Álgebra y Geometría Analítica

Clase 13: Matriz Inversa

UNIVERSIDAD
TECNOLÓGICA
NACIONAL

Unidad 2 – Clase 13

Matriz Inversa

La Matriz Inversa es una Matriz Cuadrada.

En algunas bibliografías se la puede encontrar como Matriz Regular, No Singular, Inversible, Invertible.

- ✓ De existir la Matriz inversa, esta es única.
- ✓ Su determinante no debe ser nulo (debe ser cuadrada).
- ✓ No todas las matrices cuadradas tienen inversa.

Definición:

$$Sea\ A \in \mathbb{R}^{nxn} / det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} (su\ inversa) / A . A^{-1} = A^{-1} . A = I$$

Matriz Inversa

MÉTODOS PARA CALCULAR A^{-1}

1. Con determinante y matriz adjunta

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Adj(A)}$$

Matriz Inversa

MÉTODOS PARA CALCULAR A^{-1}

1. Con determinante y matriz adjunta

Dada una matriz cuadrada, procederemos a buscar su inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \text{ ¿} det(A)?$$

PASO 1

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \overset{F_2: F_2 - 3F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 10 & -4 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \overset{F_3: F_3 - 2F_1}{=} \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} -2 \\ 10 \\ 10 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{matrix} \end{vmatrix} \overset{\text{Aplicamos Laplace } C_1}{=} 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 10 & -4 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} = 1(-10 + 40) = 30$$

$$\boxed{det(A) = 30}$$

Como $det(A) \neq 0$ la matriz A es Inversible

Matriz Inversa

PASO 2

Matriz de Cofactores

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 10 \qquad C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \qquad C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 10$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 8 \qquad C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -10$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2 \qquad C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 4 \qquad C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 10$$

$$\boxed{cof\ (A) = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 10 \\ 8 & -1 & -10 \\ -2 & 4 & 10 \end{pmatrix}}$$

PASO 3

Matriz Adjunta $Adj(A) = [cof\,(A)]^T$

$$\boxed{Adj(A) = \begin{pmatrix} 10 & 8 & -2 \\ -5 & -1 & 4 \\ 10 & -10 & 10 \end{pmatrix}}$$

Matriz Inversa

PASO 4

Matriz Inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Adj(A) \qquad det|A| = 30 \qquad Adj(A) = \begin{pmatrix} 10 & 8 & -2 \\ -5 & -1 & 4 \\ 10 & -10 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 10 & 8 & -2 \\ -5 & -1 & 4 \\ 10 & -10 & 10 \end{pmatrix} \qquad \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 10/30 & 8/30 & -2/30 \\ -5/30 & -1/30 & 4/30 \\ 10/30 & -10/30 & 10/30 \end{pmatrix}}$$

Comprobación

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10/30 & 8/30 & -2/30 \\ -5/30 & -1/30 & 4/30 \\ 10/30 & -10/30 & 10/30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Inversa

2. Con Operaciones Elementales

Hay tres operaciones elementales que se pueden aplicar en una matriz.

1) Intercambiar filas.
2) Multiplicar a una fila por un escalar distinto de cero.
3) Sumar a una fila un múltiplo escalar de otra.

Si se aplican operaciones elementales a una matriz, se obtiene otra Matriz "equivalente"

Notación: $A \sim B$

Al procedimiento de hallar matrices equivalentes utilizando operaciones elementales se lo denomina "Método de Gauss-Jordan"

Matriz Inversa

2. Con Operaciones Elementales

Aplicamos operaciones elementales con la Matriz Ampliada

$$(A|I) \xrightarrow{\text{O.E}} \left(I \middle| A^{-1}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_2: F_2 - 3F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3: F_3 - 2F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3: F_3 - F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{F_3: \frac{1}{3}F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right) \overset{F_2: F_2 + 4F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & -5/3 & -1/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right) \overset{F_2: \frac{1}{10}F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5/30 & -1/30 & 4/30 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$\overset{F_1: F_1 + 2F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 20/30 & 2/30 & 8/30 \\ 0 & 1 & 0 & -5/30 & -1/30 & 4/30 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right) \overset{F_1: F_1 - F_3}{\sim} \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{I} \middle| \underbrace{\begin{array}{ccc} 10/30 & 8/30 & -2/30 \\ -5/30 & -1/30 & 4/30 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{array}}_{A^{-1}} \right)$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 10/30 & 8/30 & -2/30 \\ -5/30 & -1/30 & 4/30 \\ 10/30 & -10/30 & 10/30 \end{pmatrix}}$$

Matriz Inversa

2. Con Operaciones Elementales

Método del Pivot

$$(A|I) \xrightarrow{\text{O.E}} (I|A^{-1})$$

- ✓ Se pivotea siempre en el 1. De no existir se debe generar.
- ✓ Cuando se pivotea, la columna se completa con ceros (excepto el lugar del pivot) y la fila permanece igual.
- ✓ No se repite fila y columna para aplicar el pivot.

Matriz Inversa

2. Con Operaciones Elementales

Método del Pivot

$$(A|I) \xrightarrow{\text{O.E}} (I|A^{-1})$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 8 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -30 & 0 & 5 & 1 & -4 \\ 0 & -10 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 8 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5/30 & -1/30 & 4/30 \\ 0 & -10 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10/30 & 8/30 & -2/30 \\ 0 & 1 & 0 & -5/30 & -1/30 & 4/30 \\ 0 & 0 & 1 & 10/30 & -10/30 & 10/30 \end{array}\right)$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 10/30 & 8/30 & -2/30 \\ -5/30 & -1/30 & 4/30 \\ 10/30 & -10/30 & 10/30 \end{pmatrix}}$$

Matriz Inversa

PROPIEDADES DE LA MATRIZ INVERSA

(I) $(A^{-1})^{-1} = A$

(II) $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$

(III) $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$

(IV) $(A.B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

(V) $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

(VI) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$(VII)\, det(A^{-1}) = [det(A)]^{-1}$

Matriz Inversa

OBSERVACIÓN: MATRIZ ORTOGONAL

$$A \text{ es Ortogonal} \leftrightarrow AA^T = A^T A = I$$

$$\begin{cases} \det(A)=1 \Rightarrow A \text{ es Ortogonal Propia} \\ \det(A)=-1 \Rightarrow A \text{ es Ortogonal impropia} \end{cases}$$

Como el determinante de una matriz ortogonal es distinto de cero, existe la matriz inversa

$$AA^T = I \qquad \text{como } \det(A) \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^{-1}AA^T = A^{-1}I \qquad \text{Premultiplico por } A^{-1}$$

$$(A^{-1}A)A^T = A^{-1} \qquad \text{Propiedad Asociativa}$$

$$I\,A^T = A^{-1} \qquad \text{Por definición } A^{-1}A = I$$

$$\boxed{A^T = A^{-1}}$$

Ejercicios de la Guía

13.1 Hallar, en caso de ser posible, las inversas de las siguientes matrices. En caso de no existir, indicar el porque.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

PASO 1

$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ $\quad det(A) = 1$

PASO 2

Matriz de Cofactores

$$\left.\begin{aligned} c_{11} &= (-1)^{1+1}(5) = 5 \\ C_{12} &= (-1)^{1+2}(2) = -2 \\ C_{21} &= (-1)^{2+1}(2) = -2 \\ c_{22} &= (-1)^{2+2}(1) = 1 \end{aligned}\right\} cof(A) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

PASO 3

Matriz Adjunta

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

PASO 4

Matriz Inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Adj(A)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Cómo verificar?

$$AA^{-1} = I$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicios de la Guía

13.2 Hallar, en caso de ser posible, las inversas de las siguientes matrices. En caso de no existir, indicar el porque.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}$$

PASO 1

$$det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} \quad det(B) = \alpha - 4 \quad Si\ \alpha \neq 4 \rightarrow \exists B^{-1}$$

PASO 2

Matriz de Cofactores

$$\left.\begin{aligned} C_{11} &= (-1)^{1+1}(\alpha) = \alpha \\ C_{12} &= (-1)^{1+2}(2) = -2 \\ C_{21} &= (-1)^{2+1}(2) = -2 \\ C_{22} &= (-1)^{2+2}(1) = 1 \end{aligned}\right\} \quad cof(B) = \begin{pmatrix} \alpha & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

PASO 3

Matriz Adjunta

$$Adj(B) = \begin{pmatrix} \alpha & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

PASO 4

Matriz Inversa

$$B^{-1} = \frac{1}{det(B)} Adj(B)$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\alpha - 4} \begin{pmatrix} \alpha & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que exista B^{-1}, $\alpha \neq \mathbf{4}$

Ejercicios de la Guía

13.3 Hallar, en caso de ser posible, las inversas de las siguientes matrices. En caso de no existir, indicar el porque.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

No es posible encontrar C^{-1} porque la matriz C no es cuadrada

Ejercicios de la Guía

13.4 Hallar, en caso de ser posible, las inversas de las siguientes matrices. En caso de no existir, indicar el porque.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

PASO 1

Laplace por C_1

$$det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad det(D) = 1$$

PASO 2

Matriz de Cofactores

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = 3 \qquad C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = -2 \qquad C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -1$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -4 \qquad C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = 1 \qquad C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -1$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \qquad C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \qquad C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

$$cof(D) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

PASO 3

Matriz Adjunta

$$\mathrm{Adj}(D) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PASO 4

Matriz Inversa

$$D^{-1} = \frac{1}{det(D)} Adj(D)$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicios de la Guía

13.5 Hallar, en caso de ser posible, las inversas de las siguientes matrices. En caso de no existir, indicar el porque.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Triangular Superior

PASO 1

$$det(E) = 1$$

PASO 2 Matriz de Cofactores

$$C_{11} = (-1)^{1+1}(1) = 1$$
$$C_{12} = (-1)^{1+2}(0) = 0$$
$$C_{13} = (-1)^{1+3}(0) = 0$$
$$C_{14} = (-1)^{1+4}(0) = 0$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}(3) = -3$$
$$C_{22} = (-1)^{2+2}(1) = 1$$
$$C_{23} = (-1)^{2+3}(0) = 0$$
$$C_{24} = (-1)^{2+4}(0) = 0$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}(11) = 11$$
$$C_{32} = (-1)^{3+2}(2) = -2$$
$$C_{33} = (-1)^{3+3}(1) = 1$$
$$C_{34} = (-1)^{3+4}(0) = 0$$

$$C_{41} = (-1)^{4+1}(38) = -38$$
$$C_{42} = (-1)^{4+2}(7) = 7$$
$$C_{43} = (-1)^{4+3}(2) = -2$$
$$C_{44} = (-1)^{4+3}(-1) = 1$$

$$cof(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 11 & -2 & 1 & 0 \\ -38 & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

PASO 3 Matriz Adjunta

$$\mathrm{Adj}(E) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PASO 4 Matriz Inversa

$$E^{-1} = \frac{1}{det(E)} Adj(E) \quad E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicios de la Guía

13.6. a $F \in R^{3\times 3}$ con F una matriz escalar.

$$F = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Matriz Escalar

PASO 1

$$det(F) = \beta\beta\beta = \beta^3 \quad det(F) = \beta^3 \quad Si \beta \neq 0 \rightarrow \exists F^{-1}$$

PASO 2

Matriz de Cofactores

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{vmatrix} = \beta^2 \quad C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{vmatrix} = 0 \quad C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{vmatrix} = 0 \quad C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{vmatrix} = \beta^2 \quad C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{vmatrix} = \beta^2$$

$$cof(F) = \begin{pmatrix} \beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 \end{pmatrix}$$

PASO 3 Matriz Adjunta

$$\mathrm{Adj}(F) = \begin{pmatrix} \beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 \end{pmatrix}$$

PASO 4 Matriz Inversa

$$F^{-1} = \frac{1}{det(F)} Adj(F)$$

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix}$$

Ejercicios de la Guía

13.6. b $G \in R^{3\times3}$ con G una matriz diagonal.

$$G = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Matriz Diagonal

PASO 1

$det(G) = \alpha\beta\gamma$ $\quad Si\ \alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0 \wedge \gamma \neq 0 \rightarrow \exists G^{-1}$

PASO 2

Matriz de Cofactores

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{vmatrix} = \beta\gamma \quad C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\gamma \quad C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{vmatrix} = \alpha\beta$$

$$cof(G) = \begin{pmatrix} \beta\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\beta \end{pmatrix}$$

PASO 3 Matriz Adjunta

$$\text{Adj}(G) = \begin{pmatrix} \beta\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\beta \end{pmatrix}$$

PASO 4 Matriz Inversa

$$G^{-1} = \frac{1}{det(G)} Adj(G)$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}$$

Ejercicios de la Guía

$14.1.a$ ¿Para qué valores de $k \in R, M^2$ es una matriz simétrica? M es tal que $M+4A^{-1}=B^TC+D$

$A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -2\end{pmatrix}$ $B^T=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}k & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix}$

$det(A)=2$

$C_{11}=(-1)^{1+1}(-1)=-1$

$C_{12}=(-1)^{1+2}(-2)=2$

$C_{21}=(-1)^{2+1}(3)=-3$

$C_{22}=(-1)^{2+2}(4)=4$

$cof(A)=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$

$Adj(A)=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$

$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$

$B^TC+D-4A^{-1}=M$

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}k & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix}-4\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}5 & -10\\ -2 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}k & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}5+k & -6\\ 2 & 9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2 & -6\\ 4 & 8\end{pmatrix}$$

$$M=\begin{pmatrix}7+k & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

M^2 **es una Matriz Simétrica**

$$M^2=MM=\begin{pmatrix}7+k & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7+k & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$M^2=\begin{pmatrix}(7+k)^2 & \boxed{0}\\ \boxed{-2(7+k)-2} & 1\end{pmatrix}$$

Para que sea una Matriz Simétrica,

$$-2(7+k)-2=0$$

$$-2(7+k)=2$$

$$7+k=-1$$

$$\boxed{k=-8}$$

Ejercicios de la Guía

$14.1.b$ Si $M = P^{-1}AP$ donde

i) Hallar todos los valores de $h \in R$ para los cuales M resulta una matriz antisimétrica

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} h & h+3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$det(P) = 1$$

¿P es una Matriz Ortogonal?

$$PP^T = I$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como P es una Matriz Ortogonal, entonces

$$P^T = P^{-1}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = (P^{-1}A)P$$

$$M = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & h+3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -h & -h-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -h-3 & \boxed{h} \end{pmatrix}$$

M es una Matriz Antisimétrica

Resuelvo el Sistema

$$\begin{cases} -h-3 = -3 \\ h = 0 \end{cases}$$

Solución

M es una Matriz Anti-simétrica para h=0

Ejercicios de la Guía

$14.1.b$ Si $M = P^{-1}AP$ donde

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} h & h+3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) M resulta una matriz no inversible.

$$det(P) = 1$$

¿P es una Matriz Ortogonal?

$$PP^T = I$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como P es una Matriz Ortogonal, entonces

$$P^T = P^{-1}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = (P^{-1}A)P$$

$$M = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h & h+3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -h & -h-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -h-3 & h \end{pmatrix}$$

M es no inversible si y solo si: det(M) = 0

$$det(M) = h.0 - 3(-h-3)$$
$$det(M) = 3(h+3)$$

M **es una Matriz no inversible para h=-3**

Ejercicios de la Guía

15.1

Sea $A \in R^{n\times n}$ inversible, tal que $A^2 + 2A - 8I = 0$ demostrar que $A^{-1} = \frac{1}{8}(A + 2I)$

H

$$A \in R^{n\times n}$$

$$\exists A^{-1} \quad det(A) \neq 0$$

$$A^2 + 2A - 8I = 0$$

T

$$A^{-1} = \frac{1}{8}(A + 2I)$$

D

Partimos de la Hipótesis

$$A^2 + 2A - 8I = 0$$

$$AA + 2A - 8I = 0 \quad \textit{como } \exists A^{-1}$$

$$(A.A+2A-8I).A^{-1}=(O).A^{-1} \quad \textit{post-multiplico miembro a miembro}$$

$$A.A.A^{-1}+2A.A^{-1}-8I.A^{-1}=O.A^{-1} \quad \textit{Distributiva}$$

$$A.I+2I-8A^{-1}=O \quad \textit{por definicion de matriz inversa.}$$

$$-8A^{-1}=-A-2I$$

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{8}(A+2I)}$$

Ejercicios de la Guía

15.2

Sea A una matriz cuadrada de orden n, no singular (inversible) que verifica la siguiente igualdad: $aA^2 + bA + cI = 0$ donde a, b y c son números reales con $c \neq 0$. Hallar los números λ y μ para los cuales se verifica que:

$$A^{-1} = \lambda A + \mu I$$

Partimos de la expresión

$$aA^2 + bA + cI = 0$$

$$aAA + bA + cI = 0 \qquad \textit{como } \exists A^{-1}$$

$$aAA\,A^{-1} + bA\,A^{-1} + cI\,A^{-1} = 0\,A^{-1}$$

$$aAI + bI + cA^{-1} = 0$$

$$cA^{-1} = -aAI - bI \qquad c \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{-a}{c}A + \frac{-b}{c}I$$

Comparamos ambas expresiones

$$A^{-1} = \boxed{\frac{-a}{c}}A + \boxed{\frac{-b}{c}}I$$

$$A^{-1} = \boxed{\lambda}A + \boxed{\mu}I$$

Conclusión:

$$\boxed{\lambda = \frac{-a}{c}} \qquad \boxed{\mu = \frac{-b}{c}}$$