Álgebra y Geometría Analítica

Clase 11: Operaciones con Matrices

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

Unidad 2 – Clase 11

01 Repaso de Clase Anterior

02 Operaciones con Matrices

03 Ejercicios de la Guía

Repaso de Clase Anterior

Matriz: Definición

Se llama "*Matriz*" a toda función que a cada par ordenado del producto cartesiano entre dos intervalos naturales iniciales, le hace corresponder un número real.

$$f : I_m \times I_n \rightarrow \mathbb{R}$$

Otra definición:
Es una yucsta-posición entre vectores fila o columna.

Nomenclatura:

$A = ((a_{ij})) \wedge A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m \times n$: orden de la matriz (A tiene: m filas y n columnas)

$((a_{ij}))$: Matriz compuesta por los elementos genéricos de la matriz A

$$\begin{array}{l} i: \text{ número de fila} \\ j: \text{ número de columna} \end{array} \rightarrow con: \begin{cases} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

Repaso de Clase Anterior

Ejemplo:

$$A\in\mathbb{R}^{4\times 3}\wedge A=\left(a_{ij}\right)\ /\ a_{ij}:\begin{cases}3!+j & si\ \ i=j\\ 4i-j & si\ \ i>j\\ i+j & si\ \ i<j\end{cases}$$

Matriz de producción trimestral de la planta

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43}\end{pmatrix}=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}7 & 3 & 4\\ 7 & 8 & 5\\ 11 & 10 & 9\\ 15 & 14 & 13\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\leftarrow \texttt{Trim.1}\\ \leftarrow \texttt{Trim.2}\\ \leftarrow \texttt{Trim.3}\\ \leftarrow \texttt{Trim.4}\end{array}\\ \begin{array}{ccc}\uparrow & \uparrow & \uparrow\\ \texttt{Prod.1} & \texttt{Prod.2} & \texttt{Prod.3}\end{array} & \end{array}$$

Igualdad de Matrices:

Dos matrices son iguales si son del mismo orden y sus respectivos elementos son iguales.

Repaso de Clase Anterior

Clasificación de Matrices:

- **MATRICES**
  - Nula: $o_{ij}=0 \quad \forall i \wedge \forall j$
  - Fila: $A \in \mathbb{R}^{1xn}$
  - Columna: $A \in \mathbb{R}^{mx1}$
  - Cuadradas: $A \in \mathbb{R}^{nxn}$
    - Diagonal: $a_{ij}=0 \Leftrightarrow i \neq j$
      - Escalar: $e_{ij}=k \Leftrightarrow i=j$
        - Identidad: $\delta_{ij}: \begin{cases} 1 \Leftrightarrow i=j \\ 0 \Leftrightarrow i \neq j \end{cases}$
    - Triangular
      - Inferior: $a_{ij}=0 \Leftrightarrow i<j$
      - Superior: $a_{ij}=0 \Leftrightarrow i>j$
    - Simétricas: $m_{ij}=m_{ji}$
    - Antisimétricas: $a_{ij}=-a_{ji}$

Operaciones con Matrices

1. SUMA:

Dadas dos matrices del mismo orden, su suma es otra matriz del mismo orden que las matrices dadas, cuyos elementos se obtienen sumando los respectivos elementos de las matrices dadas.

$$\forall\, A \in \mathbb{R}^{m\times n} \wedge A = (a_{ij}) \wedge \forall\, B \in \mathbb{R}^{m\times n} \wedge B = (b_{ij})$$

$$(A+B) \in \mathbb{R}^{m\times n} \wedge A+B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \wedge A \in \mathbb{R}^{2\times 3} \quad \wedge \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \wedge B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Operaciones con Matrices

Propiedades:

$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n} \wedge \forall B \in \mathbb{R}^{m\times n} \wedge \forall C \in \mathbb{R}^{m\times n}$

1)LCI: $(A+B) \in \mathbb{R}^{m\times n}$

2)Conmutativa: $A+B=B+A$

3)Asociativa: $(A+B)+C=A+(B+C)$

4)Existencia de Elemento Neutro: $\exists O \in \mathbb{R}^{m\times n} / A+O=A$

5)Existencia de elemento Inverso (o simétrico): $\exists(-A) \in \mathbb{R}^{m\times n} / A+(-A)=O$

Observación: $A-B=A+(-B)$

Operaciones con Matrices

2. PRODUCTO DE ESCALAR Y MATRIZ:

Sea *A* una matriz y *k* un escalar. El producto entre escalar *k* y la matriz *A* se obtiene multiplicando a todos los elementos de *A* por el escalar *k*.

$$\forall\, k \in \mathbb{R} \wedge \forall\, A \in \mathbb{R}^{m \times n} \wedge A = (a_{ij}):$$
$$k\,A = k(a_{ij}) = (k\,a_{ij}) \;\wedge\; (k\,a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \wedge k = 3$$

$$k\,A = 3\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 \\ 3 & 15 & 6 \end{pmatrix}$$

Operaciones con Matrices

Propiedades:

$\forall\ \alpha \in \mathbb{R} \wedge \forall\ \beta \in \mathbb{R} \wedge \forall\ A \in \mathbb{R}^{m \times n} \wedge \forall\ B \in \mathbb{R}^{m \times n}$

1)LCE: $\alpha A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

2)Asociativa mixta: $(\alpha\beta) A = \alpha(\beta A)$

3)Existencia de Escalar Neutro: $\exists 1 \in \mathbb{R} / 1 A = A$

4)Distributiva respecto de la suma de matrices: $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

5)Distributiva respecto de la suma de escalares: $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$

Operaciones con Matrices

3. PRODUCTO ENTRE MATRICES

MATRICES CONFORMABLES:

Para multiplicar dos matrices, estas deben ser ***conformables***. Es decir, el número de columnas de la primer matriz debe ser igual al número de filas de la segunda matriz.

$$A \ y \ B \ son \ conformables:$$

$$A \in \mathbb{R}^{mxn} \wedge A = (a_{ij}) \wedge B \in \mathbb{R}^{nxp} \wedge B = (b_{jk})$$

$$1 \leq i \leq m$$

$$1 \leq j \leq n$$

$$1 \leq k \leq p$$

Operaciones con Matrices

3. PRODUCTO ENTRE MATRICES

ORDEN DEL RESULTADO:

$$Si\ A.B=C\ \wedge C=(c_{ik}) \Rightarrow C \in \mathbb{R}^{mxp}$$

EL CÁLCULO DE CADA ELEMENTO DEL PRODUCTO ENTRE MATRICES:

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk}$$

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

Cada elemento c_{ik} se obtiene haciendo el producto escalar entre el vector fila "i" de la primer matriz por el vector columna "k" de la segunda matriz traspuesto.

Operaciones con Matrices

Propiedades:

I) No conmutativa:

I.a) Puede hacerse A.B pero no B.A

$$A \in \mathbb{R}^{mxn},\ B \in \mathbb{R}^{nxp} \ \wedge \ m \neq p$$

I.b) Puede hacerse A.B y B.A pero resultan de distinto orden

$$A \in \mathbb{R}^{mxn},\ B \in \mathbb{R}^{nxm} \ \wedge \ m \neq n$$

I.c) Puede hacerse A.B y B.A, resultan del mismo orden pero el resultado es distinto

$$A.B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -11 \\ 20 & -14 \end{pmatrix}$$

$$B.A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -11 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A.B \neq B.A$$

Operaciones con Matrices

Matrices Conmutables:

$$A \in \mathbb{R}^{nxn} \wedge B \in \mathbb{R}^{nxn} . A \ y \ B \ son \ conmutables \Leftrightarrow A . B = B . A$$

$$A . B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{3} \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{10}{3} \\ 10 & 13 \end{pmatrix} \quad B . A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{3} \\ 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{10}{3} \\ 10 & 13 \end{pmatrix}$$

Un ejemplo donde se da la conmutatividad entre matrices del mismo orden es cuando multiplicamos a cualquier matriz por la correspondiente matriz identidad

$$A . I = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I . A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Operaciones con Matrices

Propiedades:

II) Elemento Neutro:

La matriz identidad es el elemento neutro del producto de matrices.

$$Si\ \ A \in \mathbb{R}^{mxn}$$

$$A\,.\,I = A\ \ \ con\ \ I \in \mathbb{R}^{nxn}$$

$$I\,.\,A = A\ \ \ con\ \ I \in \mathbb{R}^{mxm}$$

Operaciones con Matrices

Propiedades:

III) Asociativa con Escalar:

$$\alpha(A.B)=(\alpha A).B=A.(\alpha B)$$

IV) Asociativa:

$$A\in\mathbb{R}^{mxn},\ B\in\mathbb{R}^{nxp},\ C\in\mathbb{R}^{pxq}$$

$$\boxed{(A.B)}.C=A.\boxed{(B.C)}$$

mxp pxq mxn nxq

mxq mxq

Operaciones con Matrices

Propiedades:

V) Distributiva del producto respecto de la suma de matrices:

$A \in \mathbb{R}^{mxn},\ B \in \mathbb{R}^{mxn},\ C \in \mathbb{R}^{pxm},\ D \in \mathbb{R}^{nxq}$

$C.(A+B)=C.A+C.B \quad (Pre-Distributiva)$

$(A+B).D=A.D+B.D \quad (Post-Distributiva)$

VI) Divisores de cero:

El producto de dos matrices no nulas puede resultar en una matriz nula.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

OBSERVACIÓN:

$A \in \mathbb{R}^{nxn}$ (cuadrada)

$A^k = A.A.....A \quad (k\ veces)$

Operaciones con Matrices

4. TRASPOSICIÓN DE MATRICES

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ de elementos (a_{ij}). Su traspuesta es la matriz de orden nxm de elementos a_{ji}

$A \in \mathbb{R}^{mxn}, A = (a_{ij}) \Rightarrow A^t = (a_{ji})$. Con $A^t \in \mathbb{R}^{nxm}$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix} \quad A \in \mathbb{R}^{2x3} \Rightarrow \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 9 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad A^t \in \mathbb{R}^{3x2}$$

La trasposición consiste en presentar las filas como columnas y las columnas como filas.

Operaciones con Matrices

Propiedades:

I) $\left(A^{t}\right)^{t}=A$

II) $\left(A\pm B\right)^{t}=A^{t}\pm B^{t}$

III) $\left(\alpha A\right)^{t}=\alpha A^{t}$

IV) $\left(A.B\right)^{t}=B^{t}.A^{t}$

V) $\left(A^{n}\right)^{t}=\left(A^{t}\right)^{n}$

Operaciones con Matrices

Observaciones:

$M \text{ es Simétrica} \Leftrightarrow M = M^t$

Ejemplo:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 8 & 4 \\ 5 & 4 & 19 \end{pmatrix}$$

$A \text{ es Antisimétrica} \Leftrightarrow A = -A^t$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 4 \\ 5 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Operaciones con Matrices

Matriz Ortogonal:

Una matriz resulta ortogonal si y solo sí el producto conmutable con su traspuesta resulta en la matriz identidad.

$$A \in \mathbb{R}^{nxn} : A \ es \ Ortogonal \Leftrightarrow A . A^t = A^t . A = I$$

Ejemplo:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observaciones:

- Cada vector columna tiene módulo 1
- El producto escalar entre cualquier par de vectores columna es cero.

R es una matriz de rotación que rota vectores de R^3 30° alrededor del eje z en sentido antihorario.

Operaciones con Matrices

Matriz Ortogonal:

Teorema 1:
La suma de toda matriz (cuadrada) más su traspuesta da por resultado una matriz simétrica.

H) $A \in \mathbb{R}^{nxn}$

T) $A + A^t \ es \ simétrica \Leftrightarrow A + A^t = \left(A + A^t\right)^t$

D) $\left(A + A^t\right)^t = A^t + \left(A^t\right)^t$ (por Prop. 2 de Trasposición)

$\left(A + A^t\right)^t = A^t + A$ (por Prop. 1 de Trasposición)

$\left(A + A^t\right)^t = A + A^t$ (por Prop. conmutativa de suma de matrices)

Operaciones con Matrices

Matriz Ortogonal:

Teorema 2:
La resta de toda matriz (cuadrada) con su traspuesta da por resultado una matriz antisimétrica.

H) $A \in \mathbb{R}^{nxn}$

T) $A - A^t \; es \; antisimétrica \Leftrightarrow A - A^t = -\left(A - A^t\right)^t$

D) $-\left(A - A^t\right)^t = -\left(A^t - \left(A^t\right)^t\right)$ (por Prop. 2 de Trasposición)

$-\left(A - A^t\right)^t = -\left(A^t - A\right)$ (por Prop. 1 de Trasposición)

$-\left(A - A^t\right)^t = -A^t + A$ (por Prop. distributiva de escalar y suma de matrices)

$-\left(A + A^t\right)^t = A - A^t$ (por Prop. conmutativa de suma de matrices)

Operaciones con Matrices

Matriz Ortogonal:

Conclusión:
Toda matriz (cuadrada) siempre es posible escribirla como la suma de una matriz simétrica más otra matriz antisimétrica.

$$\begin{cases} S = B + B^t \\ A = B - B^t \end{cases} \Rightarrow S + A = 2B = M \quad \left(con\ M \in \mathbb{R}^{nxn}\right)$$

Ejercicios de la Práctica

Ejercicio 4

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}2 & \frac{5}{2}\\ \frac{-3}{2} & 2\end{pmatrix}$$

4.1.) Calcular 3A – 2B + C

$$R=3A-2B+C$$

$$R=3\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$R=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 9 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 0 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$R=\begin{pmatrix}7 & 1\\ 9 & 6\end{pmatrix}$$

Ejercicios de la Práctica

4.3.) Obtener A.C – C.A

$$A.C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 9 & 4\end{pmatrix}$$

$$C.A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 6 & 4\end{pmatrix}$$

$$A.C-C.A=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 9 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & 3\\ 6 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$$

Ejercicios de la Práctica

5.2.) Si A y B son matrices cuadradas de orden n ¿es esta información? Suficiente para garantizar que B.A se puede realizar?

Orden

$$A \in \mathbb{R}^{nxn},\ B \in \mathbb{R}^{nxn}\quad A.B = C \wedge C \in \mathbb{R}^{nxn}$$

Conformabilidad

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A.B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$