Corolarios del Teorema de RF:

$$I)\ \ r(A) \neq r(A') \Rightarrow SI$$
$$II)\ r(A) = r(A') = n\,(n: n°\,de\,incógnitas) \Rightarrow SCD$$
$$III)\ r(A) = r(A') = h < n \Rightarrow SCI\,(con\ n-h\ grados\ de\ libertad)$$

Grados de Libertad:

Los grados de libertad son la cantidad de variables a las que se le puede asignar valores libremente.

El resto de las variables no son libres, sino que dependen de otras.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

EJEMPLO:

Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales, presentar si existe, su solución.

$$\begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ 3x-5y+z=-10 \\ 0+11y+8z=\ \ 7 \end{cases}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

EJEMPLO:

Enfoque del problema:

1) Identificar la matriz ampliada A'.
2) Calcular r(A') y r(A).
3) Aplicar RF y definir si el sistema es SCD, SI y SCI (y sus gl).
4) Presentación de la solución.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

EJEMPLO:

1) Identificación de A':

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 1 & -10 \\ 0 & 11 & 8 & 7 \end{array}\right)$$

2) Calcular r(A') y r(A):

r(A') = r(A') = 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 1 & -10 \\ 0 & 11 & 8 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -11 & -8 & -7 \\ 0 & 11 & 8 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & \frac{11}{8} & 1 & \frac{7}{8} \\ 0 & 11 & 8 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-17}{8} & 0 & \frac{-29}{8} \\ 0 & \frac{11}{8} & 1 & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

No se puede pivotear más

3) Aplicar RF y definir si el sistema es SCD, SI y SCI (y sus gl):

r(A) = r(A') = 2 < n=3 ==> SCI con 1 gl (se lo asignamos a “y”)

A los fines prácticos, el rango de una matriz es equivalente a la cantidad de veces que se puede hallar un pivot.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

EJEMPLO:

4) Presentación de la Solución:

$$A' \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-17}{8} & 0 & \frac{-29}{8} \\ 0 & \frac{11}{8} & 1 & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{17}{8} y = \frac{-29}{8} \\ \frac{11}{8} y + z = \frac{7}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-29}{8} + \frac{17}{8} y \\ z = \frac{7}{8} - \frac{11}{8} y \end{cases}$$

La solución:

$$s = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / (x;y;z) = (\frac{-29}{8} + \frac{17}{8}\lambda; \lambda; \frac{7}{8} - \frac{11}{8}\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$s = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / (x;y;z) = (\frac{-29}{8}; 0; \frac{7}{8}) + (\frac{17}{8}\lambda; \lambda; -\frac{11}{8}\lambda) \forall \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$\boxed{s = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / (x;y;z) = (\frac{-29}{8}; 0; \frac{7}{8}) + \lambda(17; 8; -11) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

s es una recta

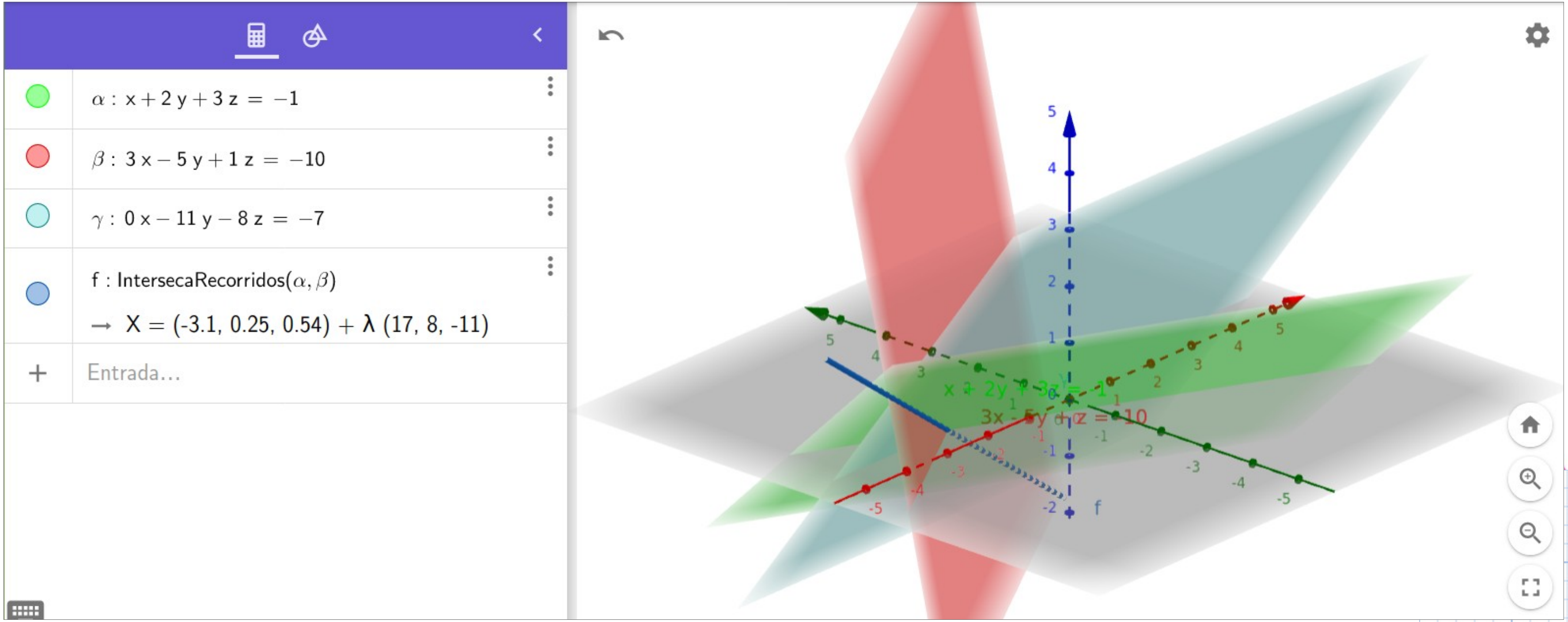
$$\begin{cases} x = \frac{-29}{8} + 17\lambda \\ y = 8\lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \frac{7}{8} - 11\lambda \end{cases}$$

Puede verificarse asignando valores al parámetro y verificando la igualdad.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

EJEMPLO:

Veamos el problema con GeoGebra.



Ejercicios de la Guía

1.1 Escribir las matrices representativas de los siguientes sistemas lineales. Analizar su clasificación y expresar

1.1.a) $\begin{cases} x+y-z=-1 \\ -2x-3y+4z=8 \\ -x-y+3z=6 \end{cases}$

Las matrices representativas del sistema A.X = B:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

La matriz ampliada A’:

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

Ejercicios de la Guía

1.1 Escribir las matrices representativas de los siguientes sistemas lineales. Analizar su clasificación y expresar

1.1.a) cont.

Resolución del sistema:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

==> r(A) = r(A’) = 3 = nº incógnitas ==> SCD

$$S = \left\{ (x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / \boxed{(x;y;z) = \left(\frac{5}{2}; -1; \frac{5}{2}\right)} \right\}$$

Un punto

Ejercicios de la Guía

1.1 Escribir las matrices representativas de los siguientes sistemas lineales. Analizar su clasificación y expresar

1.1.a) cont.

Verificación:

$$\begin{cases} \frac{5}{2} \quad -1 \quad -1.\frac{5}{2} = -1 \\ -2\left(\frac{5}{2}\right) - 3(-1) + 4\left(\frac{5}{2}\right) = 8 \\ -\left(\frac{5}{2}\right) - (-1) + 3\left(\frac{5}{2}\right) = 6 \end{cases}$$

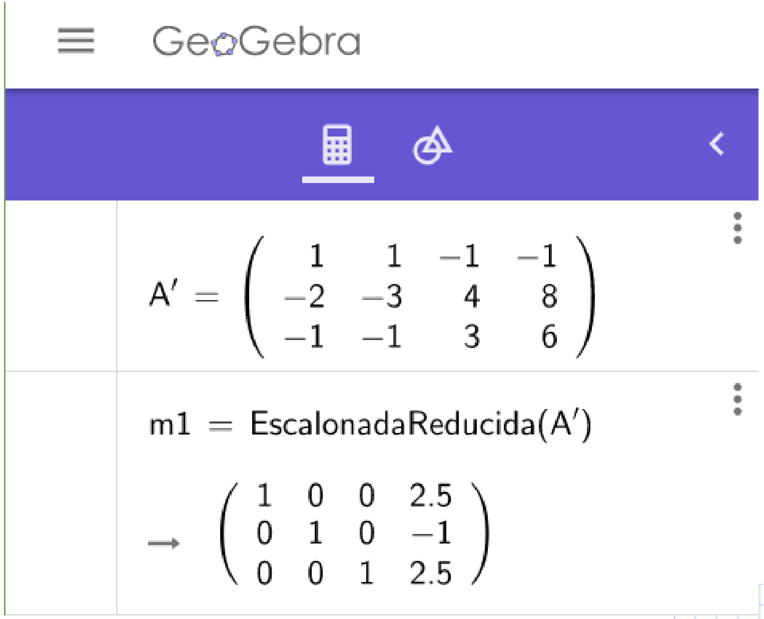
Ejercicios de la Guía

1.2 Comprobar los resultados obtenidos utilizando “Cálculo Simbólico (CAS)” en Geogebra

1.2.a) $\begin{cases} x+y-z=-1 \\ -2x-3y+4z=8 \\ -x-y+3z=6 \end{cases}$

Nota: para ingresar A’:

A’={{1,1,-1,-1},{-2,-3,4,8},{-1,-1,3,6}}



Ejercicios de la Guía

1.1 Escribir las matrices representativas de los siguientes sistemas lineales. Analizar su clasificación y expresar

1.1.c) $$\begin{cases} x+y+0+t=3 \\ 0+0+z-t=7 \\ x+y-z+2t=0 \end{cases}$$

Las matrices representativas del sistema A.X = B:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz ampliada A':

$$A'=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Ejercicios de la Guía

1.1 Escribir las matrices representativas de los siguientes sistemas lineales. Analizar su clasificación y expresar

1.1.c) cont.

Resolución del sistema:

r(A) = 2

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

r(A') = 3

$$r(A) = 2 \neq r(A') = 3 \Rightarrow SI$$

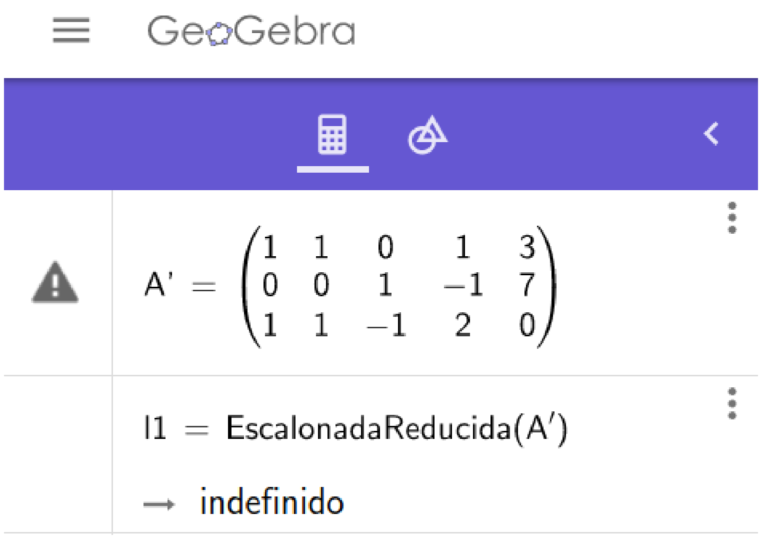
Ejercicios de la Guía

1.2 Comprobar los resultados obtenidos utilizando “Cálculo Simbólico (CAS)” en Geogebra

1.2.c) $\begin{cases} x+y+\ 0+\ t=3 \\ 0+0+\ z-\ t=7 \\ x+y-z+2t=0 \end{cases}$

Nota: para ingresar A’:

A’={{1,1,0,1,3},{0,0,1,-1,7},{1,1,-1,2,0}}



Ejercicios de la Guía

1.1 Escribir las matrices representativas de los siguientes sistemas lineales. Analizar su clasificación y expresar

1.1.d) $\begin{cases} x - y + z - 2t = 0 \\ -2x + 2y - z + t = 0 \end{cases}$

Las matrices representativas del sistema A.X = B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz ampliada A':

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Ejercicios de la Guía

1.1 Escribir las matrices representativas de los siguientes sistemas lineales. Analizar su clasificación y expresar

1.1.d) cont.

Resolución del sistema:

$$A'=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{cases} x=y-t \\ y=y \\ z=3t \\ t=t \end{cases}$$

r(A) = r(A') = 2 < #_incógnitas=4 ==> SCI (2 gl asignados a "y" y a "t")

Armado de la Solución:

$$S=\left\{(x:y;z;t)\in\mathbb{R}^4/(x:y;z;t)=(\lambda-\mu;\lambda;3\mu;\mu)\ \forall\lambda\in R\ \forall\mu\in\mathbb{R}\right\}$$

$$S=\left\{(x:y;z;t)\in\mathbb{R}^4/(x:y;z;t)=(0;0;0;0)+\lambda(1;1;0;0)+\mu(-1;0;3;1)\ \forall\lambda\in R\ \forall\mu\in\mathbb{R}\right\}$$

Puede verificarse asignando valores al parámetro y verificando la igualdad.

Ejercicios de la Guía

1.2 Comprobar los resultados obtenidos utilizando “Cálculo Simbólico (CAS)” en Geogebra

1.2.d) $\begin{cases} x - y + z - 2t = 0 \\ -2x + 2y - z + t = 0 \end{cases}$

Nota: para ingresar A’:

A’={{1,-1,1,-2,0},{-2,2,-1,1,0}}