Álgebra y Geometría Analítica

Clase 12: Determinantes

UNIVERSIDAD
TECNOLÓGICA
NACIONAL

Unidad 2 – Clase 12

Repaso de Clases Anteriores

Matriz: Definición

Se llama “*Matriz*” a toda función que a cada par ordenado del producto cartesiano entre dos intervalos naturales iniciales, le hace corresponder un número real.

$$f : I_m \times I_n \rightarrow \mathbb{R}$$

Otra definición:
Es una yucsta-posición entre vectores fila o columna.

Igualdad de Matrices:

Dos matrices son iguales si son del mismo orden y sus respectivos elementos son iguales.

Repaso de Clases Anteriores

Clasificación de Matrices:

- **MATRICES**
  - Nula: $o_{ij}=0 \quad \forall i \wedge \forall j$
  - Fila: $A \in \mathbb{R}^{1xn}$
  - Columna: $A \in \mathbb{R}^{mx1}$
  - Cuadradas: $A \in \mathbb{R}^{nxn}$
    - Diagonal: $a_{ij}=0 \Leftrightarrow i \neq j$
      - Escalar: $e_{ij}=k \Leftrightarrow i=j$
        - Identidad: $\delta_{ij}: \begin{cases} 1 \Leftrightarrow i=j \\ 0 \Leftrightarrow i \neq j \end{cases}$
    - Triangular
      - Inferior: $a_{ij}=0 \Leftrightarrow i<j$
      - Superior: $a_{ij}=0 \Leftrightarrow i>j$
    - Simétricas: $m_{ij}=m_{ji}$
    - Antisimétricas: $m_{ij}=-m_{ji}$
    - Ortogonales: $(a_{ij}).(a_{ji})=(a_{ji}).(a_{ij})=I$
    - No ortogonales

Repaso de Clases Anteriores

OPERACIONES CON MATRICES:

1. Suma:

$(A+B)\in\mathbb{R}^{m\times n} \wedge A+B=(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$

Propiedades:

$\forall A\in\mathbb{R}^{m\times n} \wedge \forall B\in\mathbb{R}^{m\times n} \wedge \forall C\in\mathbb{R}^{m\times n}$

1)LCI: $(A+B)\in\mathbb{R}^{m\times n}$

2)Conmutativa: $A+B=B+A$

3)Asociativa: $(A+B)+C=A+(B+C)$

4)Existencia de Elemento Neutro: $\exists O\in\mathbb{R}^{m\times n} / A+O=A$

5)Existencia de elemento Inverso (o simétrico): $\exists(-A)\in\mathbb{R}^{m\times n} / A+(-A)=O$

<u>Observación</u>: $A-B=A+(-B)$

Repaso de Clases Anteriores

OPERACIONES CON MATRICES:
2. Producto de Escalar y Matriz

$k\,A = k\left(a_{ij}\right) = \left(k\,a_{ij}\right) \;\wedge\; \left(k\,a_{ij}\right) \in \mathbb{R}^{m\times n}$

Propiedades:

$\forall\,\alpha \in \mathbb{R} \wedge \forall\,\beta \in \mathbb{R} \wedge \forall\,A \in \mathbb{R}^{m\times n} \wedge \forall\,B \in \mathbb{R}^{m\times n}$

1)LCE: $\alpha\,A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

2)Asociativa mixta: $(\alpha\beta)\,A = \alpha\left(\beta B\right)$

3)Existencia de Escalar Neutro: $\exists 1 \in \mathbb{R} / 1\,A = A$

4)Distributiva respecto de la suma de matrices: $\alpha\left(A+B\right) = \alpha\,A + \alpha\,B$

5)Distributiva respecto de la suma de escalares: $(\alpha+\beta)\,A = \alpha\,A + \beta\,A$

Repaso de Clases Anteriores

OPERACIONES CON MATRICES:
3. Producto entre Matrices

MATRICES CONFORMABLES:

El número de columnas de la primera es igual al número de filas de la segunda.

$$A \in \mathbb{R}^{mxn} \wedge A = (a_{ij}) \wedge B \in \mathbb{R}^{nxp} \wedge B = (b_{jk}) \;\; con: \; 1 \leq i \leq m \;\wedge\; 1 \leq j \leq n \;\wedge\; 1 \leq k \leq p$$

ORDEN DEL RESULTADO:

$$Si \; A.B = C \wedge C = (c_{ik}) \Rightarrow C \in \mathbb{R}^{mxp}$$

CALCULO DE CADA ELEMENTO DEL PRODUCTO DE MATRICES:

$$c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \ldots + a_{in} b_{nk}$$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

Cada elemento c_{ik} se obtiene haciendo el producto escalar entre el vector fila “i” de la primer matriz por el vector columna “k” de la segunda matriz traspuesto.

Repaso de Clases Anteriores

Propiedades:

I) No conmutativa:

I.a) Puede hacerse A.B pero no B.A $Ej.: A \in \mathbb{R}^{mxn} \wedge B \in \mathbb{R}^{nxp}.$

I.b) Puede hacerse A.B y B.A pero resultan de distinto orden $A \in \mathbb{R}^{mxn} \wedge B \in \mathbb{R}^{nxm}.$

I.c) Puede hacerse A.B y B.A, resultan del mismo orden pero el resultado es distinto $Ej.: A \in \mathbb{R}^{nxn} \wedge B \in \mathbb{R}^{nxn} \wedge A.B \neq B.A.$

<u>*Matrices conmutables:*</u> $A \in \mathbb{R}^{nxn} \wedge B \in \mathbb{R}^{nxn}. A \ y \ B \ son \ conmutables \Leftrightarrow A.B = B.A$

II) Elemento Neutro:

La matriz identidad es el elemento neutro del producto de matrices.

$Si \ A \in \mathbb{R}^{mxn}$

$A.I = A \ \ con \ I \in \mathbb{R}^{nxn}$

$I.A = A \ \ con \ I \in \mathbb{R}^{mxm}$

Repaso de Clases Anteriores

Propiedades:

III) Asociativa con Escalar:

$$\alpha(A.B)=(\alpha A).B=A.(\alpha B)$$

IV) Asociativa:

$$A\in\mathbb{R}^{mxn},\ B\in\mathbb{R}^{nxp},\ C\in\mathbb{R}^{pxq}$$

$$(A.B).C=A.(B.C)$$

V) Distributiva del producto respecto de la suma de matrices:

$$A\in\mathbb{R}^{mxn},\ B\in\mathbb{R}^{mxn},\ C\in\mathbb{R}^{pxm},\ D\in\mathbb{R}^{nxq}$$

$$C.(A+B)=C.A+C.B \quad (Pre-Distributiva)$$

$$(A+B).D=A.D+B.D \quad (Post-Distributiva)$$

VI) Divisores de cero:

El producto de dos matrices no nulas puede resultar en una matriz nula.

Repaso de Clases Anteriores

Observación:

$A \in \mathbb{R}^{nxn}$ (cuadrada)

$A^k = A\,.\,A\ldots..A \quad (k\ veces)$

Repaso de Clases Anteriores

OPERACIONES CON MATRICES:
4. Transposición de Matrices

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ de elementos $\left(a_{ij}\right)$. Su traspuesta es la matriz de orden nxm de elementos a_{ji}

$A \in \mathbb{R}^{mxn}, A = \left(a_{ij}\right) \Rightarrow A^t = \left(a_{ji}\right)$. Con $A^t \in \mathbb{R}^{nxm}$

La transposición consiste en presentar las filas como columnas y las columnas como filas.

Repaso de Clases Anteriores

Propiedades:

I) $(A^t)^t = A$

II) $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$

III) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$

IV) $\boxed{(A.B)^t = B^t.A^t}$

V) $(A^n)^t = (A^t)^n$

Observaciones:

$M \;\; es \;\; Simétrica \Leftrightarrow M = M^t$

$M \;\; es \;\; Anti\,Simétrica \Leftrightarrow M = -M^t$

Repaso de Clases Anteriores

Matriz Ortogonal:

Una matriz resulta ortogonal si y solo sí el producto conmutable con su traspuesta resulta en la matriz identidad.

$$A \in \mathbb{R}^{nxn} : A \ es \ Ortogonal \Leftrightarrow A . A^t = A^t . A = I$$

Observaciones:

- Cada vector columna tiene módulo 1
- El producto escalar entre cualquier par de vectores columna es cero.

Determinantes

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3.7 - (-1).5$$

Definición:

*Se llama **Determinante** a toda función que a cada matriz cuadrada le hace corresponder un número real que se obtiene como la suma de todos los productos elementales con signo.*

$$f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$$

Notación para el determinante de la matriz A:

- det(A)
- |A|

Determinantes

Producto Elemental:

Un producto elemental (PE) será el que se obtiene multiplicando n factores elegidos de filas y columnas diferentes entre los n^2 elementos de la matriz de forma tal que los factores que intervienen en cada PE pertenezcan a filas y columnas diferentes.

<u>Caso n=2:</u>

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinantes

Producto Elemental:

<u>Caso n=3:</u>

$$det(B)=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \overset{\substack{0\text{ inv.}\\(+)}}{+b_{11}b_{22}b_{33}} \overset{\substack{1\text{ inv.}\\(–)}}{-b_{11}b_{23}b_{32}} \overset{\substack{2\text{ inv.}\\(+)}}{+b_{12}b_{23}b_{31}} \overset{\substack{1\text{ inv.}\\(–)}}{-b_{12}b_{21}b_{33}} \overset{\substack{2\text{ inv.}\\(+)}}{+b_{13}b_{21}b_{32}} \overset{\substack{3\text{ inv.}\\(–)}}{-b_{13}b_{22}b_{31}}$$

Observar:

1. Los primeros subíndices en todos los términos elementales son 1, 2 y 3.
2. Si la cantidad de inversiones en los segundos subíndices es par, el signo del término elemental es positivo, sino es negativo.

Nota: *Se llama "inversión" cuando un número mayor precede a otro número menor que él.* Ejemplo: 4231 tiene 5 inversiones: 4-2, 4-3, 4-1, 2-1, 3-1.

Determinantes

Producto Elemental:

<u>Caso n=4:</u>
Cantidad de términos elementales: $4! = 24$

<u>Caso n=5:</u>
Cantidad de términos elementales: $5! = 120$

En general:

$$\textit{Los } n! \textit{ productos elementales tienen } \frac{n!}{2} \textit{ terminos positivos y } \frac{n!}{2} \textit{ términos negativos.}$$

Determinantes

Propiedades:

$$1)\ \text{Si A tiene:}\begin{cases}\text{a) Una fila o columna de ceros}\\ \text{b) Dos filas o columnas iguales}\\ \text{c) Dos filas o columnas proporcionales}\end{cases}\Rightarrow det(A)=0$$

$$2)\ \text{Si A es:}\begin{cases}\text{a) Triangular superior}\\ \text{b) Triangular inferior}\\ \text{c) Diagonal}\end{cases}\Rightarrow det(A)=a_{11}.a_{22}.\ \dots\ a_{nn}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$$

Determinantes

Propiedades:

3) Si B es la matriz que se obtiene:

a) Una fila o columna de A se la multiplica por un escalar k

$$det(B) = k.det(A)$$

b) Se intercalan dos filas o columnas de A

$$det(B) = -det(A)$$

c) Cuando a una fila o columna se le suma otra paralela multiplicada por un escalar

$$det(B) = det(A)$$

La idea del uso de esta propiedad es generar ceros en los lugares necesarios para facilitar el cálculo.

$$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -13 & 0 & -6 \\ -3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

$$F_1 = F_1 + 5F_2$$

Determinantes

Propiedades:

4) a) $Si\ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \wedge k \in \mathbb{R} \Rightarrow det(k\,A) = k^n . det(A)$

b) $det(A+B) \neq det(A) + det(B)$

c) $det(A.B) = det(A).det(B)$

d) $det(A^t) = det(A)$

e) Si A, B, C son matrices iguales excepto en la fila h donde la fila h de A es igual a la fila h de B más la fila h de C $\Rightarrow det(A) = det(B) + det(C)$

Determinantes

Regla de Laplace:

Cálculo del determinante mediante su desarrollo por fila o por columna.

Cofactor:

El cofactor del elemento a_{ij} *de la matriz* A *es el número* $c_{ij} = (-1)^{i+j} . \det(m_{ij})$ *siendo* m_{ij} *la submatriz que resulta de suprimir la fila* i *y la columna* j.

La matriz cuyos elementos son los cofactores de A se llama la matriz de los cofactores.

Ejemplo:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 & 8 \\ -2 & 9 & -4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_{32} = (-1)^{3+2} . \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

Determinantes

Regla de Laplace:

Desarrollo por Fila 1:

$$Sea\ \ A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$det(A) = a_{11}.c_{11} + a_{12}.c_{12} + \ldots + a_{1n}.c_{1n}$$

$$\boxed{det(A) = \sum_{j=1}^{j=n} a_{1j}.c_{1j}}$$

Determinantes

Ejemplo:

Hallar det(B) usando la regla de Laplace y propiedades con: $B=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 & 8 \\ -2 & 9 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

$Desarrollo\ por\ columna\ 1:$

$$det(B)=b_{11}.c_{11}+b_{21}.c_{21}+b_{31}.c_{31}+b_{41}.c_{41}$$

$$det(B)=3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 8 \\ 9 & -4 & 1 \end{vmatrix}+0(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 8 \\ 9 & -4 & 1 \end{vmatrix}+1(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 9 & -4 & 1 \end{vmatrix}+$$

$$+(-2)(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 8 \end{vmatrix}$$

Observación: *El desarrollo de este determinante implica desarrollar 4 determinantes de orden 3, lo que equivale a 12 determinantes de orden 2 lo cual puede resultar algo complejo (cantDeterminantes = n!/2).*

Determinantes

Ejemplo (cont.):

Para simplificar el cálculo, haremos un proceso previo usando la propiedad 3c. Trataremos de poner un cero en el elemento 11 y en el 41 de modo de lograr un vector con un 1 y el resto en 0 para aplicar luego, Laplace por columna.

$$det(B)=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 & 8 \\ -2 & 9 & -4 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -17 & 10 & -22 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 & 8 \\ -2 & 9 & -4 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -17 & 10 & -22 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 & 8 \\ 0 & 17 & -10 & -17 \end{vmatrix}$$

$$F_1=F_1-3F_3 \qquad F_4=F_4+2F_3$$

Desarrollaremos el determinante usando Laplace por columna 1:

Determinantes

Ejemplo (cont.):

$$det(B)=1.(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-17 & 10 & -22\\ 1 & 1 & -1\\ 17 & -10 & 17\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 27 & -39\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & -27 & 34\end{vmatrix}=1.(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}27 & -39\\ -27 & 34\end{vmatrix}$$

$$F_1=F_1+17F_2 \qquad Laplace\ \ por\ \ C_1$$

$$F_3=F_3-17F_2$$

$$det(B)=(-1).27\begin{vmatrix}1 & -39\\ -1 & 34\end{vmatrix}=(-27).(34-39)=(-27).(-5)$$

det(B) = 135

Ejercicios de la Práctica

Ejercicio 10

Sin desarrollar los determinantes demostrar las identidades mencionando las propiedades utilizadas.

10.2) $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_2-b_2 & a_3-b_3 \\ b_1-c_1 & b_2-c_2 & b_3-c_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix}=0$

$$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_2-b_2 & a_3-b_3 \\ b_1-c_1 & b_2-c_2 & b_3-c_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1-b_1 & c_2-b_2 & c_3-b_3 \\ b_1-c_1 & b_2-c_2 & b_3-c_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} b_1-c_1 & b_2-c_2 & b_3-c_3 \\ b_1-c_1 & b_2-c_2 & b_3-c_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix} = 0$$

prop 3.c) $F_1 = F_1 + F_3$ prop 3.a) prop 1.b)

Ejercicios de la Práctica

<u>Ejercicio 11</u>

Calcular los siguientes determinantes mencionando las propiedades utilizadas.

11.b)

$$det(B)=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & -3 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_1=F_1-3F_3 \\ F_4=F_4-5F_3 \\ F_5=F_5+1F_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -11 & -7 & -7 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -21 & -13 & -13 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$det(B)=1.(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -11 & -7 & -7 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ -21 & -13 & -13 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_1=F_1+7F_2 \\ F_3=F_3+13F_2 \\ F_4=F_4-4F_2}}{=} \begin{vmatrix} 10 & 0 & 21 & 12 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 18 & 0 & 39 & 26 \\ -7 & 0 & -10 & -5 \end{vmatrix}$$

Ejercicios de la Práctica

<u>Ejercicio 11</u>

Calcular los siguientes determinantes mencionando las propiedades utilizadas.

11.b)

$$det(B) = 1.(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 10 & 21 & 12 \\ 18 & 39 & 26 \\ -7 & -10 & -5 \end{vmatrix} \underset{F_1 = F_1 + 2F_3}{=} \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 18 & 39 & 26 \\ -7 & -10 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_2 = F_2 - 39F_1 \\ F_3 = F_3 + 10F_1 \end{matrix}$$

$$det(B) = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 174 & 0 & -52 \\ -17 & 0 & 15 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 174 & -52 \\ -17 & 15 \end{vmatrix}$$

det(B)=–166

Ejercicios de la Práctica

PREGUNTAS

Para consultas por mail:
Lic. Jorge Kamlofsky: jkamlofsky@frh.utn.edu.ar