Álgebra y Geometría Analítica

Clase 08: Geometría Métrica

UNIVERSIDAD
TECNOLÓGICA
NACIONAL

Unidad 1 – Clase 08

01 Repaso de Clases Anteriores

02 Geometría Métrica

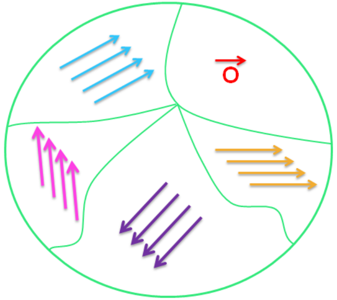
03 Ejercicios

Repaso de Clases Anteriores

VECTORES: INTRODUCCION

- ✓ Vectores: Una definición.
  Es un segmento orientado.

- ✓ Vectores Libres



- ✓ Atributos de un vector:
  - Dirección
  - Sentido
  - Módulo

- ✓ Módulo de un vector

$$\vec{a} = (a_1 ; a_2 ; a_3)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2} \quad |\vec{a}| \in \mathbb{R} \geqslant 0$$

Repaso de Clases Anteriores

OPERACIONES CON VECTORES:

$$Sean: \vec{a}=(a_1;a_2;a_3) \wedge \vec{b}=(b_1;b_2;b_3) \wedge \vec{c}=(c_1;c_2;c_3) \wedge \alpha \in \mathbb{R}:$$

I) SUMA:

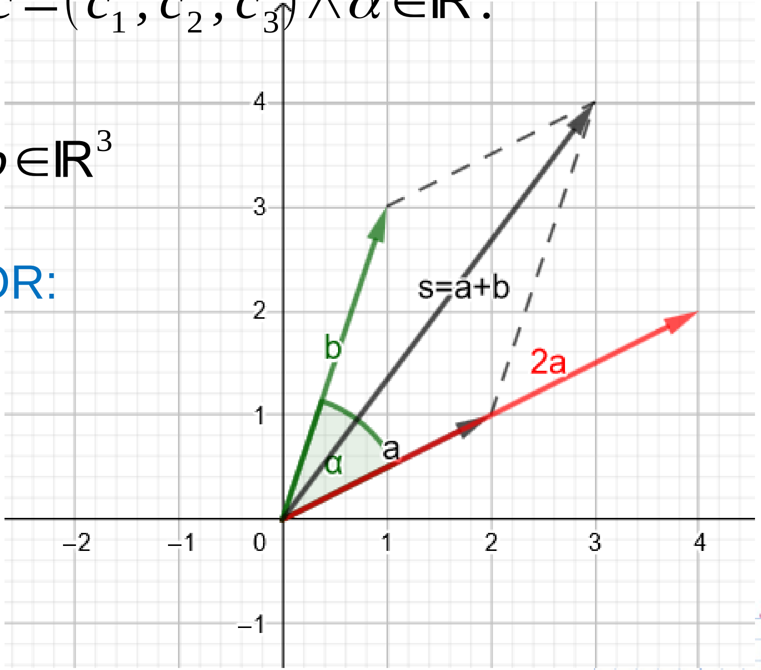
$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3) \quad \vec{a}+\vec{b} \in \mathbb{R}^3$$

II) PRODUCTO DE ESCALAR Y VECTOR:

$$\alpha\vec{a}=(\alpha a_1;\alpha a_2;\alpha a_3) \quad \alpha\vec{a} \in \mathbb{R}^3$$

III) PRODUCTO ESCALAR:

$$\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \quad \vec{a}.\vec{b} \in \mathbb{R}$$



Repaso de Clases Anteriores

OPERACIONES CON VECTORES (CONT.):

$$Sean: \vec{a}=(a_1;a_2;a_3) \wedge \vec{b}=(b_1;b_2;b_3) \wedge \vec{c}=(c_1;c_2;c_3) \wedge \alpha \in \mathbb{R}:$$

IV) PRODUCTO VECTORIAL:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2 b_3-a_3 b_2;a_3 b_1-a_1 b_3;a_1 b_2-a_2 b_1)\in\mathbb{R}^3$$

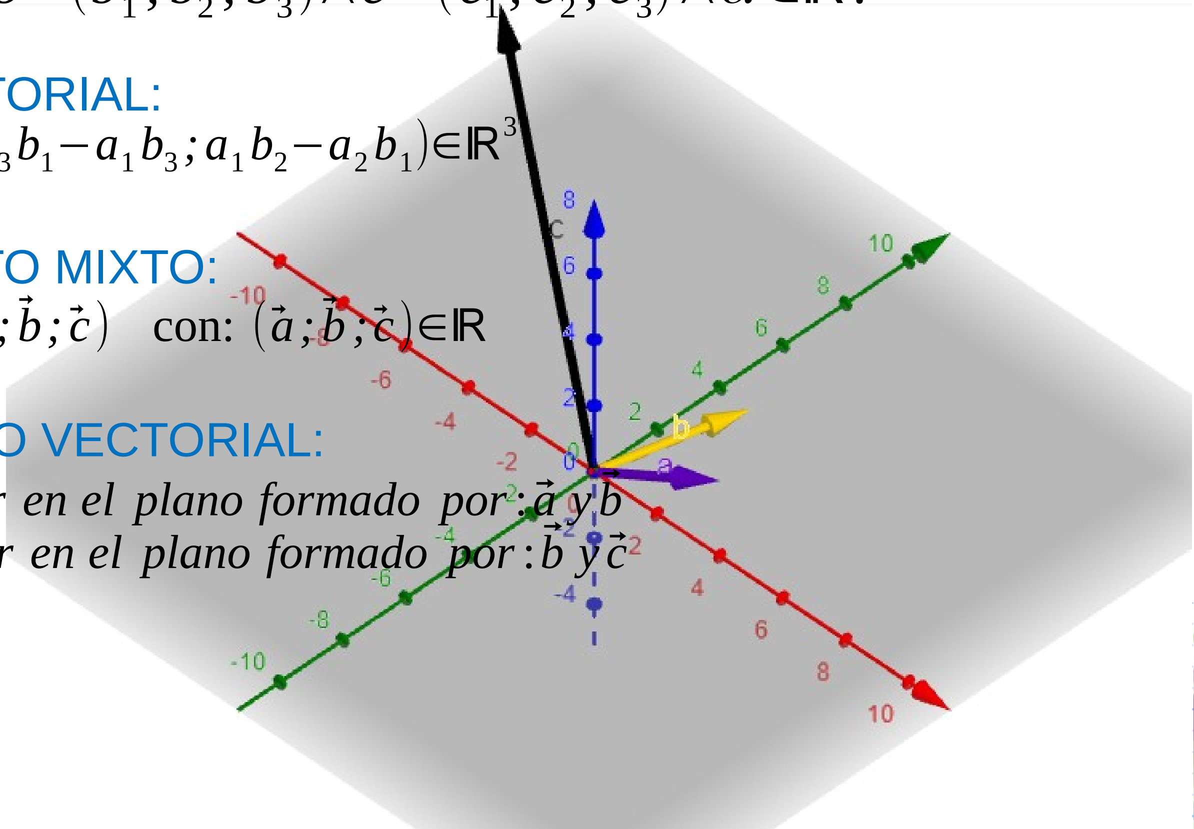
V) DOBLE PRODUCTO MIXTO:

$$\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}.\vec{c}=(\vec{a};\vec{b};\vec{c}) \quad \text{con: } (\vec{a};\vec{b};\vec{c})\in\mathbb{R}$$

VI) DOBLE PRODUCTO VECTORIAL:

$$(\vec{a}\,x\,\vec{b})\,x\,\vec{c}\; es\ un\ vector\ en\ el\ plano\ formado\ por: \vec{a}\ y\ \vec{b}$$

$$\vec{a}\,x\,(\vec{b}\,x\,\vec{c})\; es\ un\ vector\ en\ el\ plano\ formado\ por: \vec{b}\ y\ \vec{c}$$



Repaso de Clases Anteriores

Resumen

Condiciones interesantes

$$\forall \vec{a} \neq \vec{0} \wedge \forall \vec{b} \neq \vec{0} \wedge \forall \vec{c} \neq \vec{0}$$

Condiciones de Paralelismo

$$\vec{a} \,//\, \vec{b} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} / \vec{a} = \alpha \vec{b}$$

$$Solo\ en\ R^3 : \vec{a} \,//\, \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

Condición de ortogonalidad

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} . \vec{b} = 0$$

Condición de coplanaridad

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\ son\ coplanares \Leftrightarrow (\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}) = 0$$

Cálculos de interés geométrico

Versor asociado a un vector

$$\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} \ \wedge \ |\hat{a}| = 1$$

El ángulo entre dos vectores

$$\phi = \arccos\left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$$

El área del paralelogramo

$$|\vec{a} \times \vec{b}| : Area\ del\ paralelogramo$$

El volumen del paralelepípedo

$$|(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})| : Volumen\ del\ paralelepípedo$$

Repaso de Clases Anteriores

Ecuaciones de rectas para R^2 y R^3

Datos: $P_0(x_0; y_0; z_0) \wedge P_0 \in r$, $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3) \wedge \vec{u} \,//\, r$

I) Ecuación Vectorial Paramétrica (EVP)

$$r: (x; y; z) = (x_0; y_0; z_0) + \lambda (u_1; u_2; u_3) \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R})$$

II) Ecuación Cartesiano Paramétricas (ECP)

$$r: \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

III) Ecuaciones Simétricas (ES)

$$r: \frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}$$

Repaso de Clases Anteriores

Ecuaciones de rectas para R^2 y R^3

Datos: $P_0(x_0;y_0;z_0)\wedge P_0\in r\,,\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)\wedge\vec{u}\,//\,r$

IV) Ecuaciones Reducidas (ER)

$$r:\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{u_1}=\dfrac{z-z_0}{u_3}\\[2ex]\dfrac{y-y_0}{u_2}=\dfrac{z-z_0}{u_3}\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}x-x_0=\dfrac{u_1}{u_3}z-\dfrac{u_1}{u_3}z_0\\[2ex]y-y_0=\dfrac{u_2}{u_3}z-\dfrac{u_2}{u_3}z_0\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}x=\underbrace{\dfrac{u_1}{u_3}}_{m}z\underbrace{-\dfrac{u_1}{u_3}z_0+x_0}_{p}\\[2ex]y=\underbrace{\dfrac{u_2}{u_3}}_{n}z\underbrace{-\dfrac{u_2}{u_3}z_0+y_0}_{q}\end{cases}$$

$$r:\begin{cases}x=mz+p\\y=nz+q\end{cases}$$

$$p_1(p;q;0),\vec{v}=(m;n;1)$$

Nota: En estas ecuaciones, se pierde de vista las coordenadas del punto y componentes del vector

Ejemplo:

$$t:\begin{cases}x=-3y+5\\z=2y+1\end{cases}\Rightarrow P_0(5;0;1),\vec{v}=(-3;1;2)$$

Repaso de Clases Anteriores

Ecuaciones de rectas para R^2 y R^3

Datos: $P_1(x_1;y_1;z_1) \wedge P_1 \in r_1 , \vec{u}=(u_1;u_2;u_3) \wedge \vec{u} // r_1$

$P_2(x_2;y_2;z_2) \wedge P_2 \in r_2 , \vec{v}=(v_1;v_2;v_3) \wedge \vec{v} // r_2$

Posiciones relativas entre rectas en R^3:

Paralelas:

$$r_1 // r_2 \Leftrightarrow \vec{u} // \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}=\alpha \vec{v}$$

$$En\ R^3 : \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$$

Coincidentes:

$$r_1 \equiv r_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} // \vec{v} \\ P_2 \in r_1 \vee P_1 \in r_2 \end{cases}$$

Perpendiculares:

$$r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} . \vec{v} = 0$$

Incidentes:

$$r_1 \angle r_2 \Leftrightarrow r_1 \cap r_2 \neq \emptyset \Rightarrow \begin{cases} r_1 \nparallel r_2 \\ (\overrightarrow{P_1P_2};\vec{u};\vec{v})=0 \end{cases}$$

Alabeadas:

$$r_1\ y\ r_2\ son\ alabeadas \begin{cases} r_1 \cap r_2 = \emptyset \\ r_1 \nparallel r_2 \\ (\overrightarrow{P_1P_2};\vec{u};\vec{v}) \neq 0 \end{cases}$$

Repaso de Clases Anteriores

Ecuaciones de rectas para R^2

I) Ecuación Explícita: Recta que pasa por dos puntos

$$Datos: P_0(x_0;y_0),\ P_0 \in r,\ P_1(x_1;y_1),\ P_1 \in r,\ P_0 \neq P_1$$

$$\boxed{r: y = mx + b} \quad con: m = tg\,\alpha = \frac{(y_0 - y_1)}{(x_0 - x_1)}$$

II) Ecuación General Implícita:

$$Datos: P_0(x_0;y_0),\ P_0 \in r \wedge \vec{n}(A;B) \wedge \vec{n} \perp r$$

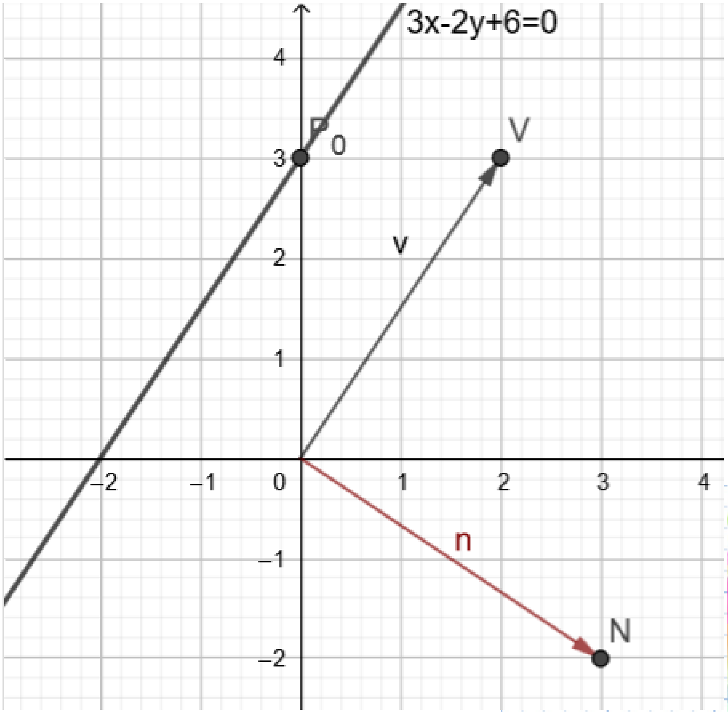
$$\boxed{r: Ax + By + C = 0}$$

III) Ecuación Normal o Hessiana

$$\boxed{r: \frac{A}{|\vec{n}|}x + \frac{B}{|\vec{n}|}y + \frac{C}{|\vec{n}|} = 0} \quad con: dist(O, r) = \frac{|C|}{|\vec{n}|}$$

IV) Ecuación Segmentaria

$$\boxed{r: \frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1}$$



Repaso de Clases Anteriores

Ecuaciones de Planos:

$$Datos:\ P_0(x_0;y_0;z_0)\wedge P_0\in\pi,\ \vec{u}=(u_1;u_2;u_3)\wedge\vec{u}\,//\,\pi,\ \vec{v}=(v_1;v_2;v_3)\wedge\vec{v}\,//\,\pi\wedge\vec{u}\not\parallel\vec{v}$$

I) Ecuación Vectorial Paramétrica (EVP):

$$\pi:(x;y;z)=(x_0;y_0;z_0)+\lambda(u_1;u_2;u_3)+\mu(v_1;v_2;v_3)\quad\forall\lambda\in\mathbb{R},\forall\mu\in\mathbb{R}$$

II) Ecuación Cartesiano Paramétricas (ECP)

$$\pi:\begin{cases}x=x_0+\lambda u_1+\mu v_1\\ y=y_0+\lambda u_2+\mu v_2\\ z=z_0+\lambda u_3+\mu v_3\end{cases}\quad\forall\lambda\in\mathbb{R},\forall\mu\in\mathbb{R}$$

Repaso de Clases Anteriores

Ecuaciones de Planos:

$$Datos:\ P_0(x_0;y_0;z_0)\wedge P_0\in\pi,\ \vec{u}=(u_1;u_2;u_3)\wedge\vec{u}\,//\,\pi,\ \vec{v}=(v_1;v_2;v_3)\wedge\vec{v}\,//\,\pi\wedge\vec{u}\not\parallel\vec{v}$$

I) Ecuación Vectorial Paramétrica (EVP):

$$\pi:(x;y;z)=(x_0;y_0;z_0)+\lambda(u_1;u_2;u_3)+\mu(v_1;v_2;v_3)\quad\forall\lambda\in\mathbb{R},\forall\mu\in\mathbb{R}$$

II) Ecuación Cartesiano Paramétricas (ECP)

$$\pi:\begin{cases} x=\boxed{x_0}+\lambda\,\boxed{u_1}+\mu\,\boxed{v_1}\\ y=\boxed{y_0}+\lambda\,\boxed{u_2}+\mu\,\boxed{v_2}\\ z=\boxed{z_0}+\lambda\,\boxed{u_3}+\mu\,\boxed{v_3}\end{cases}\quad\forall\lambda\in\mathbb{R},\forall\mu\in\mathbb{R}$$

P_0 $\quad$ $\vec{u}$ $\quad$ $\vec{v}$

Repaso de Clases Anteriores

Ecuaciones de Planos (cont.):

$$Datos:\ P_0(x_0; y_0; z_0),\ P_0 \in \pi\ ,\ \vec{n} = (A; B; C)\ con\ \vec{n} \perp \pi$$

III) Ecuación General Implícita (EGI):

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

IV) Ecuación Normal o Hessiana:

$$\pi : \frac{A}{|\vec{n}|}x + \frac{B}{|\vec{n}|}y + \frac{C}{|\vec{n}|}z + \frac{D}{|\vec{n}|}z = 0 \quad con:\ dist(O, \pi) = \left|\frac{D}{|\vec{n}|}\right|$$

V) Ecuación Segmentaria:

$$\pi : \frac{x}{\frac{-D}{A}} + \frac{y}{\frac{-D}{B}} + \frac{z}{\frac{-D}{C}} = 1$$

Repaso de Clases Anteriores

Determinación de Planos

a) A partir de tres puntos no alineados

- Puede hallarse la EVP, ECP eligiendo cualquiera de los puntos. Los dos vectores directores se los puede obtener a partir de los tres puntos.
- Puede hallarse la ecuación General Implícita, la normal y la Segmentaria a partir de un punto y un vector normal. Este último, puede hallarse haciendo el producto vectorial entre los dos vectores directores.

b) A partir de un punto dado del plano y una recta incluida en el mismo

- Como el punto dado y la recta están en el mismo plano, puede obtenerse un vector director uniendo al punto dado con el punto de la recta (que es dato). El otro vector director necesario es aquel que viene dado en la ecuación de la recta.

Repaso de Clases Anteriores

Posiciones relativas entre dos planos

Paralelos:

$$\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0}$$

Coincidentes:

$$\pi_1 \equiv \pi_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \\ P \in \pi_1 \wedge P \in \pi_2 \end{cases}$$

Perpendiculares:

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 . \vec{n}_2 = 0$$

Incidentes:

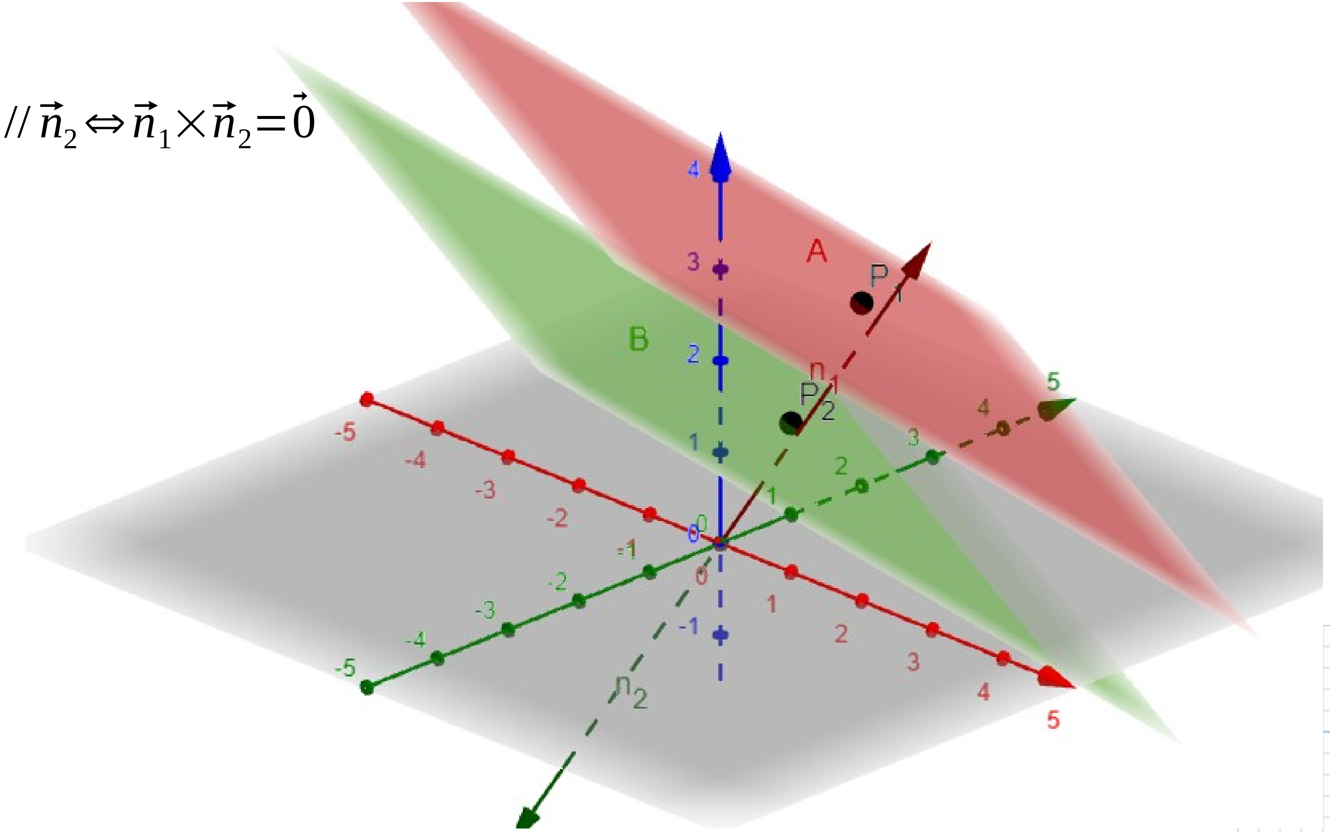
$$\pi_1 \nparallel \pi_2 \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = r$$

Repaso de Clases Anteriores

Posiciones relativas entre dos planos

Paralelos:

$\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0}$

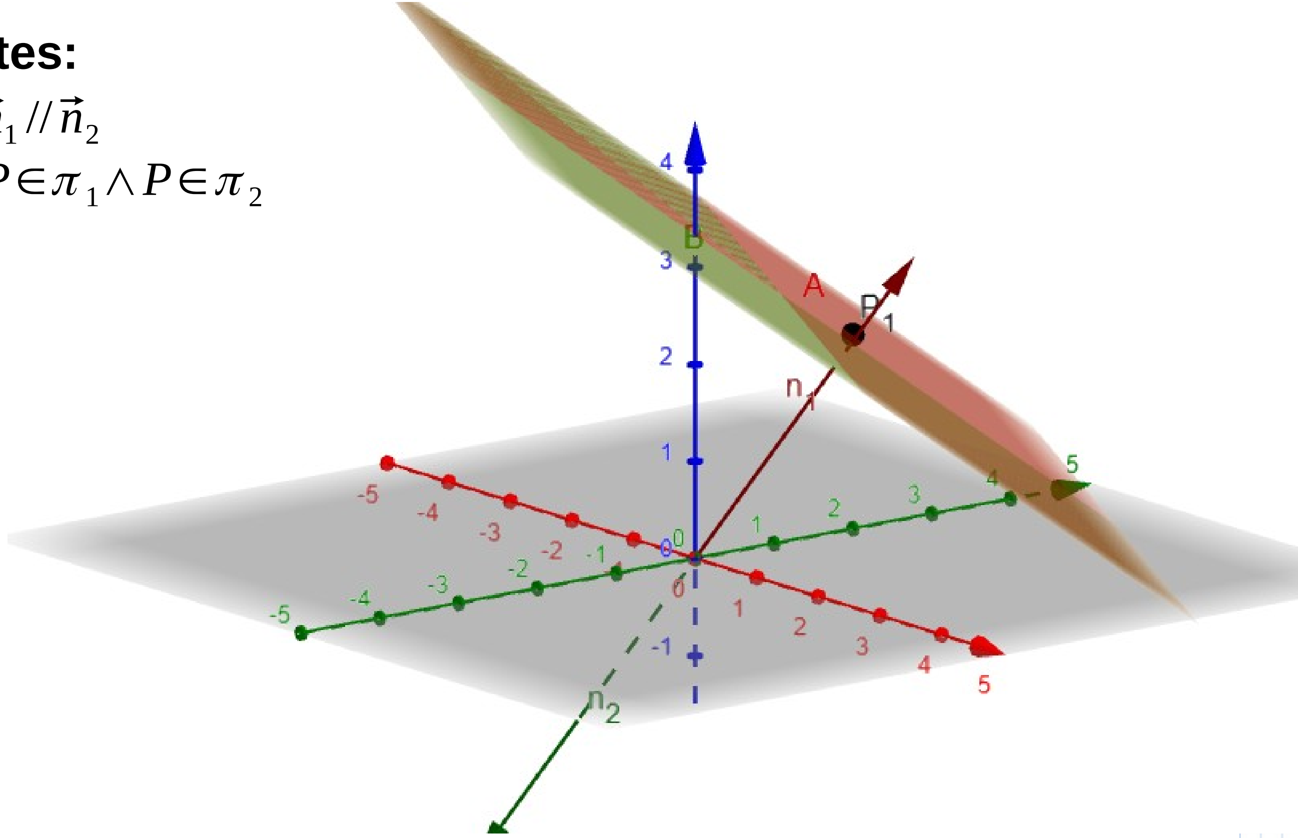


Repaso de Clases Anteriores

Posiciones relativas entre dos planos

Coincidentes:

$$\pi_1 \equiv \pi_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \\ P \in \pi_1 \wedge P \in \pi_2 \end{cases}$$

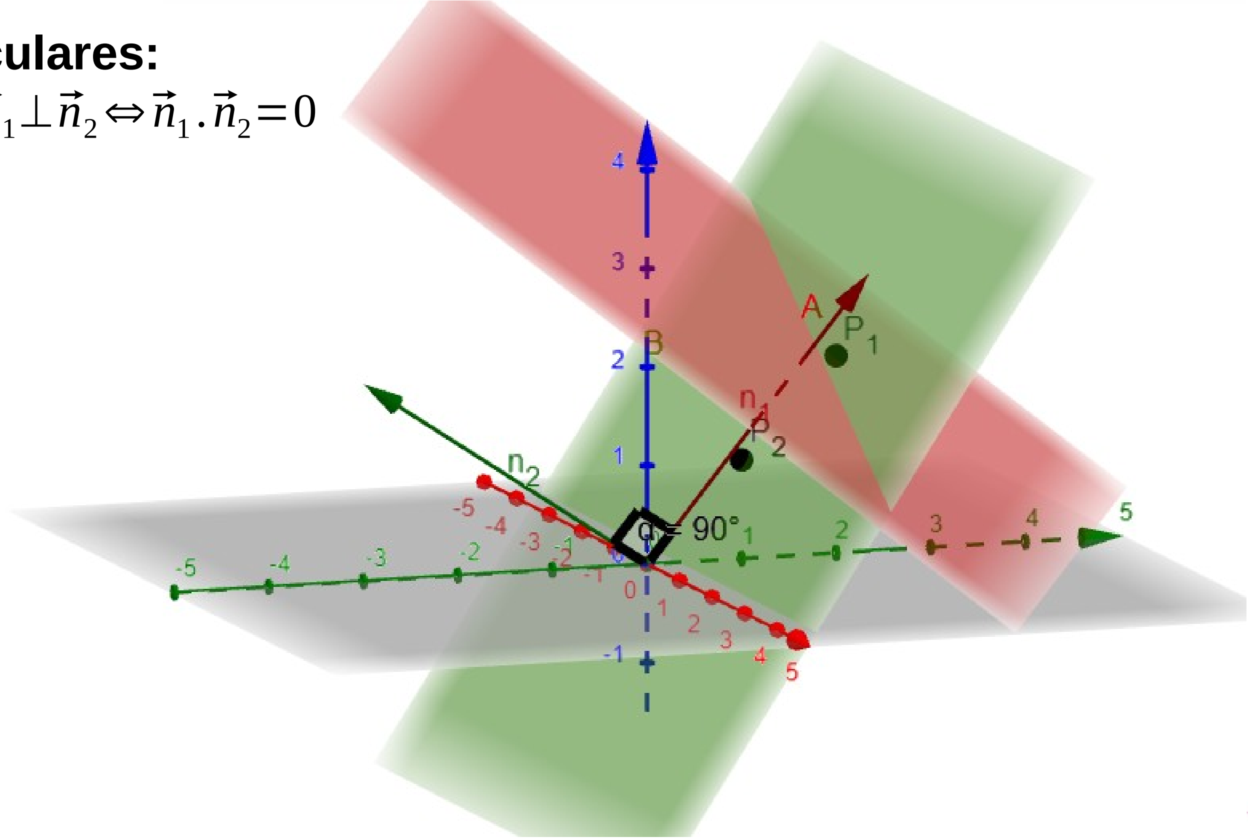


Repaso de Clases Anteriores

Posiciones relativas entre dos planos

Perpendiculares:

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 . \vec{n}_2 = 0$$

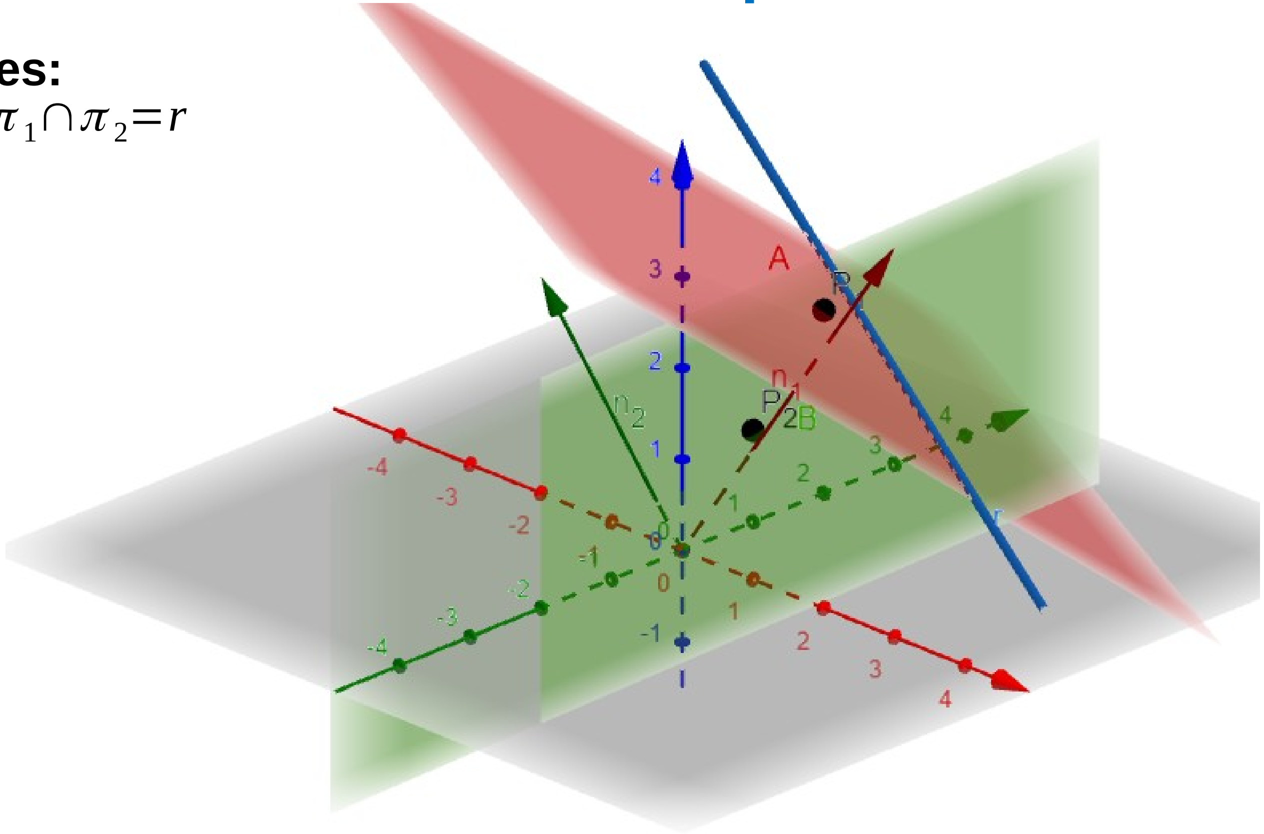


Repaso de Clases Anteriores

Posiciones relativas entre dos planos

Incidentes:

$\pi_1 \measuredangle \pi_2 \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = r$



Geometría Métrica

Geometría Métrica: mide distancias y ángulos

1. Distancias en el plano

I) Distancia entre puntos

$$Datos: \begin{cases} P_0 = (x_0 ; y_0) \\ P_1 = (x_1 ; y_1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{d(P_0 ; P_1) = |\overrightarrow{P_0 P_1}|}$$

Geometría Métrica

1. Distancias en el plano

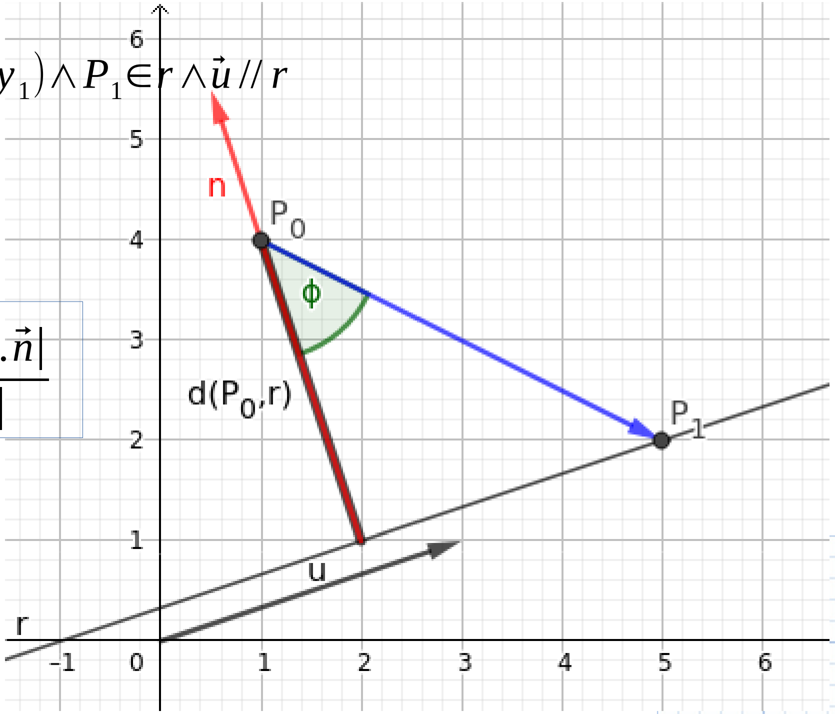
II) Distancia de punto a recta

$$Datos:\begin{cases} P_0=(x_0;y_0) \\ r:\vec{OP}=\vec{OP_1}+\lambda\vec{u} \quad con: P_1=(x_1;y_1)\wedge P_1\in r\wedge\vec{u}//r \end{cases}$$

$$\cos\phi=\frac{d(P_0;r)}{|\vec{P_0P_1}|}$$

$$d(P_0;r)=|\vec{P_0P_1}|\cos\phi$$

$$d(P_0;r)=Proy_n\vec{P_0P_1}\Rightarrow \boxed{d(P_0;r)=\frac{|\vec{P_0P_1}.\vec{n}|}{|\vec{n}|}}$$



Geometría Métrica

1. Distancias en el plano

II) Distancia de punto a recta

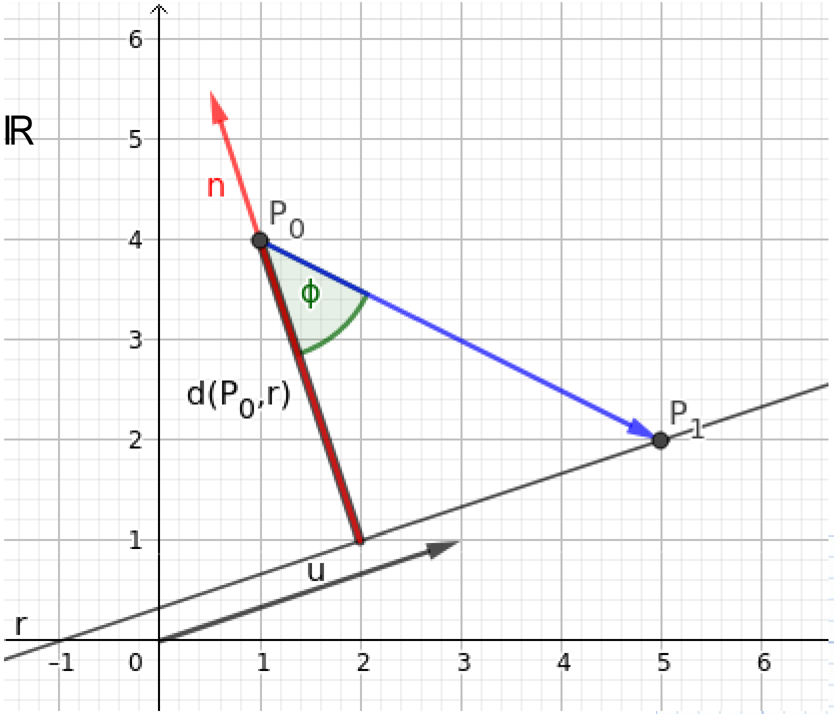
Ejemplo:

$$Datos:\begin{cases} P_0=(1;4) \\ r:(x;y)=(5;2)+\lambda(3;1) \quad \forall\lambda\in\mathbb{R} \end{cases}$$

$$d(P_0;r)=Proy_n\overrightarrow{P_0P_1}$$

$$d(P_0;r)=\frac{|(4;-2).(-1;3)|}{|(-1;3)|}$$

$$d(P_0;r)=\frac{|-10|}{\sqrt{10}}\Rightarrow \boxed{d(P_0;r)=\sqrt{10}}$$



Geometría Métrica

1. Distancias en el plano

II) Distancia de punto a recta

$$Datos: \begin{cases} P_0 = (x_0 ; y_0) \\ r: Ax + By + C = 0 \quad con: \vec{n} = (A ; B) \wedge P_1 = (x_1 ; y_1) \in r \end{cases}$$

$$d(P_0 ; r) = \frac{|(x_1 - x_0 ; y_1 - y_0).(A ; B)|}{|(A ; B)|} = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d(P_0 ; r) = \frac{|-A x_0 - B y_0 + A x_1 + B y_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad con: C = -A x_1 - B y_1$$

$$\boxed{d(P_0 ; r) = \frac{|A x_0 + B y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

$Observación:\ Si\ reemplazamos\ (x_0 ; y_0)\ por\ (0 ; 0)\ nos\ queda:$

$$d(O ; r) = \left| \frac{C}{|\vec{n}|} \right|$$

Geometría Métrica

1. Distancias en el plano

II) Distancia de punto a recta

Ejemplo:

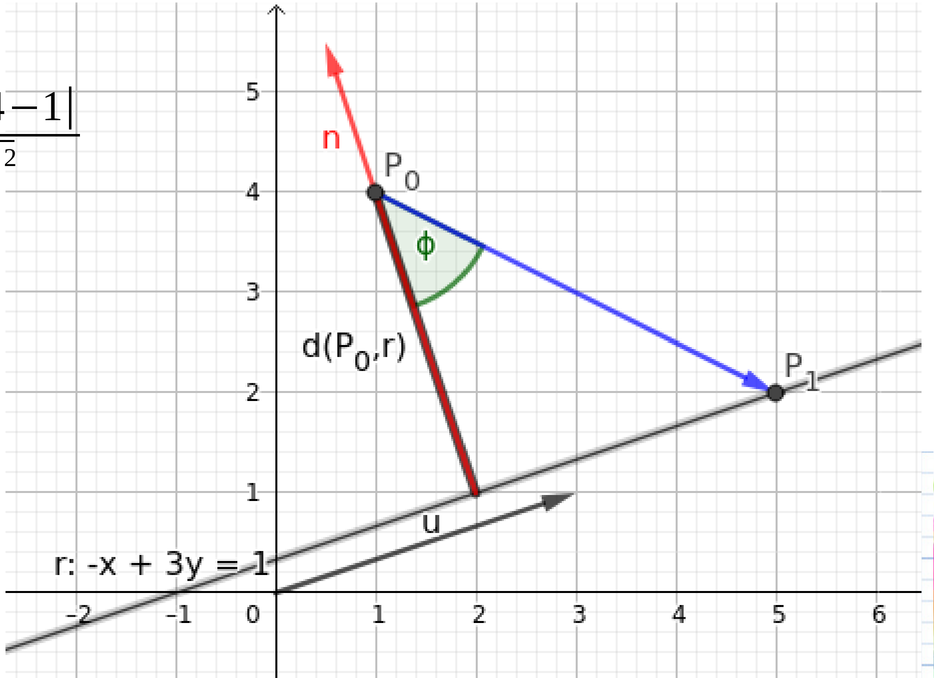
$$Datos:\begin{cases} P_0=(1;4) \\ r:-x+3y-1=0 \end{cases}$$

$$d(P_0;r)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|-1.1+3.4-1|}{\sqrt{(-1)^2+3^2}}$$

$$d(P_0;r)=\frac{|10|}{\sqrt{(-1)^2+3^2}}$$

$$\boxed{d(P_0;r)=\sqrt{10}}$$

$$y\ además:\ d(O;r)=\frac{\sqrt{10}}{10}$$



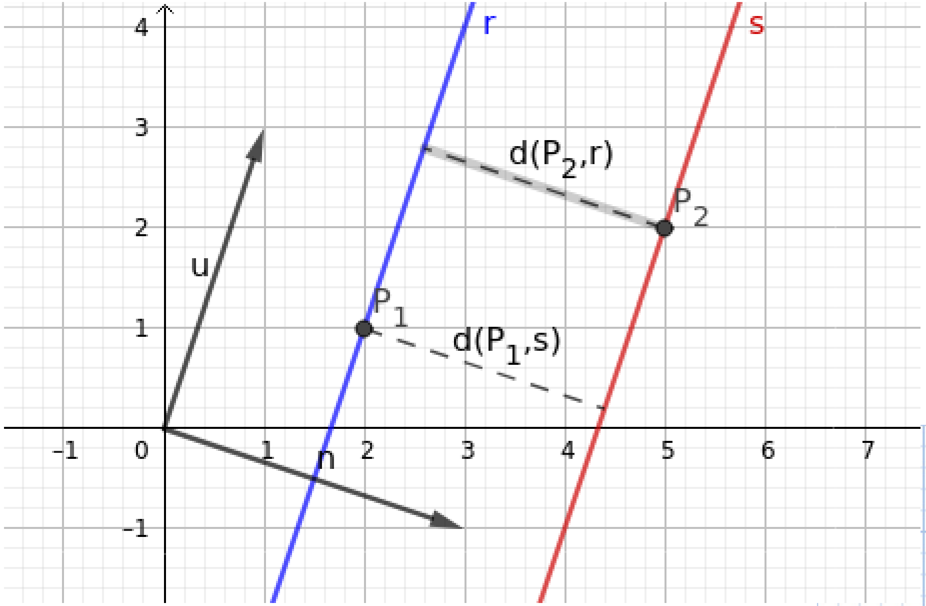
Geometría Métrica

1. Distancias en el plano

III) Distancia entre rectas paralelas

$$Datos: \begin{cases} r_1: \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \lambda \vec{u} & \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ r_2: \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} + \mu \vec{v} & \forall \mu \in \mathbb{R} \end{cases} \quad con: \vec{u} // \vec{v}$$

$$\boxed{d(r_1; r_2) = d(P_2, r_1) = d(P_1; r_2)}$$



Geometría Métrica

2. Distancias en el espacio

I) Distancia entre puntos

$$Datos: \begin{cases} P_0(x_0; y_0; z_0) \\ P_1(x_1; y_1; z_1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{d(P_0; P_1) = |\overrightarrow{P_0P_1}|}$$

Geometría Métrica

2. Distancias en el espacio

II) Distancia entre punto y plano

a) π en forma vectorial paramétrica:

$$Datos:\begin{cases} P_0(x_0;y_0;z_0) \\ \pi:\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\lambda u+\mu v \ \forall\ \lambda\in\mathbb{R},\forall\ \mu\in\mathbb{R} \end{cases}$$

$$d(P_0;\pi)=\frac{\left|\overrightarrow{P_0P_1}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}$$

$$\boxed{d(P_0;\pi)=\frac{\left|\overrightarrow{P_0P_1}.\vec{u}\times\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|}}$$

Geometría Métrica

2. Distancias en el espacio

II) Distancia entre punto y plano

b) π en forma General Implícita:

$$Datos: \begin{cases} P_0(x_0; y_0; z_0) \\ \pi: Ax+By+Cz+D=0 \quad con: \vec{n}=(A;B;C) \end{cases}$$

Reemplazando las coordenadas de P_0 en las variables del plano:

$$d(P_0;\pi)=\frac{|A\,x_0+B\,y_0+C\,z_0+D|}{|(A;B;C)|}$$

$$d(P_0;\pi)=\frac{|A\,x_0+B\,y_0+C\,z_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$Observación: Fácilmente\ \ puede\ \ deducirse\ \ que: d(O;\pi)=\frac{|D|}{|\vec{n}|}$$

Geometría Métrica

2. Distancias en el espacio

II) Distancia entre punto y plano

Ejemplo:

$$Datos: \begin{cases} P_0(1;4;5) \\ \pi: x+2y+z-4=0 \quad con: \vec{n}=(1;2;1) \end{cases}$$

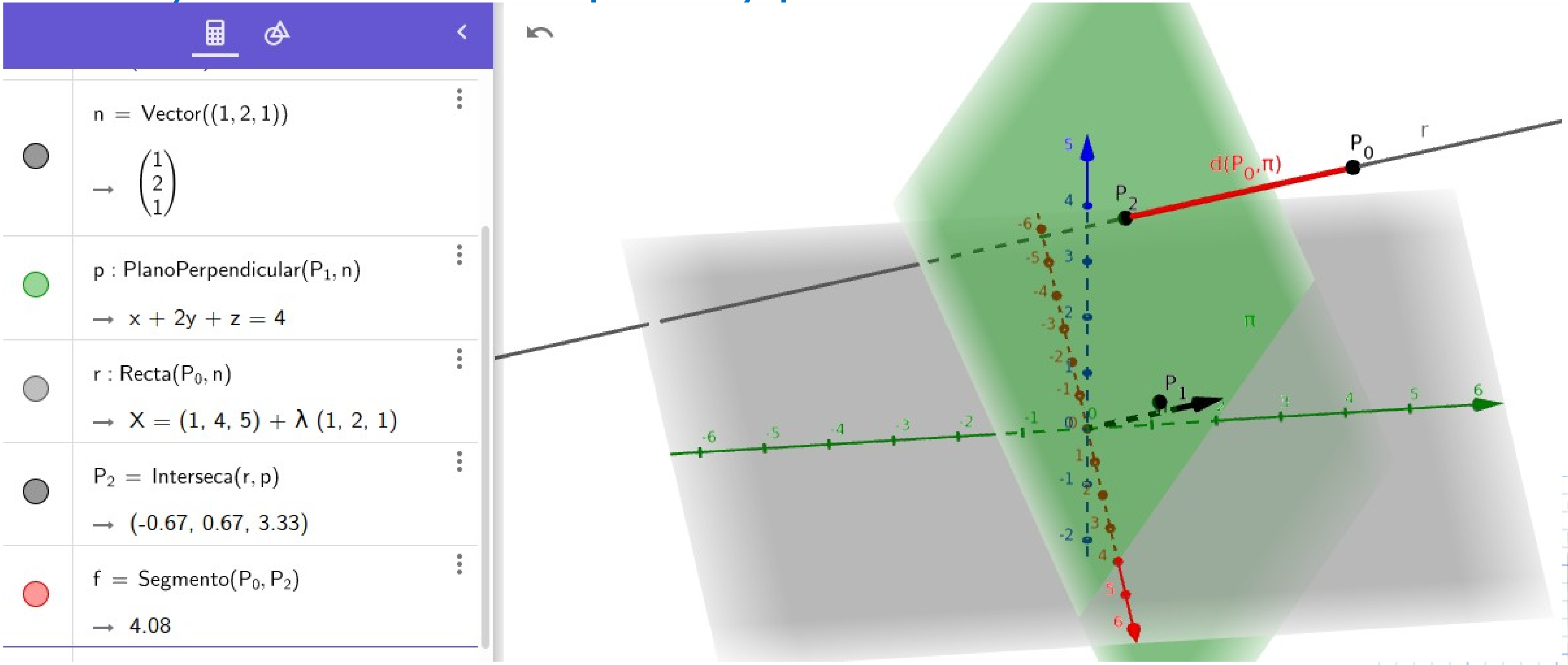
$$d(P_0;\pi)=\frac{|1.1+2.4+1.5-4|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=d(P_0;\pi)=\frac{|10|}{\sqrt{6}}$$

$$\boxed{d(P_0;\pi)=\frac{5}{3}\sqrt{6}}$$

Geometría Métrica

2. Distancias en el espacio

II) Distancia entre punto y plano



Geometría Métrica

2. Distancias en el espacio

III) Distancia entre planos paralelos

$$Datos:\begin{cases}\pi_1:\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v} \quad \forall\,\lambda\in\mathbb{R}\ \forall\,\mu\in\mathbb{R} \\ \pi_2:\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_2}+\alpha\vec{w}+\beta\vec{t} \quad \forall\,\alpha\in\mathbb{R}\ \forall\,\beta\in\mathbb{R}\end{cases} \quad con:\vec{u}\times\vec{v}\,//\,\vec{w}\times\vec{t}$$

$$\boxed{d(\pi_1;\pi_2)=d(P_2,\pi_1)=d(P_1;\pi_2)}$$

Geometría Métrica

2. Distancias en el espacio

IV) Distancia entre recta paralela a un plano y plano

$$Datos:\begin{cases} r:\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\lambda\vec{u} \quad \forall\,\lambda\in\mathbb{R} \\ \pi:\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_2}+\mu\vec{v}+\alpha\vec{w} \quad \forall\,\mu\in\mathbb{R}\ \forall\,\alpha\in\mathbb{R} \end{cases} \qquad con:\vec{u}\perp(\vec{v}\times\vec{w})$$

$$\boxed{d(r;\pi)=d(P_1,\pi)}$$

Geometría Métrica

2. Distancias en el espacio

V) Distancia entre punto y recta

$$Datos: \begin{cases} P_0(x_0; y_0; z_0) \\ r: \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \lambda \vec{u} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Análogamente a lo hecho en el plano, es necesario hallar el vector $\overline{n}$ así:

$$d(P_0; r) = Proy_n \overrightarrow{P_0 P_1} \Rightarrow d(P_0; r) = \frac{|\overrightarrow{P_0 P_1} . \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

Para hallar $\overline{n}$:

$$\vec{n} = (\overrightarrow{P_0 P_1} \times \vec{u}) \times \vec{u}$$

Luego: $\boxed{d(P_0; r) = \frac{|\overrightarrow{P_0 P_1} . [(\overrightarrow{P_0 P_1} \times \vec{u}) \times \vec{u}]|}{|(\overrightarrow{P_0 P_1} \times \vec{u}) \times \vec{u}|}}$

Geometría Métrica

2. Distancias en el espacio

V) Distancia entre punto y recta (más simple)

$$Datos: \begin{cases} P_0(x_0; y_0; z_0) \\ r: \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \lambda \vec{u} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\boxed{d(P_0; r) = \frac{|\overrightarrow{P_0 P_1} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}}$$

Geometría Métrica

2. Distancias en el espacio

V) Distancia entre punto y recta (más simple)

Ejemplo: $Datos:\begin{cases} P_0(1;-1;2) \\ r:(x;y;z)=(-2;-1;1)+\lambda(5;-3;1) \quad \forall\, \lambda\in\mathbb{R} \end{cases}$

$$d(P_0;r)=\frac{|\overrightarrow{P_0P_1}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}=\frac{|(-3;0;-1)\times(5;-3;1)|}{|(5;-3;1)|}=\frac{|(-3;-2;9)|}{|(5;-3;1)|}$$

$$d(P_0;r)=\frac{\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+9^2}}{\sqrt{5^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{\sqrt{94}}{\sqrt{35}}$$

$$\boxed{d(P_0,r)=\frac{\sqrt{3290}}{35}}$$

Geometría Métrica

2. Distancias en el espacio

VI) Distancia entre rectas alabeadas

$$Datos:\begin{cases} r_1: \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \lambda \vec{u} & \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ r_2: \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} + \mu \vec{v} & \forall \mu \in \mathbb{R} \end{cases} \quad con: r_1\, alabeada\ r_2$$

$$\boxed{d(r_1; r_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1 P_2} . (\vec{u} \times \vec{v})|}{|(\vec{u} \times \vec{v})|}}$$

Ejercicios de la Práctica

Ejercicio 16.2

Calcular la distancia del origen al plano: $\pi: 8x + 4y - z + 18 = 0$

$$\pi: 8x + 4y - z + 18 = 0 \quad con: \vec{n} = (8; 4; -1) \Rightarrow |\vec{n}| = 9$$

$$\pi: \frac{8}{9}x + \frac{4}{9}y - \frac{1}{9}z + 2 = 0$$

$$d(O; \pi) = 2$$

Ejercicios de la Práctica

Ejercicio 16.4

Hallar la distancia entre: $A(1;-1;1)$ y $r:\frac{-x+2}{2}=2y=\frac{z-1}{1}$

$$Con:\ r:\frac{x-2}{(-2)}=\frac{y}{\frac{1}{2}}=\frac{z-1}{1}\ \Rightarrow P_1(2;0;1),\ \vec{u}=(-2;\frac{1}{2};1)$$

$$d(P_0;r)=\frac{|\overrightarrow{AP_1}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}=\frac{|(1;1;0)\times(-2;\frac{1}{2};1)|}{|(-2;\frac{1}{2};1)|}=\frac{|(1;-1;\frac{5}{2})|}{\sqrt{(-2)^2+(\frac{1}{4})^2+1^2}}$$

$$d(P_0;r)=\frac{\sqrt{\frac{33}{4}}}{\sqrt{\frac{21}{4}}}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3.11}}{\frac{1}{2}\sqrt{3.7}}$$

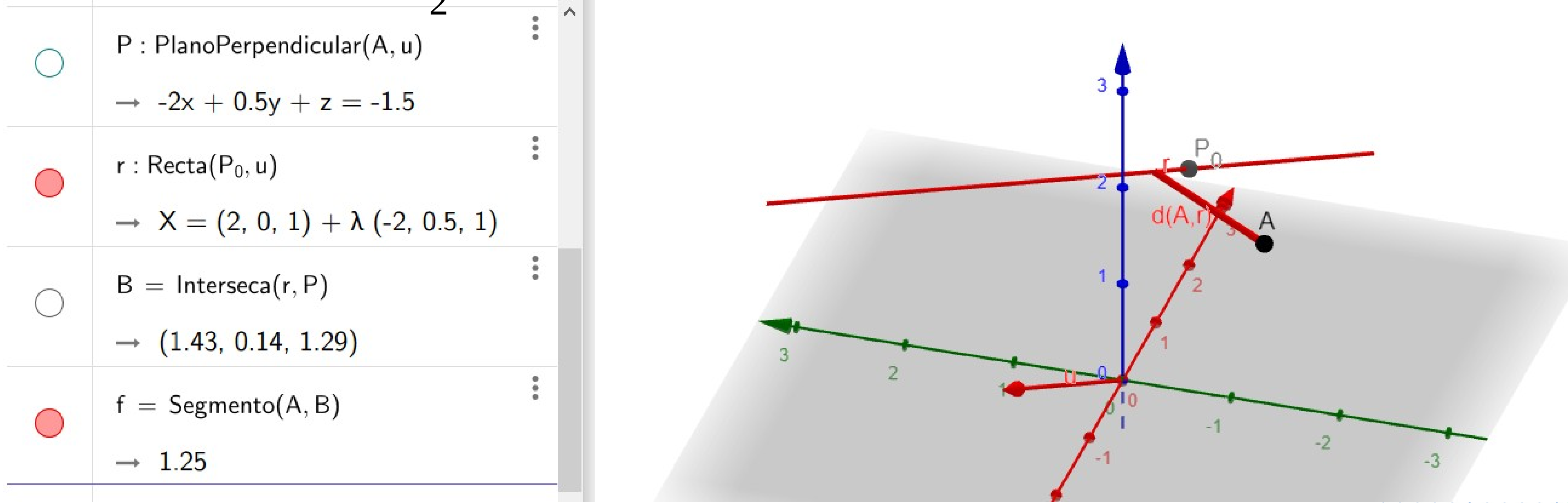
$$d(P_0;r)=\frac{\sqrt{77}}{7}$$

Ejercicios de la Práctica

Ejercicio 16.4

Hallar la distancia entre: $A(1;-1;1)$ y $r:\dfrac{-x+2}{2}=2y=\dfrac{z-1}{1}$

$$Con:\ r:\frac{x-2}{(-2)}=\frac{y}{\frac{1}{2}}=\frac{z-1}{1}\ \Rightarrow P_1(2;0;1),\ \vec{u}=\left(-2;\frac{1}{2};1\right)$$



Ejercicios de la Práctica

Para hacer por los alumnos: el resto del Ejercicio 16 a 18