Álgebra y Geometría Analítica

Clase 10: Matrices

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

Unidad 2 – Clase 10

01 Definición de Matriz

02 Clasificación de Matrices

03 Ejercicios

Definición de Matriz

Intervalo Natural Inicial

$I_3 = \{1,2,3\}$ $con: \#(I_3) = 3$ $I_4 = \{1,2,3,4\}$ $con: \#(I_4) = 4$

En general: $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ $con: \# I_n = n$

Observación: # significa $'Cardinal \ de'$ (cantidad de elementos del conjunto)

Unión de Conjuntos

Son todos los elementos comunes y no comunes de los conjuntos.

$I_3 \cup I_4 = I_4$

Intersección de Conjuntos

Son todos los elementos comunes de los conjuntos.

$I_3 \cap I_4 = I_3$

Definición de Matriz

Producto Cartesiano:

Son todos los pares de elementos que se pueden hacer entre los elementos del primer y segundo conjunto.

$$I_4 \times I_3 = \{(1;1),(1;2),(1;3),(2;1),(2;2),(2;3),(3;1),(3;2),(3;3),(4;1),(4;2),(4;3)\}$$

Con:

$$\#(I_4 \times I_3) = \# I_4 . \# I_3 = 4.3 = 12$$

Definición de Matriz

Matriz: Definición

Se llama "*Matriz*" a toda función que a cada par ordenado del producto cartesiano entre dos intervalos naturales iniciales, le hace corresponder un número real.

$$f : I_m \times I_n \rightarrow \mathbb{R}$$

Otra definición:

Es una yucsta-posición entre vectores fila o columna.

Nomenclatura:

$A = ((a_{ij})) \wedge A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m \times n$: orden de la matriz (A tiene: m filas y n columnas)

$((a_{ij}))$: Matriz compuesta por los elementos genéricos de la matriz A

$$\begin{array}{l} i:\ \text{número de fila} \\ j:\ \text{número de columna} \end{array} \rightarrow con: \begin{cases} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

Definición de Matriz

Ejemplo:

$$A \in \mathbb{R}^{4\times 3} \wedge A = (a_{ij}) \;/\; a_{ij} : \begin{cases} 3! + j & si\ i = j \\ 4i - j & si\ i > j \\ i + j & si\ i < j \end{cases}$$

Matriz de producción trimestral de la planta

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \begin{array}{c c} \begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 5 \\ 11 & 10 & 9 \\ 15 & 14 & 13 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{Trim.1} \\ \text{Trim.2} \\ \text{Trim.3} \\ \text{Trim.4} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \text{Prod.1} & \text{Prod.2} & \text{Prod.3} \end{array} & \end{array}$$

Definición de Matriz

Ejemplo:

$$A \in \mathbb{R}^{4\times 3} \wedge A=(a_{ij}) \;/\; a_{ij}: \begin{cases} 3!+j & si\ i=j \\ 4i-j & si\ i>j \\ i+j & si\ i<j \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 5 \\ 11 & 10 & 9 \\ 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$$

La función factorial:

$$f:\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N} \;/\; f(n)=n! \text{ con } n: \begin{cases} 1 & si\ n=0 \\ n(n-1)! & si\ n>0 \end{cases}$$

$$f(0)=0!=1$$
$$f(1)=1!=1(1-1)!=1.1=1$$
$$f(2)=2!=2(2-1)!=2.1=2$$
$$f(3)=3!=3(3-1)!=3.2=6$$
$$f(4)=4!=4(4-1)!=4.6=24$$
$$f(5)=5!=5(5-1)!=5.24=120$$

- ***f* no es inyectiva**: ya que 0 y 1 tienen la misma imagen.

- ***f* no es subyectiva**: ya que el conjunto imagen y el de llegada no coinciden (p/ej.: 3 no tiene pre-imagen).

Igualdad entre Matrices

Igualdad entre matrices:

Dos matrices son iguales si son del mismo orden y sus respectivos elementos son iguales.

Clasificación de Matrices

1) Matriz Nula (ó Matriz Cero):

$$O_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};O_1\in\mathbb{R}^{4\times 3}\qquad O_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix};O_2\in\mathbb{R}^{3\times 4}$$

2) Matriz Fila:

Las matrices fila tienen orden $1\times n$ con $n\in\mathbb{N}$

$$A=\begin{pmatrix}-3&\frac{4}{7}&8&\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

3) Matriz Columna:

Las matrices columna tienen orden $m\times 1$ con $m\in\mathbb{N}$ $A=\begin{pmatrix}-3\\4\\7\end{pmatrix}$

Clasificación de Matrices

4) Matrices Cuadradas

En las matrices cuadradas la cantidad de filas es igual a la cantidad de columnas.

Su orden es de *n x n* o simplemente: orden *n*.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Traza de una matriz:

En una matriz cuadrada, la traza de una matriz es la suma de los elementos de la diagonal principal

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}: \quad tr(A)=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn} \Rightarrow tr(A)=\sum_{i=1}^{i=n} a_{ii}$$

$$Ejemplo: \; tr(A)=1+(-1)+7=7$$

Clasificación de Matrices

4) Matrices Cuadradas

En las matrices cuadradas la cantidad de filas es igual a la cantidad de columnas.

Su orden es de *n x n* o simplemente: orden *n*.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

4.a) Matriz Diagonal:

$$A \ es \ diagonal: a_{ij}=0 \Leftrightarrow i\neq j$$

$$Ejemplo:$$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Clasificación de Matrices

4.a.1) Matriz Escalar:

$$E \ \ es \ \ Escalar: \begin{cases} a_{ij} = 0 \Leftrightarrow i \neq j \\ a_{ij} = k \Leftrightarrow i = j \quad k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$Ejemplo:$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Clasificación de Matrices

4.a.1.i) Matriz Identidad (o unidad):

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es una yucsta-posición de los vectores canónicos de R^n por columna.

Delta de Kronecker:

$$\delta_{ij} : \begin{cases} 1 \Leftrightarrow i = j \\ 0 \Leftrightarrow i \neq j \end{cases}$$

Clasificación de Matrices

4.b) Matriz Triangular:

Matriz Triangular Superior:

$a_{ij}=0 \Leftrightarrow i>j$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 14 \\ 0 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Matriz Triangular Inferior

$b_{ij}=0 \Leftrightarrow i<j$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 0 \\ 1 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

Clasificación de Matrices

4.c) Matrices Simétricas:

$$M \ \text{es Simétrica} \Leftrightarrow m_{ij} = m_{ji}$$

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 7 & 9 \\ -2 & 7 & 4 & 1 \\ 1 & 9 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

4.d) Matrices Antisimétricas:

$$A \ \text{es Antisimétrica} \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & -9 \\ -3 & 0 & 4 & 9 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \\ 9 & -9 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Clasificación de Matrices

- **MATRICES**
  - Nula $o_{ij}=0 \quad \forall i \wedge \forall j$
  - Fila $A \in \mathbb{R}^{1xn}$
  - Columna $A \in \mathbb{R}^{mx1}$
  - Cuadradas $A \in \mathbb{R}^{nxn}$
    - Diagonal $a_{ij}=0 \Leftrightarrow i \neq j$
      - Escalar $e_{ij}=k \Leftrightarrow i=j$
        - Identidad $\delta_{ij}: \begin{cases} 1 \Leftrightarrow i=j \\ 0 \Leftrightarrow i \neq j \end{cases}$
    - Triangular
      - Inferior $a_{ij}=0 \Leftrightarrow i<j$
      - Superior $a_{ij}=0 \Leftrightarrow i>j$
    - Simétricas $m_{ij}=m_{ji}$
    - Antisimétricas $a_{ij}=-a_{ji}$

Ejercicios de la Práctica

Ejercicio 2

2.1.) Construir la matriz A ($A=\left(a_{ij}\right)\in\mathbb{R}^{2\times 3}$), según las definiciones dadas en cada caso.

2.1.c) $a_{ij}=3\,\delta_{ij}-1$

$$a_{11}=3.1-1=2$$
$$a_{12}=3.0-1=-1$$
$$a_{13}=3.0-1=-1$$
$$a_{21}=3.0-1=-1$$
$$a_{22}=3.1-1=2$$
$$a_{23}=3.0-1=-1$$

Ejercicios de la Práctica

Ejercicio 2

2.1.) Construir la matriz A ($A=(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 3}$), según las definiciones dadas en cada caso.

2.1.c) $a_{ij}=3\,\delta_{ij}-1$

$$a_{11}=3.1-1=2$$
$$a_{12}=3.0-1=-1$$
$$a_{13}=3.0-1=-1$$
$$a_{21}=3.0-1=-1$$
$$a_{22}=3.1-1=2$$
$$a_{23}=3.0-1=-1$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicios de la Práctica

Ejercicio 3.

Recodificación de información, de distinta índole, en forma matricial. Valoración del empleo de matrices como medios eficientes para cubrir dicho objetivo. Creación de códigos propios.

Interpretar y completar las siguientes matrices.

3.1) Sea M la matriz de comunicación que representa a la red esquematizada en la figura 1, consistente de 6 nodos los cuales pueden o no transmitir información entre sí, construida con la siguiente convención:

* se establece una relación biunívoca entre el nombre del nodo y la sucesión de los números naturales, correspondiendo: **A**↔1, **B**↔2, **C**↔3, **D**↔4, **E**↔5, **F**↔6.

* $m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si el nodo } i \text{ envía información al nodo } j \text{, con } i \neq j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$.

Por ejemplo: $m_{2,3} = 1$; $m_{3,2} = 0$; $m_{4,4} = 0$

Escribir la matriz M.

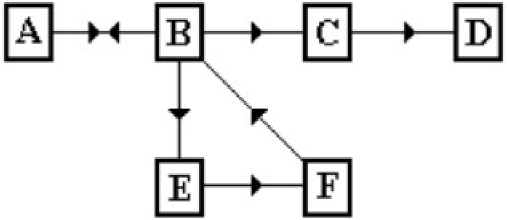


Figura 1. Gráfico del sistema de comunicación

Ejercicios de la Práctica

Ejercicio 3

3.1.)

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

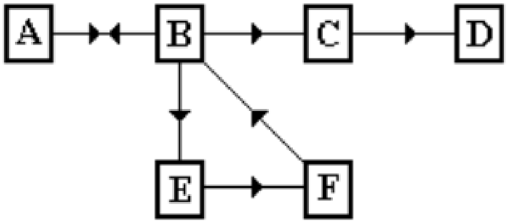
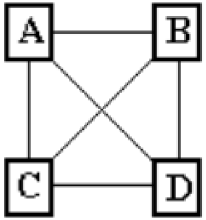


Figura 1. Gráfico del sistema de comunicación

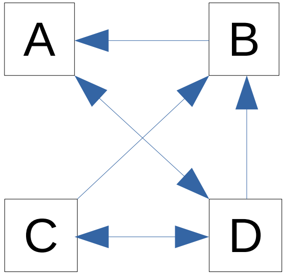
Ejercicios de la Práctica

3.2) Sea M la matriz de comunicación entre cuatro puntos de una ciudad escrita con la misma convención que en el ejercicio 3.1). Indicar en el esquema de la figura 2 mediante flechas el sentido de circulación de las calles que los vinculan. En la eventualidad de no tener conexión alguna, eliminar la traza correspondiente.



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 2. Esquema de los cuatro puntos de la ciudad y matriz de circulación asociada



Ejercicios de la Práctica

<u>Ejercicio 3</u>

3.3.)

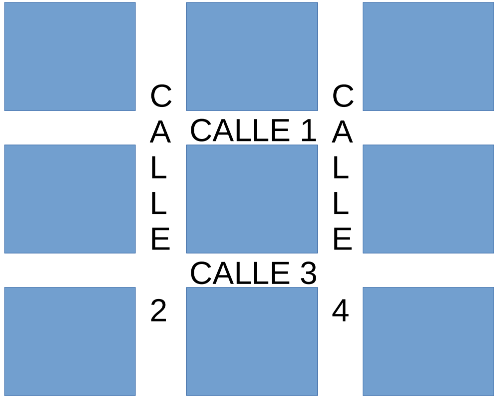


Figura a

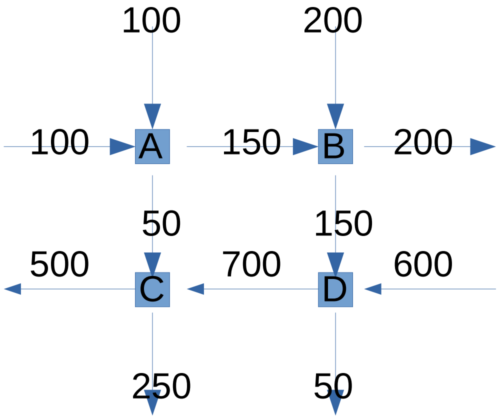


Figura b

Solución:

N: Norte

O: Oeste

S: Sur

E: Este

$$\begin{array}{c} \\ N \\ O \\ S \\ E \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 100 & 200 & 50 & 150 \\ 100 & 150 & -500 & -700 \\ -50 & -150 & -250 & -50 \\ -150 & -200 & 700 & 600 \end{pmatrix} \end{array}$$