Álgebra y Geometría Analítica

Clase 14: Rango de una Matriz

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

Unidad 2 – Clase 14

01 Rango de una Matriz

02 Ejercicios Complementarios

Rango de una Matriz

Definición:
Se llama así al orden del máximo determinante distinto de cero que se puede distinguir dentro de la matriz.

Notación:
r(A): Rango de la matriz A

Ejemplo:
Hallar el r(M) con: $M=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}; M \in R^{3\times 4}$

Calculamos $det(M_1)$: El determinante asociado a M, pero eliminando la columna 1.

$$det(M_1)=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix} -0 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix}=0$$

Rango de una Matriz

Continuación:

Calculamos entonces, *det(M₂)*:

$$det\left(M_2\right)=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 9 \\ 8 & 0 & 18 \end{vmatrix}=0$$

Debemos continuar: calcularemos $det(M_3)$:

$$det\left(M_3\right)=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Por último calcularemos $det(M_4)$:

$$det\left(M_4\right)=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix}=0$$

Rango de una Matriz

Continuación:
Se calcularon todos los determinantes de orden 3 y todos fueron nulos. Entonces, su rango no es 3.

Ahora, para determinar si el rango de M es 2, basta con hallar un determinante de orden 2 cuyo resultado no sea cero.

Por ejemplo: $det\left(M_{1,1}\right)=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1$

Luego: ***r(M) = 2***

Ejercicios Complementarios

Ejercicio 7) a) de Ejercicios complementarios de Matriz Inversa.

Hallar la matriz “ X ”, en cada uno de los siguientes casos:

a) $X \cdot A = B$ **siendo:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Ejercicios Complementarios

Ejercicio 7) a) de Ejercicios complementarios de Matriz Inversa.

Hallar la matriz “ X ”, en cada uno de los siguientes casos:

a) $X \, . \, A = B$ **siendo:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

<u>Resolución:</u>

Abordaje:

$$X \, . \, A = B$$

$X \, . \, A \, . \, A^{-1} = B \, . \, A^{-1}$ Pos-multiplicamos por A^{-1} en ambos miembros

$X \, . \, I = B \, . \, A^{-1}$ Por definición de Matriz Inversa

$X = B \, . \, A^{-1}$ Por ser I elemento neutro del producto de Matrices

Ejercicios Complementarios

<u>Cálculo de *A*$^{-1}$:</u>

Existencia de *A*$^{-1}$:

Antes de calcular la inversa, debemos saber si la inversa existe, por ello, calcularemos *det(A)*:

Para el cálculo del determinante, aplicaremos la regla de Chío (método del pivoteo en determinante):

Iniciamos pivoteando en a_{11}:

$$det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Luego aplicamos la regla de Laplace por columna 1:

$$det(A)=(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\Rightarrow det(A)=-6$$

$$\text{Como } det(A)\neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$$

Ejercicios Complementarios

Usaremos el método del pivoteo (operaciones elementales) para hallar la matriz inversa de A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ejercicios Complementarios

Usaremos el método del pivoteo (operaciones elementales) para hallar la matriz inversa de A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Observación: En la fila del pivot hay dos ceros, y las respectivas columnas se mantuvieron iguales tras el proceso.

Ejercicios Complementarios

Usaremos el método del pivoteo (operaciones elementales) para hallar la matriz inversa de A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Multiplico a la Fila 2 x (–1) para elegir pivot en a_{22}.

Ejercicios Complementarios

Usaremos el método del pivoteo (operaciones elementales) para hallar la matriz inversa de A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ejercicios Complementarios

Usaremos el método del pivoteo (operaciones elementales) para hallar la matriz inversa de A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Nuevamente, observar que en la fila del pivot hay un cero, y las respectiva columna se mantiene.

Ejercicios Complementarios

Usaremos el método del pivoteo (operaciones elementales) para hallar la matriz inversa de A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Multiplico a la Fila 2 x (1/6) para elegir pivot en a_{33}.

Ejercicios Complementarios

Usaremos el método del pivoteo (operaciones elementales) para hallar la matriz inversa de A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}\right)$$

Ejercicios Complementarios

Usaremos el método del pivoteo (operaciones elementales) para hallar la matriz inversa de A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}\right)$$

Ejercicios Complementarios

Luego:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Ejercicios Complementarios

Luego:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$A\,.\,A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicios Complementarios

Ahora calcularemos X:

$$X = B \,.\, A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Ejercicios Complementarios

Ahora calcularemos X:

$$X = B . A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 2 & \frac{4}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{-7}{2} & 2 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}}$$