Álgebra y Geometría Analítica

Clase 07: Planos

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

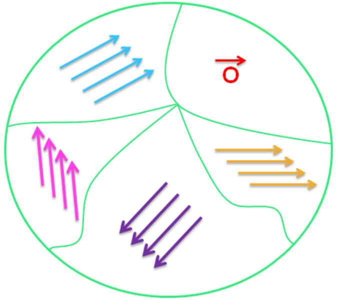
Unidad 1 – Clase 07

Repaso de Clases Anteriores

VECTORES: INTRODUCCION

- ✓ Vectores: Una definición.
  Es un segmento orientado.

- ✓ Vectores Libres



- ✓ Atributos de un vector:
  - Dirección
  - Sentido
  - Módulo

- ✓ Módulo de un vector

$$\vec{a}=\left(a_1;a_2;a_3\right)$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{\left(a_1\right)^2+\left(a_2\right)^2+\left(a_3\right)^2} \quad |\vec{a}|\in\mathbb{R}\geqslant 0$$

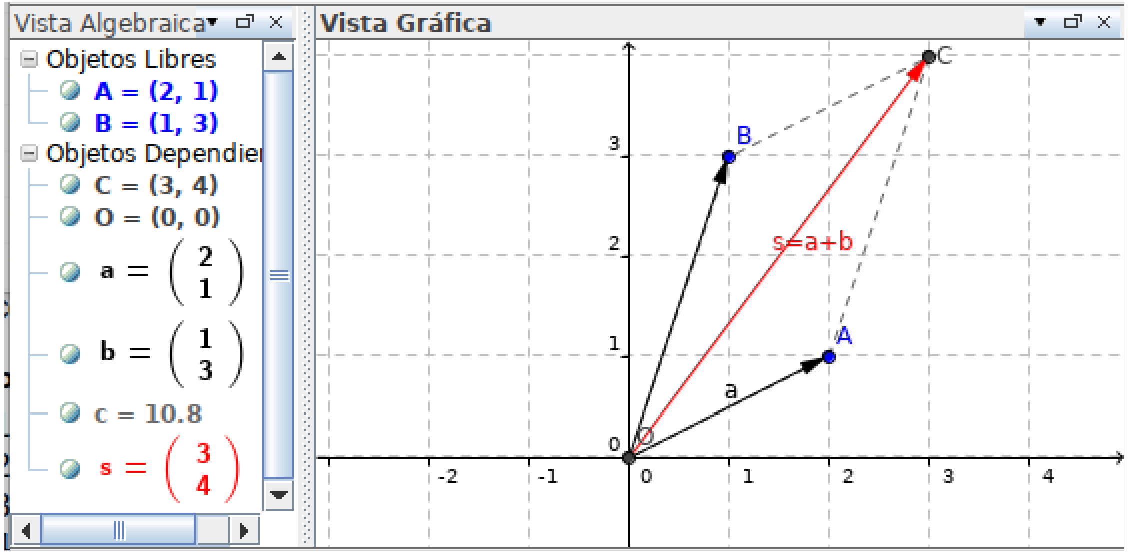
Repaso de Clases Anteriores

OPERACIONES CON VECTORES

I) SUMA DE VECTORES

$$Sean: \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \wedge \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{b} = (b_1; b_2; b_3):$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$$

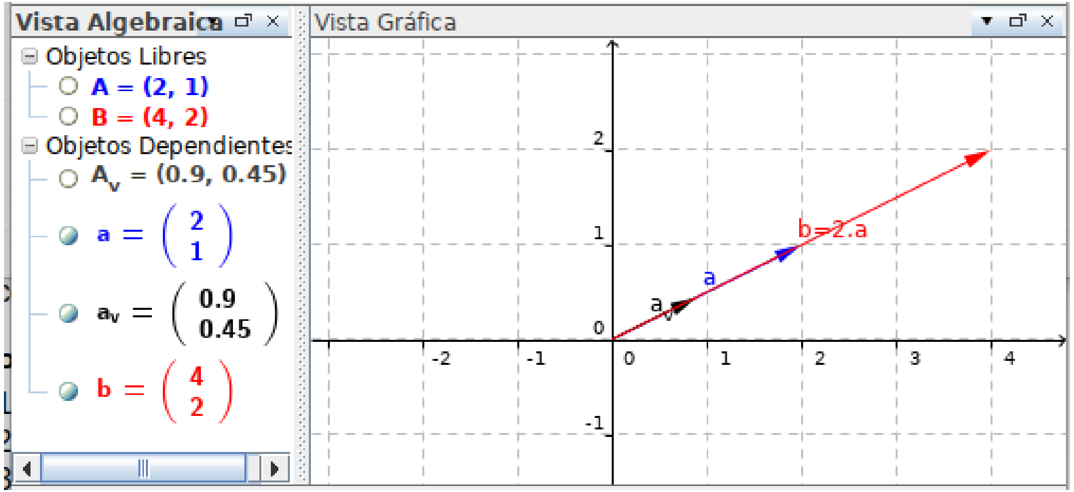


Repaso de Clases Anteriores

OPERACIONES CON VECTORES

II) PRODUCTO DE ESCALAR Y VECTOR

$$Sean: \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge \alpha \in \mathbb{R}:$$
$$\alpha\vec{a} = (\alpha a_1 ; \alpha a_2 ; \alpha a_3)$$



Versores:

$$\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} \ \wedge \ |\hat{a}| = 1$$

Condición de Paralelismo:

$$Sean: \ \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{a} \neq \vec{0} \wedge \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{b} \neq \vec{0}:$$
$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} / \vec{a} = \alpha \vec{b}$$

Repaso de Clases Anteriores

OPERACIONES CON VECTORES

III) Producto Escalar entre Vectores

$$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n \wedge \vec{a}=(a_1;a_2;\ldots;a_n) \wedge \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n \wedge \vec{b}=(b_1;b_2;\ldots;b_n): \vec{a}.\vec{b}=a_1 b_1+a_2 b_2+\ldots+a_n b_n=\sum_{i=1}^{i=n} a_i b_i$$

Es un Escalar

Interpretación Geométrica

$$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{a} \neq \vec{0} \wedge \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{b} \neq \vec{0}: \vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi$$

Angulo entre vectores:

$$\phi=\arccos\left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$$ (es el menor ángulo)

Condición de ortogonalidad:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=0$$

Repaso de Clases Anteriores

OPERACIONES CON VECTORES

IV) Producto Vectorial entre Vectores (Producto Cruz)

Es una operación propia de vectores de R^3

$$Datos:\begin{cases}\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)\\ \vec{b}=(b_1;b_2;b_3)\end{cases}$$

Se obtiene a partir de un pseudo-determinante:

$$\vec{a}\,x\,\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\hat{i}\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}-\hat{j}\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2;-(a_1b_3-a_3b_1);a_1b_2-a_2b_1)$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)\in\mathbb{R}^3$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=Area\ del\ paralelogramo\ que\ tiene\ a\ \vec{a}\ y\ \vec{b}\ por\ lados.$$

Repaso de Clases Anteriores

OPERACIONES CON VECTORES

V) Doble Producto Mixto entre Vectores

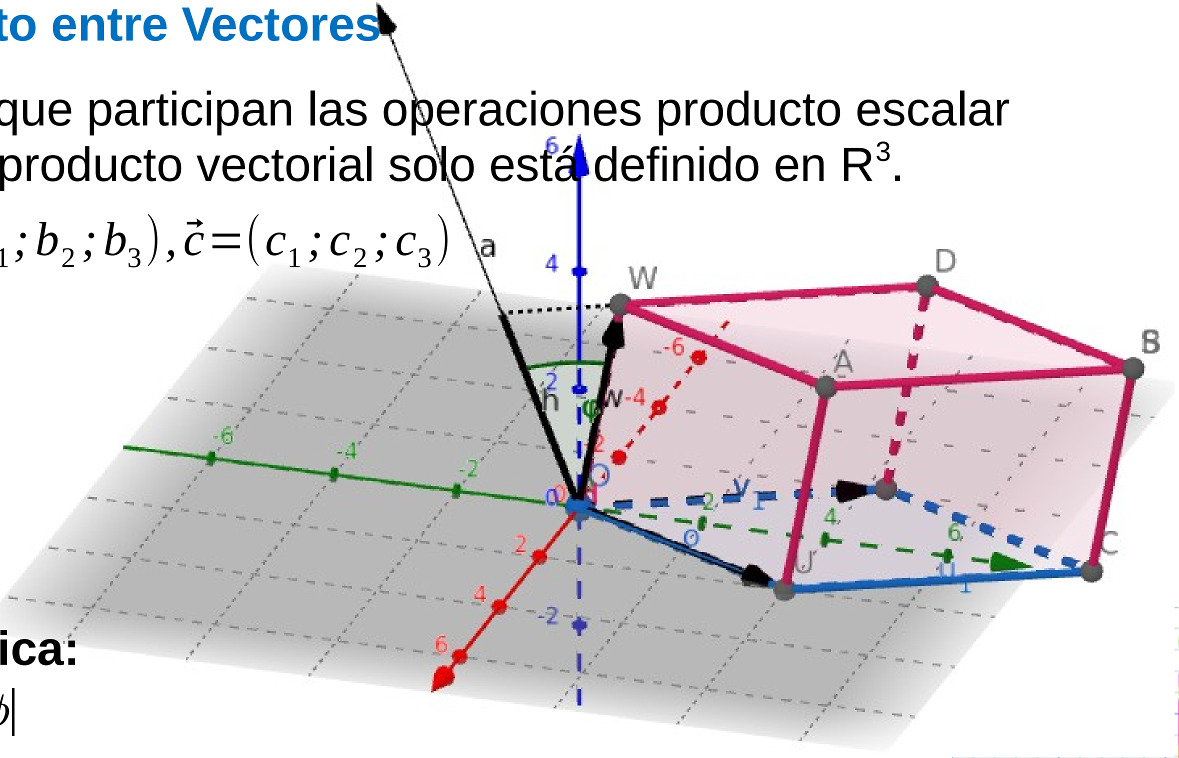
Está definido para R^3 ya que participan las operaciones producto escalar y producto vectorial, y el producto vectorial solo está definido en R^3.

$$Sean: \vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3), \vec{c} = (c_1; c_2; c_3)$$

$$\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}.\vec{c} = (\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$$

Otra forma de Cálculo:

$$(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$



Interpretación Geométrica:

$$|(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})| = |(\vec{u}\times\vec{v})||\vec{w}||\cos\phi|$$

Repaso de Clases Anteriores

OPERACIONES CON VECTORES

VI) Doble Producto Vectorial

Operación válida para R^3.

$$\vec{a}=(a_1;a_2;a_3),\vec{b}=(b_1;b_2;b_3),\vec{c}=(c_1;c_2;c_3)$$

$$(\vec{a}\,x\,\vec{b})\,x\,\vec{c}\;es\ un\ vector\ en\ el\ plano\ formado\ por:\vec{a}\ y\,\vec{b}$$

$$\vec{a}\,x\,(\vec{b}\,x\,\vec{c})\,es\ un\ vector\ en\ el\ plano\ formado\ por:\vec{b}\ y\,\vec{c}$$

Cálculo:

$$(\vec{a}\,x\,\vec{b})\,x\,\vec{c}=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}.\vec{c})\vec{a}$$

$$\vec{a}\,x\,(\vec{b}\,x\,\vec{c})=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$$

Repaso de Clases Anteriores

Resumen

Condiciones interesantes

$$\forall \vec{a} \neq \vec{0} \wedge \forall \vec{b} \neq \vec{0} \wedge \forall \vec{c} \neq \vec{0}$$

Condiciones de Paralelismo

$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} / \vec{a} = \alpha \vec{b}$$

$$Solo\ en\ R^3 : \vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

Condición de ortogonalidad

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} . \vec{b} = 0$$

Condición de coplanaridad

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\ son\ coplanares \Leftrightarrow (\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}) = 0$$

Cálculos de interés geométrico

Versor asociado a un vector

$$\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \ \wedge\ |\hat{a}| = 1$$

El ángulo entre dos vectores

$$\phi = \arccos\left(\frac{\vec{a} . \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \right)$$

El área del paralelogramo

$$|\vec{a} \times \vec{b}| : Area\ del\ paralelogramo$$

El volumen del paralelepípedo

$$|(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})| : Volumen\ del\ paralelepípedo$$

Repaso de Clases Anteriores

Ecuaciones de rectas para R^2 y R^3

Datos: $P_0(x_0; y_0; z_0) \wedge P_0 \in r, \vec{u} = (u_1; u_2; u_3) \wedge \vec{u} // r$

I) Ecuación Vectorial Paramétrica (EVP)

$$r:(x; y; z) = (x_0; y_0; z_0) + \lambda(u_1; u_2; u_3) \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R})$$

II) Ecuación Cartesiano Paramétricas (ECP)

$$r: \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

III) Ecuaciones Simétricas (ES)

$$r: \frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}$$

Repaso de Clases Anteriores

Ecuaciones de rectas para R^2 y R^3

Datos: $P_0(x_0;y_0;z_0)\wedge P_0\in r\,,\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)\wedge\vec{u}\,//\,r$

IV) Ecuaciones Reducidas (ER)

$$r:\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{u_1}=\dfrac{z-z_0}{u_3}\\[2ex]\dfrac{y-y_0}{u_2}=\dfrac{z-z_0}{u_3}\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}x-x_0=\dfrac{u_1}{u_3}z-\dfrac{u_1}{u_3}z_0\\[2ex]y-y_0=\dfrac{u_2}{u_3}z-\dfrac{u_2}{u_3}z_0\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}x=\underbrace{\dfrac{u_1}{u_3}}_{m}z\underbrace{-\dfrac{u_1}{u_3}z_0+x_0}_{p}\\[2ex]y=\underbrace{\dfrac{u_2}{u_3}}_{n}z\underbrace{-\dfrac{u_2}{u_3}z_0+y_0}_{q}\end{cases}$$

$$r:\begin{cases}x=mz+p\\y=nz+q\end{cases}$$

$p_1(p;q;0),\vec{v}=(m;n;1)$

Nota: En estas ecuaciones, se pierde de vista las coordenadas del punto y componentes del vector

Ejemplo:

$$t:\begin{cases}x=-3y+5\\z=2y+1\end{cases}\Rightarrow P_0(5;0;1),\vec{v}=(-3;1;2)$$

Repaso de Clases Anteriores

Ecuaciones de rectas para R^2 y R^3

Datos: $P_1(x_1;y_1;z_1)\wedge P_1\in r_1,\ \vec{u}=(u_1;u_2;u_3)\wedge\vec{u}//r_1$

$P_2(x_2;y_2;z_2)\wedge P_2\in r_2,\ \vec{v}=(v_1;v_2;v_3)\wedge\vec{v}//r_2$

Posiciones relativas entre rectas:

Paralelas:

$$r_1//r_2\Leftrightarrow\vec{u}//\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}=\alpha\,\vec{v}$$

$$En\ R^3:\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$$

Coincidentes:

$$r_1\equiv r_2\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{u}//\vec{v}\\ P_2\in r_1\vee P_1\in r_2\end{cases}$$

Perpendiculares:

$$r_1\perp r_2\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0$$

Incidentes:

$$r_1\angle r_2\Leftrightarrow r_1\cap r_2\neq\emptyset\Rightarrow\begin{cases}r_1\not\parallel r_2\\ (\overrightarrow{P_1P_2};\vec{u};\vec{v})=0\end{cases}$$

Alabeadas:

$$r_1\ y\ r_2\ son\ alabeadas\begin{cases}r_1\cap r_2=\emptyset\\ r_1\not\parallel r_2\\ (\overrightarrow{P_1P_2};\vec{u};\vec{v})\neq 0\end{cases}$$

Repaso de Clases Anteriores

Ecuaciones de rectas para R^2

I) Ecuación Explícita: Recta que pasa por dos puntos

$$Datos: P_0(x_0;y_0),\ P_0 \in r,\ P_1(x_1;y_1),\ P_1 \in r,\ P_0 \neq P_1$$

$$r: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow r: x\begin{vmatrix} y_0 & 1 \\ y_1 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x(y_0 - y_1) - y(x_0 - x_1) + (x_0 . y_1 - x_1 y_0) = 0$$

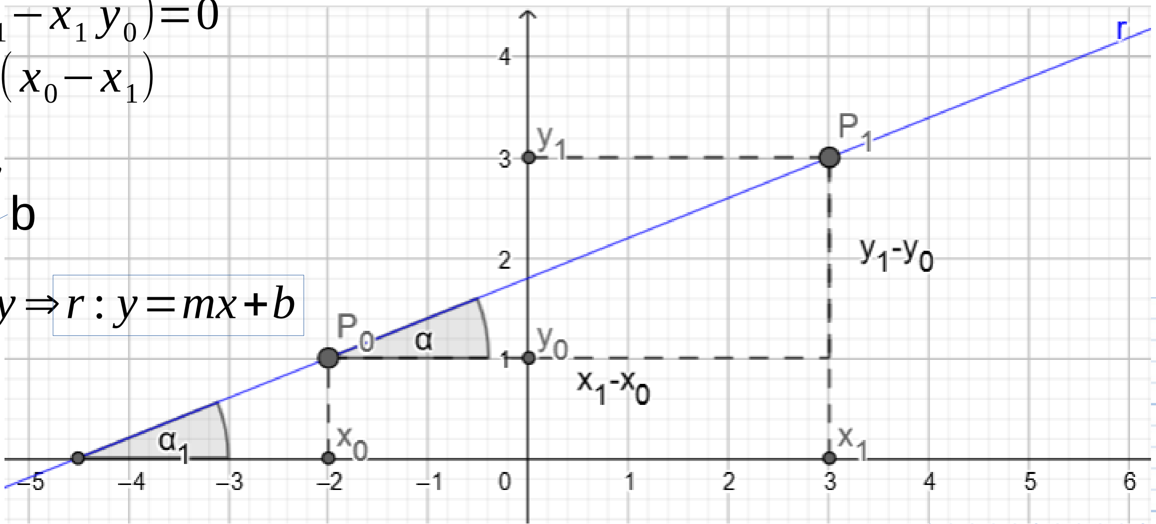
$$x(y_0 - y_1) + (x_0 . y_1 - x_1 y_0) = y(x_0 - x_1)$$

$$\frac{x(y_0 - y_1) + (x_0 . y_1 - x_1 y_0)}{(x_0 - x_1)} = y$$

m b

$$x\boxed{\frac{(y_0 - y_1)}{(x_0 - x_1)}} + \boxed{\frac{(x_0 . y_1 - x_1 y_0)}{(x_0 - x_1)}} = y \Rightarrow \boxed{r: y = mx + b}$$

$$con\ m = tg\,\alpha = \frac{(y_0 - y_1)}{(x_0 - x_1)}$$



Repaso de Clases Anteriores

Ecuaciones de rectas para R^2

II) Ecuación General Implícita

$$Datos:\ P_0(x_0;y_0),\ P_0 \in r,\ \vec{n} / \vec{n} \perp r, \vec{n}=(A;B)$$

$$\overrightarrow{P_0P}=(x-x_0;y-y_0)$$

$$como\ \vec{n} \perp \overrightarrow{P_0P} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{P_0P}=0$$

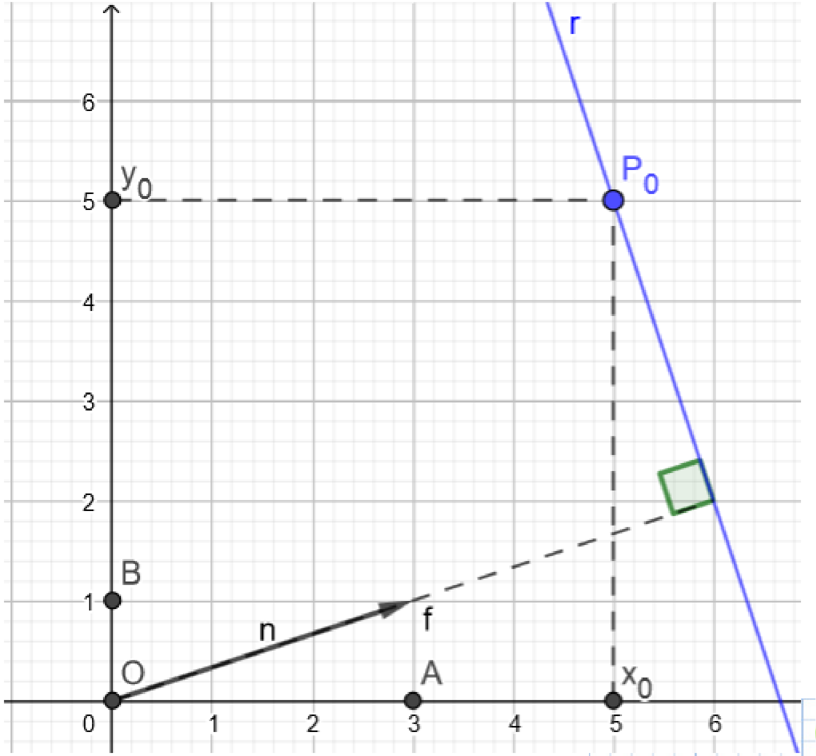
$$(A;B).(x-x_0;y-y_0)=0$$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$$

$$Ax-Ax_0+By-By_0=0$$

$$Ax+By-Ax_0-By_0=0$$

$$\boxed{Ax+By+C=0}$$



Repaso de Clases Anteriores

Ecuaciones de rectas para R^2

II) Ecuación General Implícita

Ejemplo:

Sea la recta r con ecuación $r: 3x-2y+6=0$

Hallar un vector normal, su módulo, un vector director y un punto de la recta

- Vector normal:

$\vec{n}=(3,-2), |\vec{n}|=\sqrt{(3)^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$

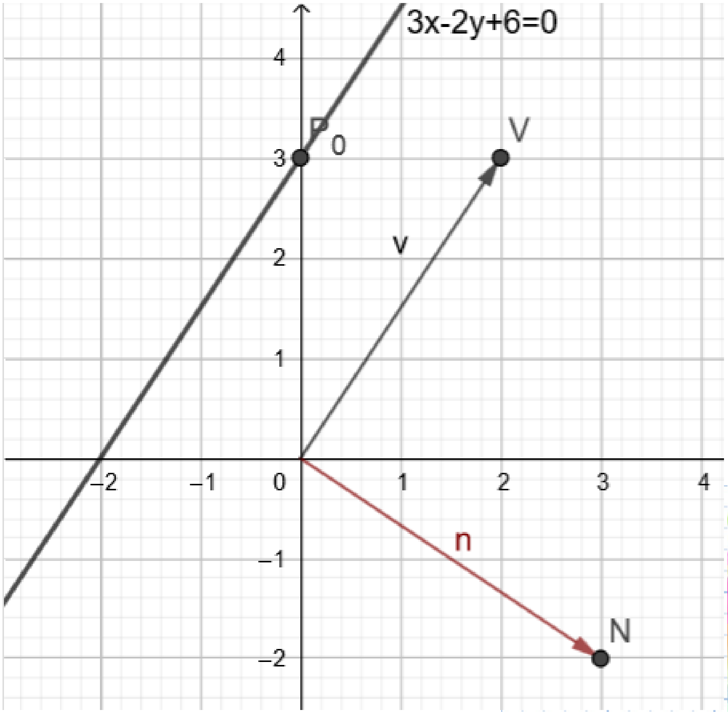
- Vector director:

$\vec{u}=(2;3)$

- Un punto:

Para obtener un punto, basta con elegir un valor de ‘x’ y calcular el respectivo ‘y’

$P_0(0;3)$



Repaso de Clases Anteriores

Ecuaciones de rectas para R²

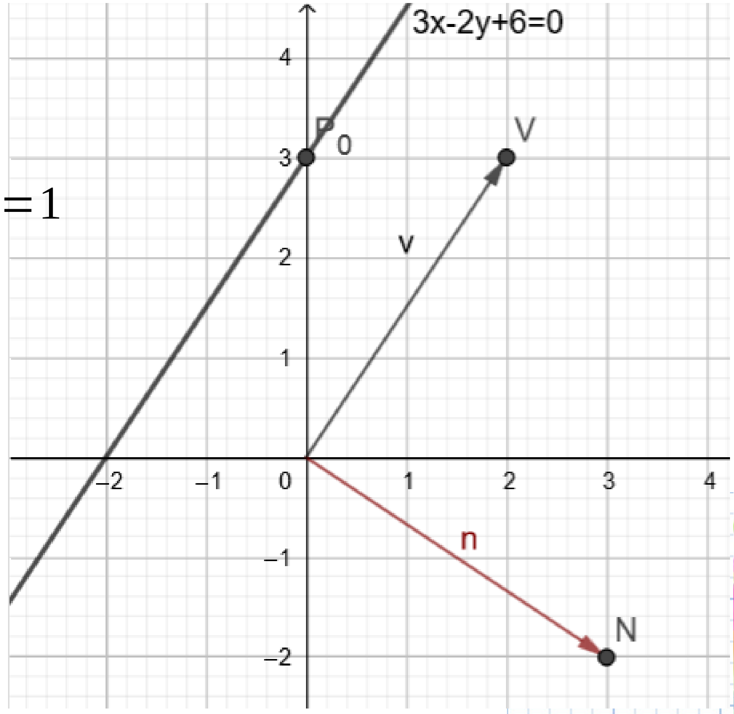
III) Ecuación Normal o Hessiana

A partir del ejemplo anterior:

$$r: 3x-2y+6=0 \text{ con } |\vec{n}|=\sqrt{13}$$

$$\frac{1}{\sqrt{13}}(3x-2y+6)=0$$

$$\boxed{\frac{3}{\sqrt{13}}x-\frac{2}{\sqrt{13}}y+\frac{6}{\sqrt{13}}=0} \quad con\ \hat{n}=\left(\frac{3}{\sqrt{13}};\frac{-2}{\sqrt{13}}\right)\wedge|\hat{n}|=1$$



En general:

$$Ax+By+C=0$$

$$\frac{1}{|\vec{n}|}(Ax+By+C)=\frac{1}{|\vec{n}|}0$$

$$\boxed{\frac{A}{|\vec{n}|}x+\frac{B}{|\vec{n}|}y+\frac{C}{|\vec{n}|}=0} \qquad con\ \hat{n}=\left(\frac{A}{|\vec{n}|};\frac{B}{|\vec{n}|}\right)$$

Repaso de Clases Anteriores

Ecuaciones de rectas para R^2

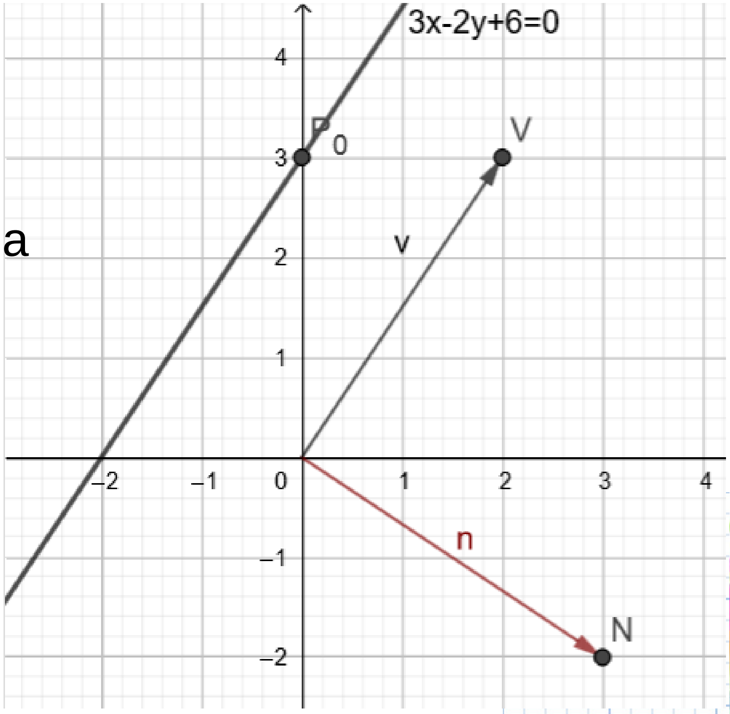
III) Ecuación Normal o Hessiana

$$como\ \frac{A}{|\vec{n}|}\ y\ \frac{B}{|\vec{n}|}\ son\ cosenos\ directores:$$

$$\cos(\alpha_1)x+\cos(\alpha_2)y+\frac{C}{|\vec{n}|}=0$$

Observación:
El número (|C/|$\bar{n}$||) corresponde con la distancia
Entre el origen y la recta.

$$\boxed{d(O;r)=\left|\frac{C}{|\vec{n}|}\right|}$$



Repaso de Clases Anteriores

Ecuaciones de rectas para R^2

IV) Ecuación Segmentaria

Ejemplo:

Hallar la ecuación segmentaria de la recta:

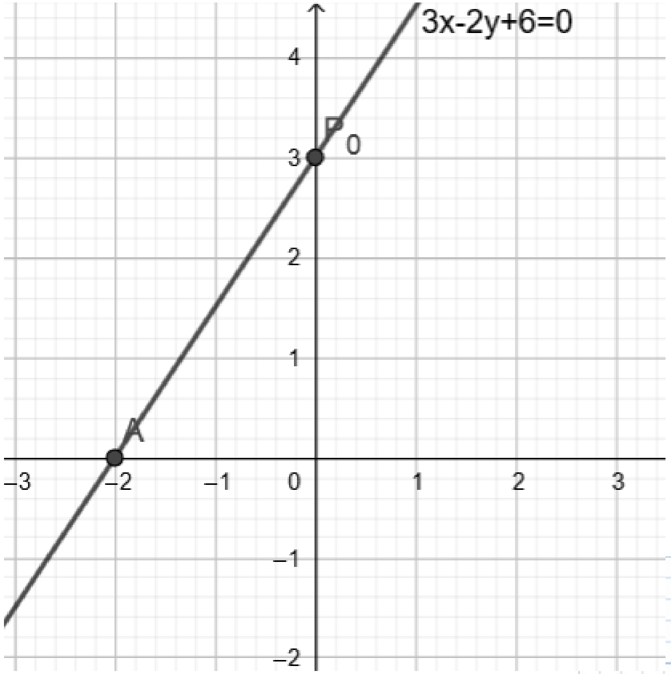
$r: 3x - 2y + 6 = 0$

$$3x - 2y + 6 = 0$$

$$3x - 2y = -6$$

$$\frac{3}{-6}x + \frac{-2}{-6}y = \frac{-6}{-6}$$

$$\boxed{r: \frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1}$$

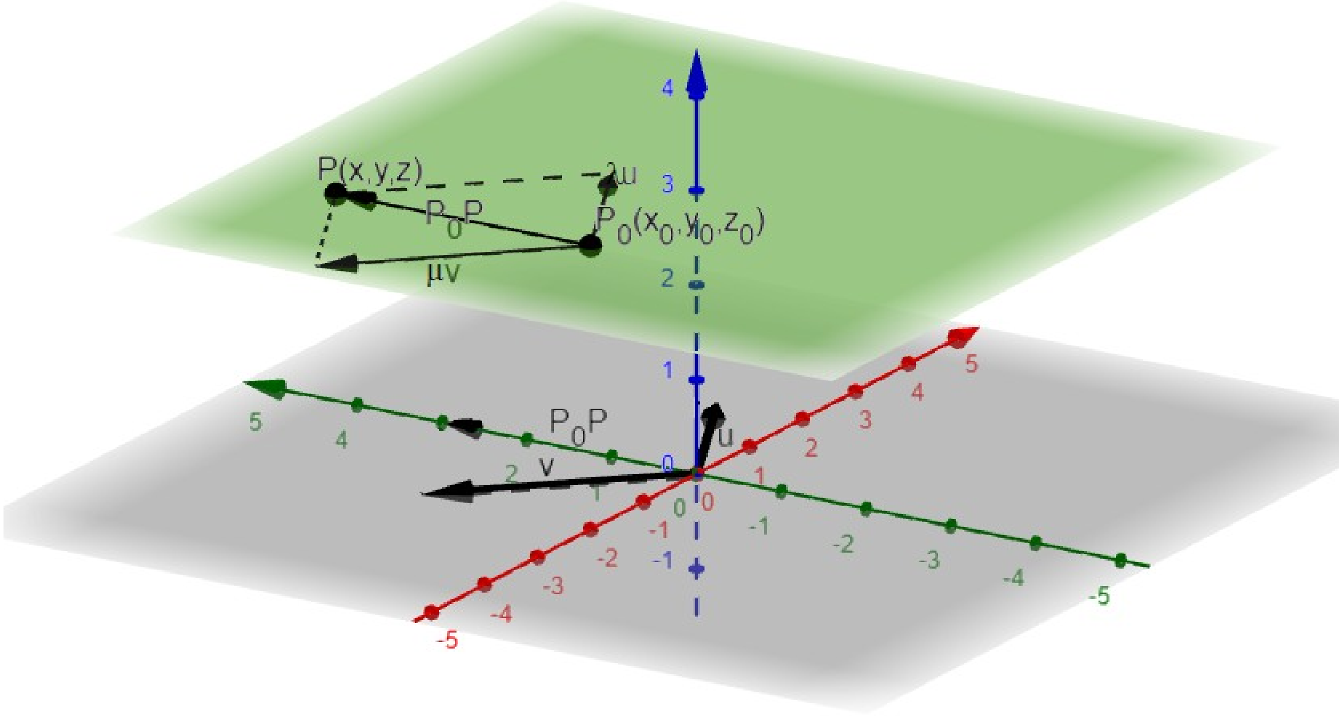


Ecuaciones de Planos

I) Ecuación Vectorial Paramétrica (EVP)

$Datos:\ P_0(x_0;y_0;z_0)\wedge P_0\in\pi,\ \vec{u}=(u_1;u_2;u_3)\wedge\vec{u}\,//\,\pi,\ \vec{v}=(v_1;v_2;v_3)\wedge\vec{v}\,//\,\pi\wedge\vec{u}\not\parallel\vec{v}$

$\overrightarrow{P_0P}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$



Ecuaciones de Planos

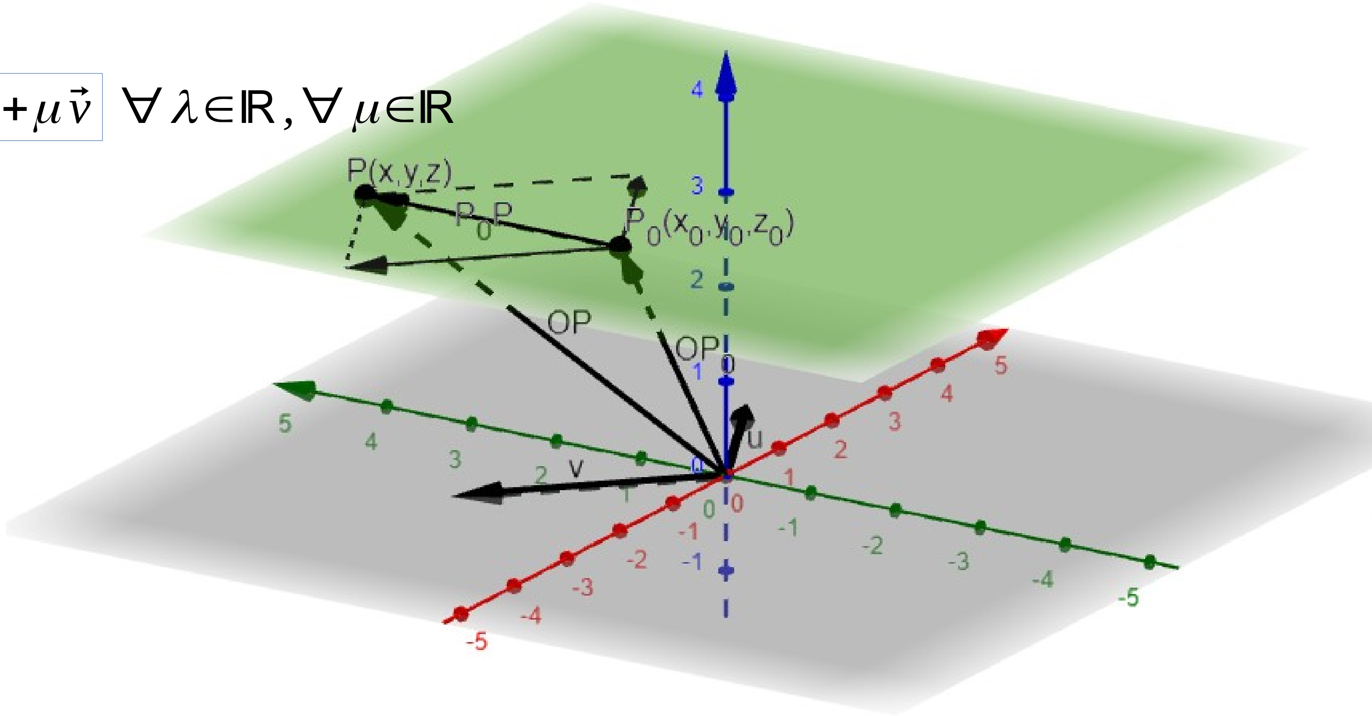
I) Ecuación Vectorial Paramétrica (EVP)

$$Datos:\ P_0(x_0;y_0;z_0)\wedge P_0\in\pi,\ \vec{u}=(u_1;u_2;u_3)\wedge\vec{u}\,//\,\pi,\ \vec{v}=(v_1;v_2;v_3)\wedge\vec{v}\,//\,\pi\wedge\vec{u}\not\parallel\vec{v}$$

$$\overrightarrow{P_0P}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$$

$Luego:$

$$\boxed{\pi:\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_0}+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}}\quad\forall\lambda\in\mathbb{R},\forall\mu\in\mathbb{R}$$



Ecuaciones de Planos

I) Ecuación Vectorial Paramétrica (EVP)

Ejemplo:

Dados: $P_0(1 ; -2 ; 3)$, $\overline{u}=(1 ; 1 ; 2)$, $\overline{v}=(-2 ; 5 ; 1)$

a) Escribir la ecuación vectorial paramétrica del plano π.

b) Encontrar al menos 5 puntos que pertenezcan al plano pero no coincidan con P_0.

c) Determinar si π corta el eje y.

d) Buscar la intersección entre el plano π y el plano coordenado xz.

Ecuaciones de Planos

I) Ecuación Vectorial Paramétrica (EVP)

Ejemplo:

Dados: $P_0(1 ; -2 ; 3)$, $\overline{u}=(1 ; 1 ; 2)$, $\overline{v}=(-2 ; 5 ; 1)$

a) Escribir la ecuación vectorial paramétrica del plano π.

b) Encontrar al menos 5 puntos que pertenezcan al plano pero no coincidan con P_0.

c) Determinar si π corta el eje y.

d) Buscar la intersección entre el plano π y el plano coordenado xz.

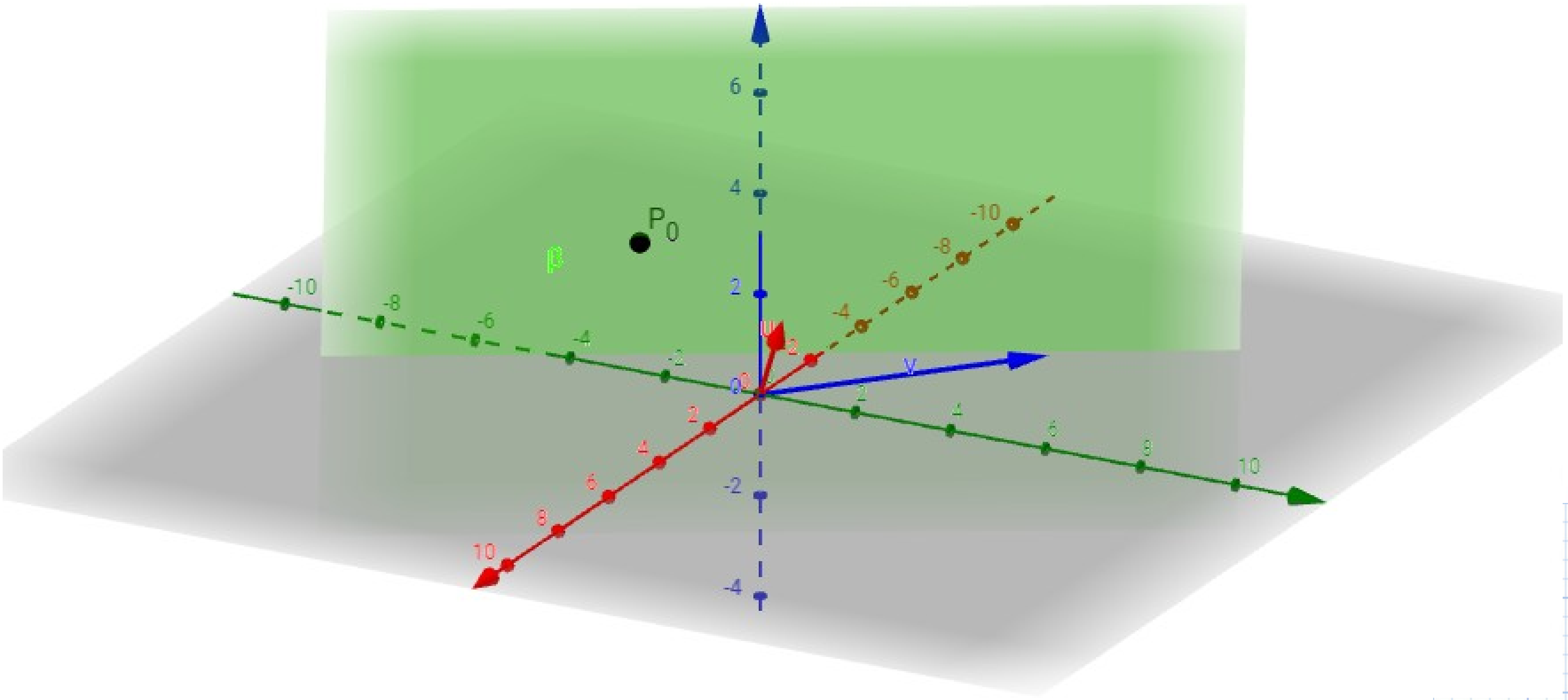
a) Escribir la ecuación vectorial paramétrica del plano π.

$$\pi : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

$$\boxed{\pi : (x ; y ; x) = (1 ; -2 ; 3) + \lambda (1 ; 1 ; 2) + \mu (-2 ; 5 ; 1)} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \forall \mu \in \mathbb{R}$$

Ecuaciones de Planos

I) Ecuación Vectorial Paramétrica (EVP)



Ecuaciones de Planos

I) Ecuación Vectorial Paramétrica (EVP)

Ejemplo (cont):

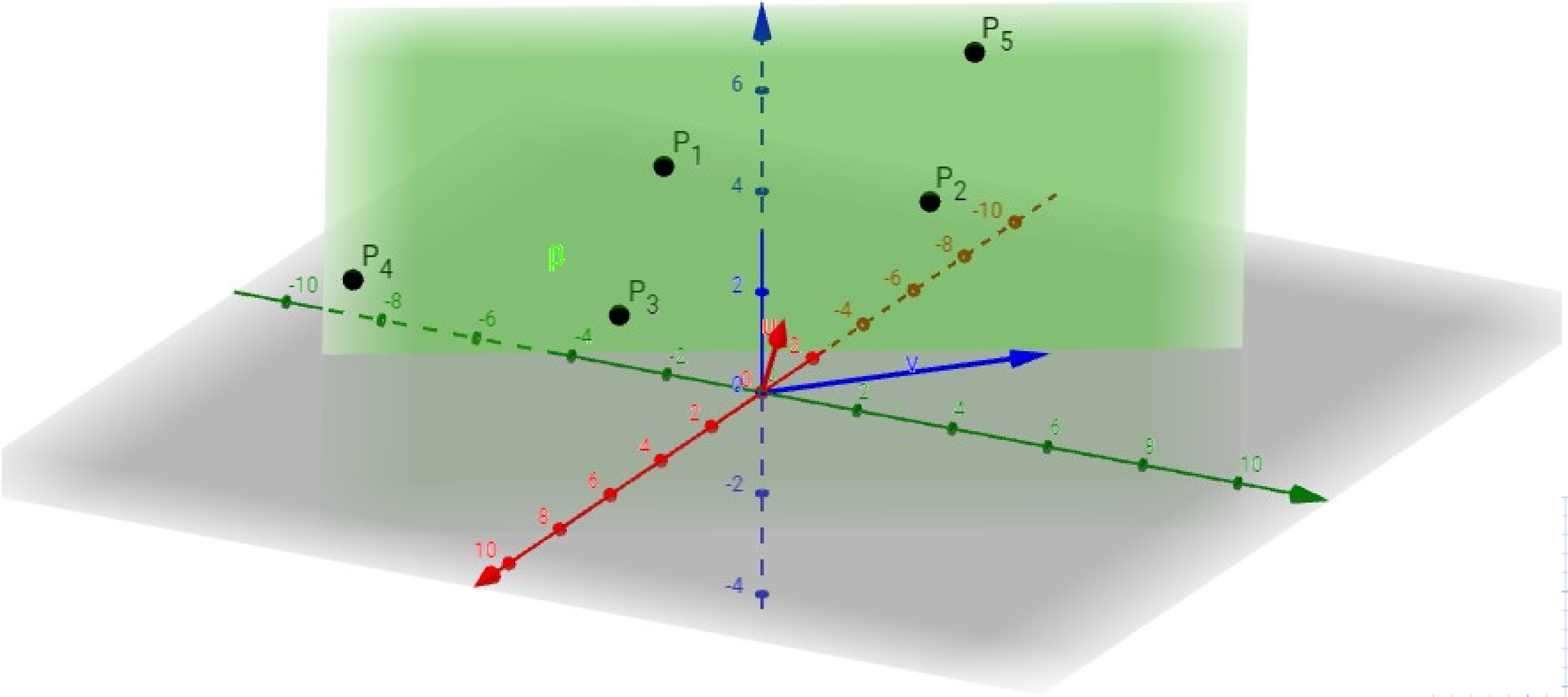
Dados: $P_0(1\ ;\ -2\ ;\ 3)$, $\overline{u}=(1\ ;\ 1\ ;\ 2)$, $\overline{v}=(-2\ ;\ 5\ ;\ 1)$

b) Encontrar al menos 5 puntos que pertenezcan al plano pero no coincidan con P_0. $Con\ \pi:(x;y;x)=(1;-2;3)+\lambda(1;1;2)+\mu(-2;5;1)\quad \forall\lambda\in\mathbb{R}\ \forall\mu\in\mathbb{R}$

λ	μ	$\overline{OPi}$	Pi
1	0	$\overline{OP_1} = (2\ ;\ -1\ ;\ 5)$	$P_1\ (2\ ;\ -1\ ;\ 5)$
0	1	$\overline{OP_2} = (-1\ ;\ 3\ ;\ 4)$	$P_2\ (-1\ ;\ 3\ ;\ 4)$
-1	0	$\overline{OP_3} = (0\ ;\ -3\ ;\ 1)$	$P_3\ (0\ ;\ -3\ ;\ 1)$
0	-1	$\overline{OP_4} = (3\ ;\ -7\ ;\ 2)$	$P_4\ (3\ ;\ -7\ ;\ 2)$
2	1	$\overline{OP_5} = (1\ ;\ 5\ ;\ 8)$	$P_5\ (1\ ;\ 5\ ;\ 8)$

Ecuaciones de Planos

I) Ecuación Vectorial Paramétrica (EVP)



Ecuaciones de Planos

I) Ecuación Vectorial Paramétrica (EVP)

Ejemplo (cont):

Dados: $P_0(1 ; -2 ; 3)$, $\overline{u}=(1 ; 1 ; 2)$, $\overline{v}=(-2 ; 5 ; 1)$

c) Determinar si π corta el eje y.

La forma de los puntos del eje y es: (0 ; y ; 0)

$$\pi:(x;y;x)=(1;-2;3)+\lambda(1;1;2)+\mu(-2;5;1) \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}\,\forall\mu\in\mathbb{R}$$

$$\pi:(x;y;x)=(1+\lambda-2\mu;-2+\lambda+5\mu;3+2\lambda+\mu)$$

$$\pi:\begin{cases} x=1+\lambda-2\mu & (1)\\ y=-2+\lambda+5\mu & (2)\\ z=3+2\lambda+\mu & (3)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=1+\lambda-2\mu \\ 0=3+2\lambda+\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda-2\mu=-1 & (4)\\ 2\lambda+\mu=-3 & (5)\end{cases}$$

$$\textit{Haciendo } 2ec(4)-ec(5):\ 0-5\mu=1\Rightarrow\mu=\frac{-1}{5}$$

$$\textit{Reemplazando en } ec(4):\ \lambda-2\left(\frac{-1}{5}\right)=-1\Rightarrow\lambda=\frac{-2}{5}-1\Rightarrow\lambda=\frac{-7}{5}$$

Ecuaciones de Planos

I) Ecuación Vectorial Paramétrica (EVP)

Ejemplo (cont):

Para verificar: reemplazo los valores obtenidos.

$$de\ ec(1): x = 1 + \frac{-7}{5} - 2\left(\frac{-1}{5}\right) = 0 \quad verifica$$

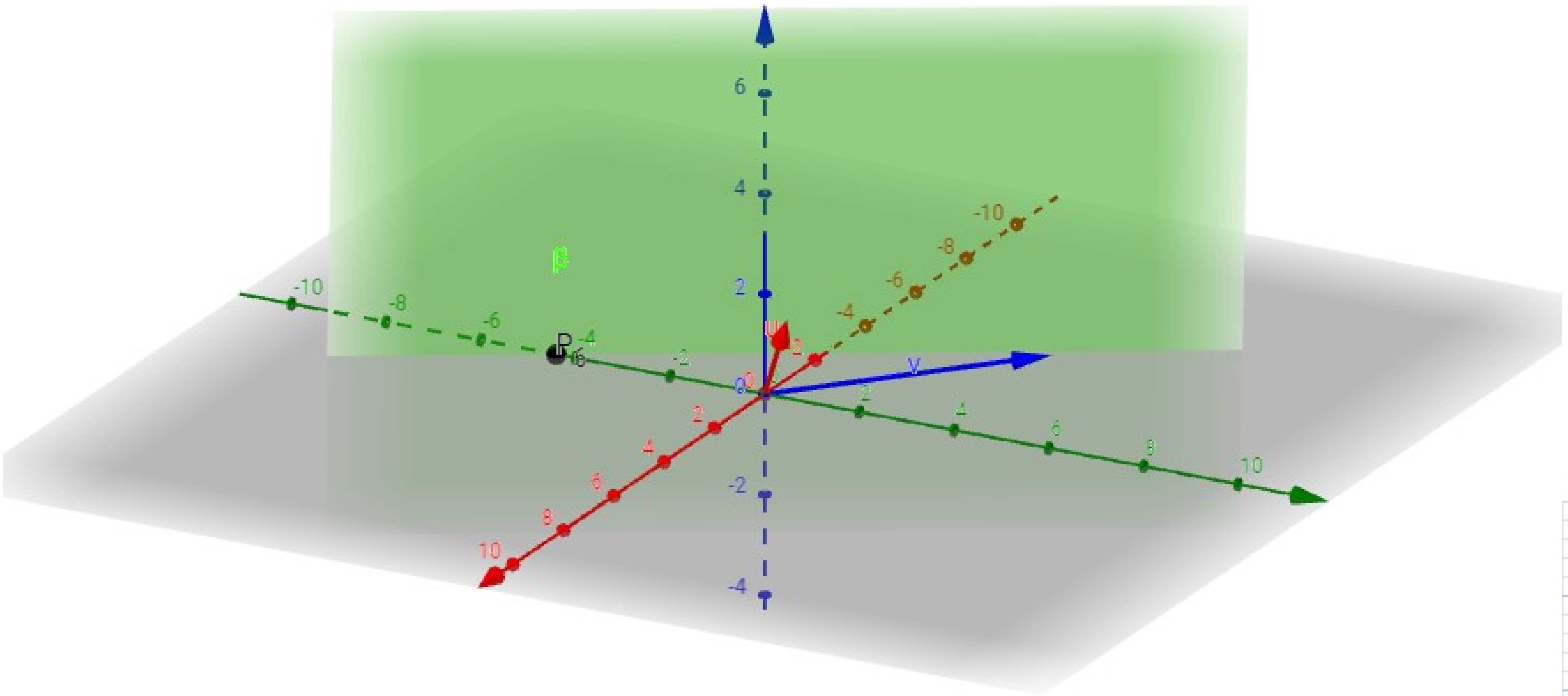
$$de\ ec(2): y = -2 + \frac{-7}{5} + 5\left(\frac{-1}{5}\right) = \frac{-22}{5}$$

$$de\ ec(3): z = 3 + 2\left(\frac{-7}{5}\right) + \left(\frac{-1}{5}\right) = 0 \quad verifica$$

$$Finalmente:\ \pi \cap eje\ y = \left\{P_6\left(0\,;\frac{-22}{5}\,;0\right)\right\}$$

Ecuaciones de Planos

I) Ecuación Vectorial Paramétrica (EVP)



Ecuaciones de Planos

I) Ecuación Vectorial Paramétrica (EVP)

Ejemplo (cont):

d) Buscar la intersección entre el plano π y el plano coordenado xz.

$\pi \cap Pl(xz):$

La forma de los puntos del plano coordenado xz es: (x ; 0 ; z)

Luego:

$0=-2+\lambda+5\mu \Rightarrow \lambda=2-5\mu$

Reemplazando λ en las ecuaciones del plano:

$$\begin{aligned} &en\ ec\ (1): x=1+(2-5\mu)-2\mu \\ &en\ ec\ (2): y=-2+(2-5\mu)+5\mu \\ &en\ ec\ (3): z=3+(4-10\mu)+\mu \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x=3-7\mu \\ y=0 \\ z=7-9\mu \end{cases}$$

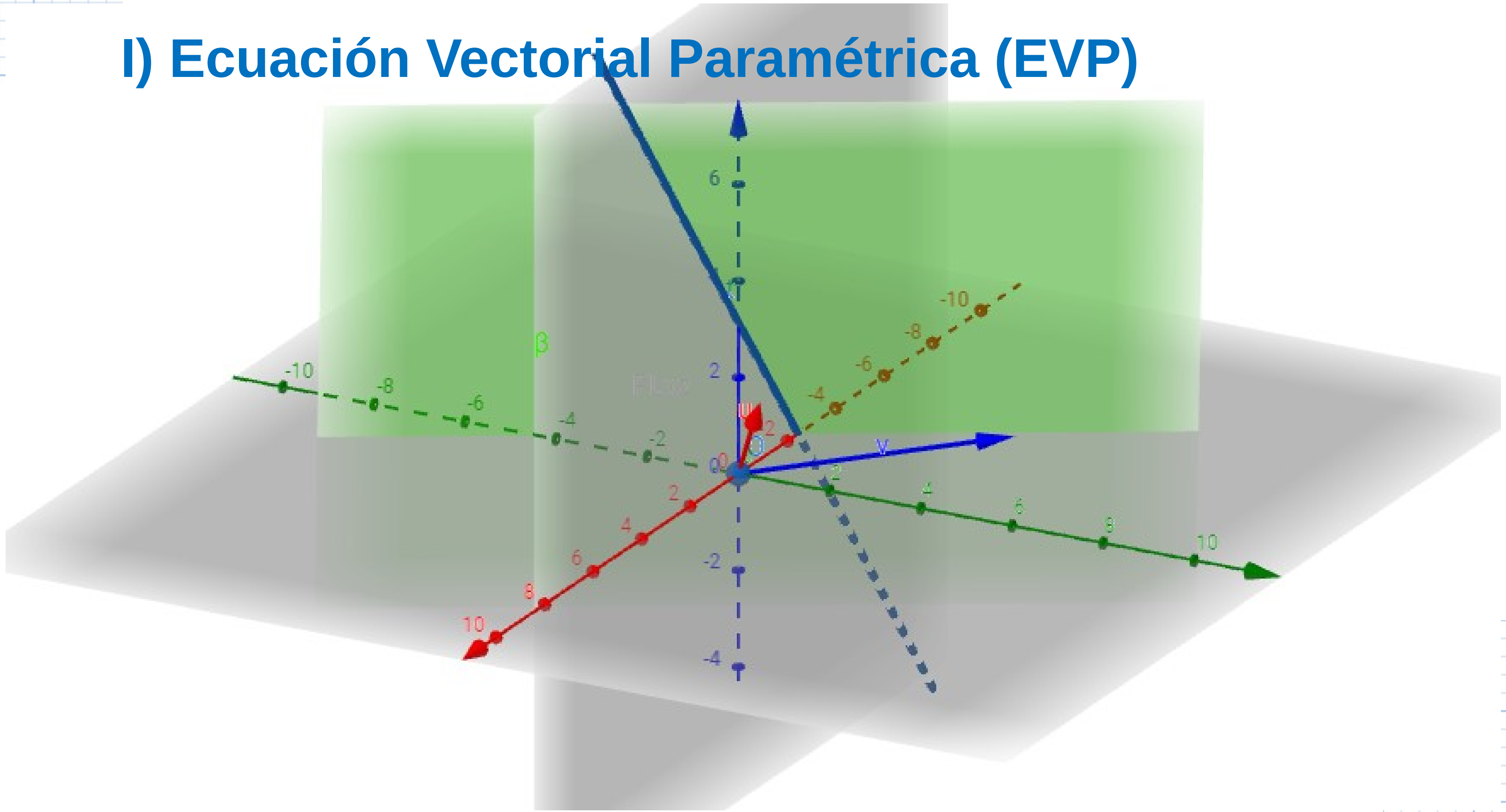
Finalmente:

$$\pi \cap Pl(xz)=\{\boxed{r:(x;y;z)=(3;0;7)+\mu(-7;0;-9)} \quad \forall \mu \in \mathbb{R}\}$$

$r: es\ una\ recta\ con: P_0(3;0;7), \vec{u}=(-7;0;-9)$

Ecuaciones de Planos

I) Ecuación Vectorial Paramétrica (EVP)



Ecuaciones de Planos

II) Ecuación Cartesiano Paramétricas (ECP)

$$\pi : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

$$\pi : (x\,;y\,;x) = (x_0\,;y_0\,;z_0) + \lambda (u_1\,;u_2\,;u_3) + \mu (v_1\,;v_2\,;v_3)$$

$$\boxed{\pi : \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R}$$

Ecuación Cartesiano Paramétricas

Ecuaciones de Planos

II) Ecuación Cartesiano Paramétricas (ECP)

$$\pi : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

$$\pi : (x\,;\,y\,;\,x) = (x_0\,;\,y_0\,;\,z_0) + \lambda (u_1\,;u_2\,;u_3) + \mu (v_1\,;v_2\,;v_3)$$

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R}$$

P_0 $\quad$ $\vec{u}$ $\quad$ $\vec{v}$

Ecuaciones de Planos

III) Ecuación General Implícita (EGI)

Datos: $P_0(x_0;y_0;z_0), P_0 \in \pi, \vec{n}=(A;B;C) \, con \, \vec{n} \perp \pi$

$$\pi : \vec{n} . \overrightarrow{P_0 P} = 0$$

$$(A;B;C).(x-x_0;y-y_0;z-z_0)=0$$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$Ax+By+cZ-Ax_0-By_0-Cz_0=0$$

$$\boxed{\pi : Ax+By+Cz+D=0}$$

Ecuación General Implícita

Ecuaciones de Planos

IV) Ecuación Normal o Hessiana

Partimos de EGI:

$$\pi : Ax+By+Cz+D=0$$

$$\vec{n}=(A;B;C)\Rightarrow|\vec{n}|=\sqrt{A^2+B^2+C^2} \quad Con\ |\vec{n}|>0$$

$$\frac{1}{|\vec{n}|}(Ax+By+Cz+D)=\frac{1}{|\vec{n}|}0$$

$$\boxed{\pi : \frac{A}{|\vec{n}|}x+\frac{B}{|\vec{n}|}y+\frac{C}{|\vec{n}|}z+\frac{D}{|\vec{n}|}=0}$$ *Ecuación Normal o Hessiana*

$$Con : \hat{n}=\left(\frac{A}{|\vec{n}|};\frac{B}{|\vec{n}|};\frac{C}{|\vec{n}|}\right) \quad \wedge \quad dist(O,\pi)=\left|\frac{D}{|\vec{n}|}\right|$$

Ecuaciones de Planos

IV) Ecuación Normal o Hessiana

Ejemplo:

$Sea\ \pi: x+2y+2z-6=0$, *presentar el versor normal asociado y hallar la distancia entre el origen y el plano.*

$$\vec{n}=(1;2;2) \Rightarrow |\vec{n}|=\sqrt{1^2+2^2+2^2} \Rightarrow |\vec{n}|=3$$

$$\frac{1}{3}(x+2y+2z-6)=0$$

$$\boxed{\pi: \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-2=0}$$

Ecuación Normal o Hessiana

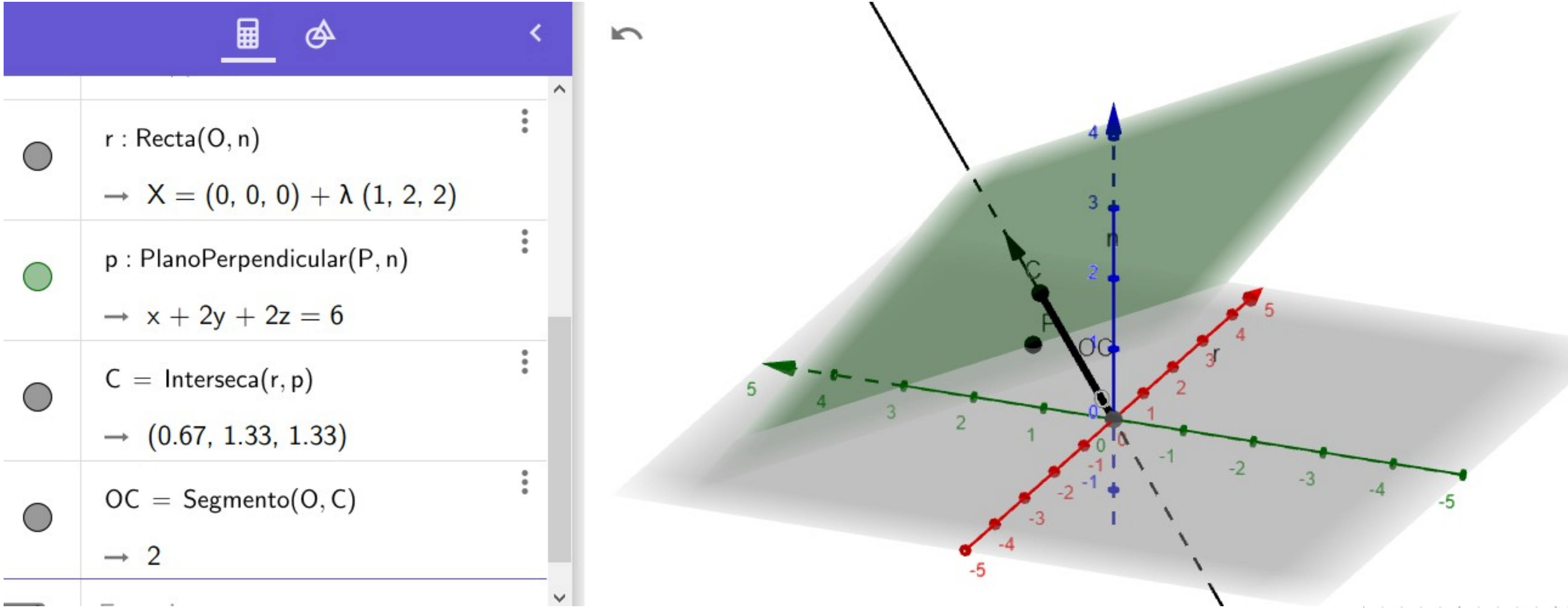
$$Con: \hat{n}=\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right) \quad \wedge \quad dist(O,\pi)=2$$

Ecuaciones de Planos

IV) Ecuación Normal o Hessiana

Ejemplo:

Sea $\pi : x+2y+2z-6=0$*, presentar el versor normal asociado y hallar la distancia entre el origen y el plano.*



Ecuaciones de Planos

V) Ecuación Segmentaria

Condiciones:

$$O \notin \pi \,,\, \pi \nparallel pl(xy) \,,\, \pi \nparallel pl(xz) \,,\, \pi \nparallel pl(yz)$$

Partimos de EGI

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

$$Ax + By + Cz = -D$$

$$\frac{A}{-D}x + \frac{B}{-D}y + \frac{C}{-D}z = \frac{-D}{-D}$$

$$\frac{x}{\frac{-D}{A}} + \frac{y}{\frac{-D}{B}} + \frac{z}{\frac{-D}{C}} = 1 \Rightarrow con: a = \frac{-D}{A} \,, b = \frac{-D}{B} \,, c = \frac{-D}{C}$$

$$\boxed{\pi : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$$

Ecuación Segmentaria

Ecuaciones de Planos

V) Ecuación Segmentaria

Ejemplo:

Sea el plano π: x+2y+2z-6=0. Hallar su ecuación segmentaria y determinar las coordenadas donde el plano corta a los ejes cartesianos.

$$\pi : x+2y+2z-6=0$$

$$x+2y+2z=6$$

$$\frac{1}{6}x+\frac{2}{6}y+\frac{2}{6}z=\frac{6}{6}$$

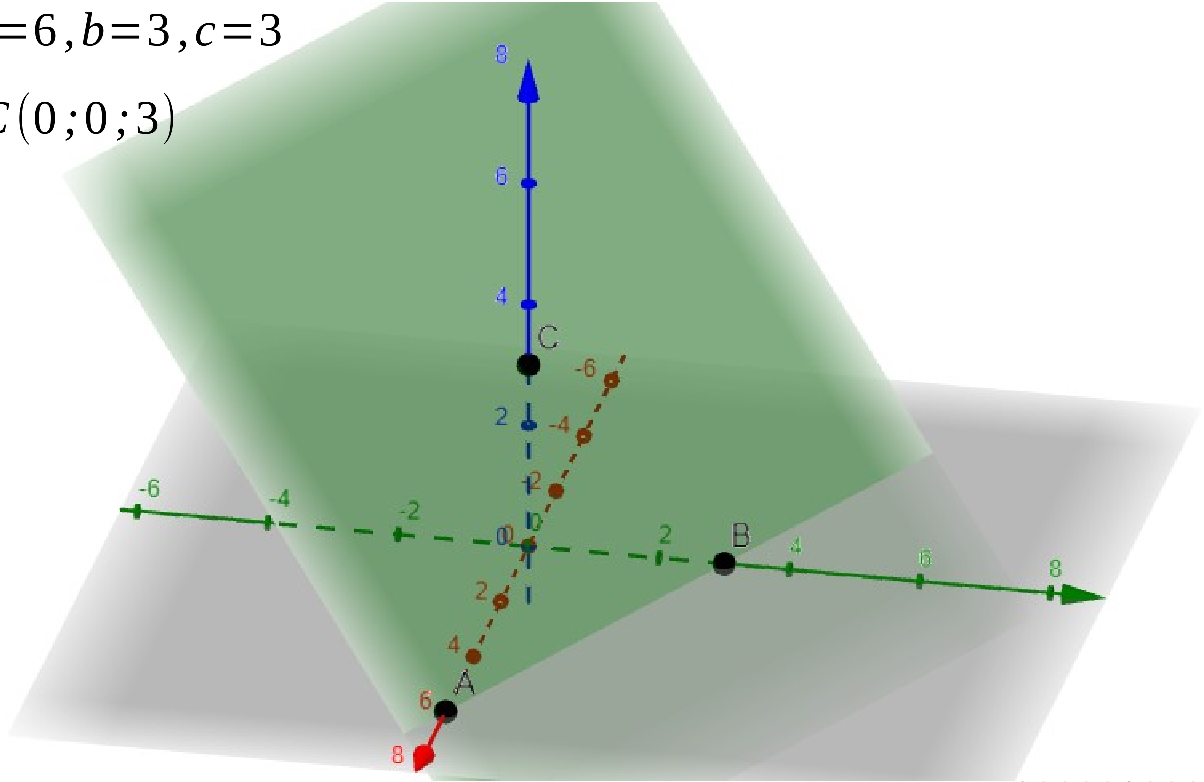
$$\boxed{\pi : \frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1} \Rightarrow con : a=6, b=3, c=3$$

Ecuaciones de Planos

V) Ecuación Segmentaria

$$\pi: \frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1 \Rightarrow con: a=6, b=3, c=3$$

$$A(6;0;0), B(0;3;0), C(0;0;3)$$



Ecuaciones de Planos

Determinación de Planos

a) A partir de tres puntos no alineados

- Puede hallarse la EVP, ECP eligiendo cualquiera de los puntos. Los dos vectores directores se los puede obtener a partir de los tres puntos.
- Puede hallarse la ecuación General Implícita, la normal y la Segmentaria a partir de un punto y un vector normal. Este último, puede hallarse haciendo el producto vectorial entre los dos vectores directores.

b) A partir de un punto P y una recta r incluidos en el plano

- Como el punto P dado y la recta r están en el mismo plano (con P no perteneciente a r), puede obtenerse un vector director uniendo al punto dado con el punto de la recta (que es dato). El otro vector director necesario es aquel que viene dado en la ecuación de la recta.

Ecuaciones de Planos

Posiciones relativas entre dos planos

Paralelos:

$$\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0}$$

Coincidentes:

$$\pi_1 \equiv \pi_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \\ P \in \pi_1 \wedge P \in \pi_2 \end{cases}$$

Perpendiculares:

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 . \vec{n}_2 = 0$$

Incidentes:

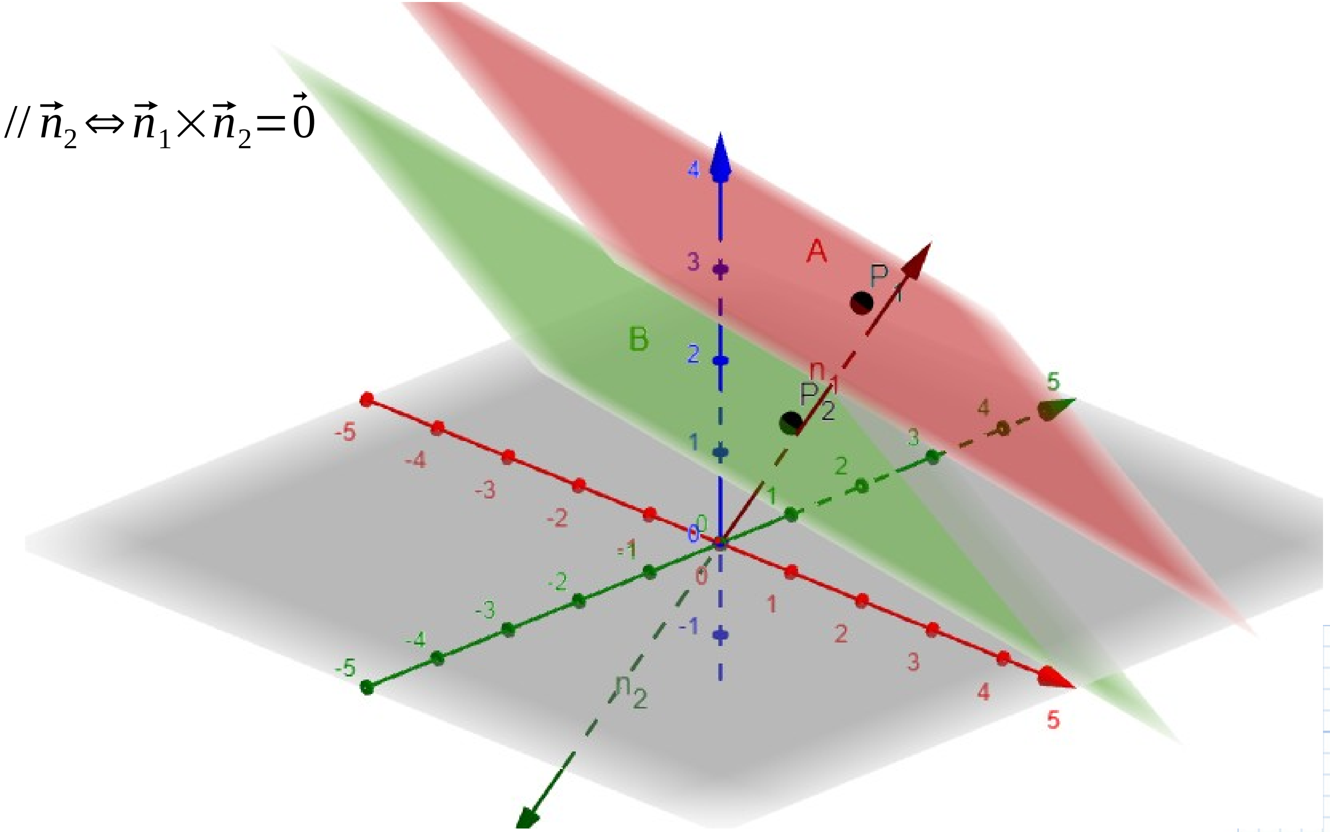
$$\pi_1 \measuredangle \pi_2 \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = r$$

Ecuaciones de Planos

Posiciones relativas entre dos planos

Paralelos:

$\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0}$

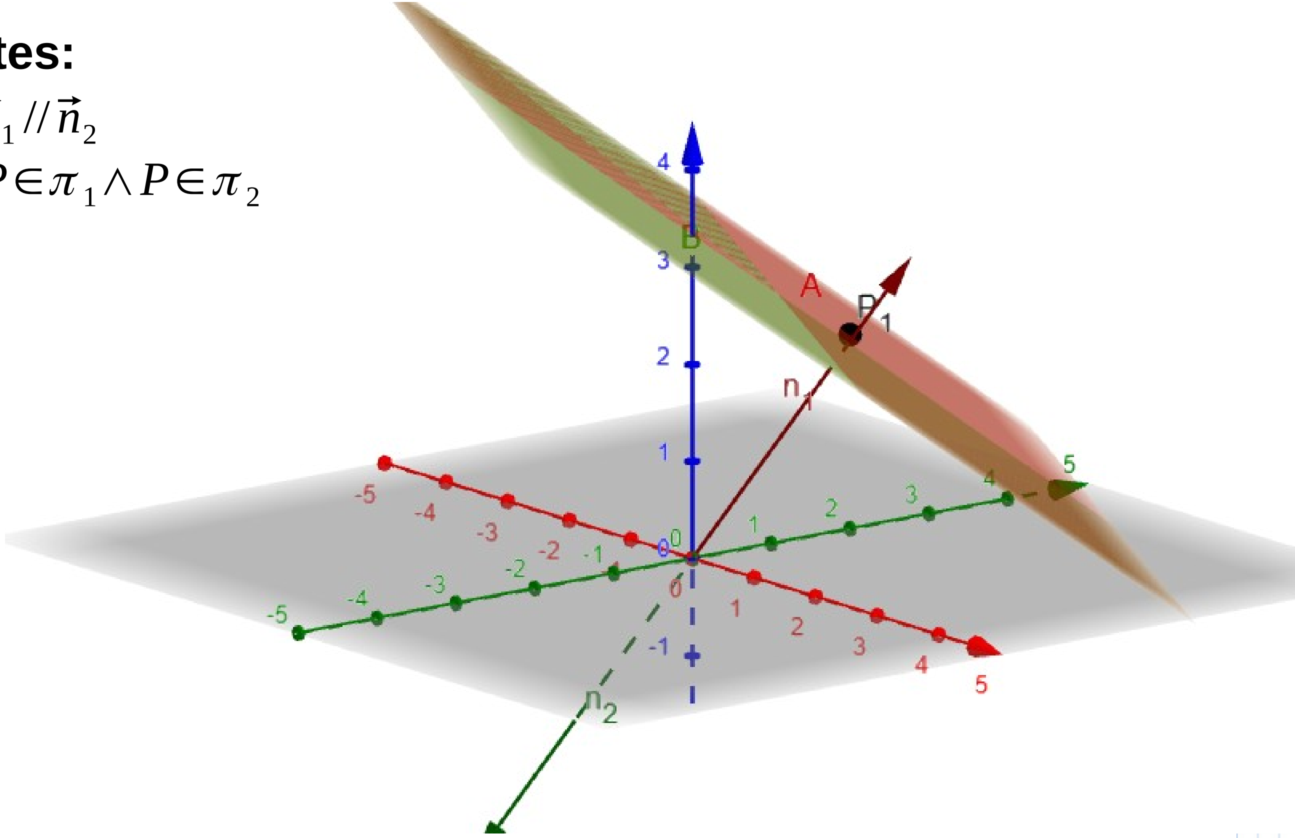


Ecuaciones de Planos

Posiciones relativas entre dos planos

Coincidentes:

$$\pi_1 \equiv \pi_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \\ P \in \pi_1 \wedge P \in \pi_2 \end{cases}$$

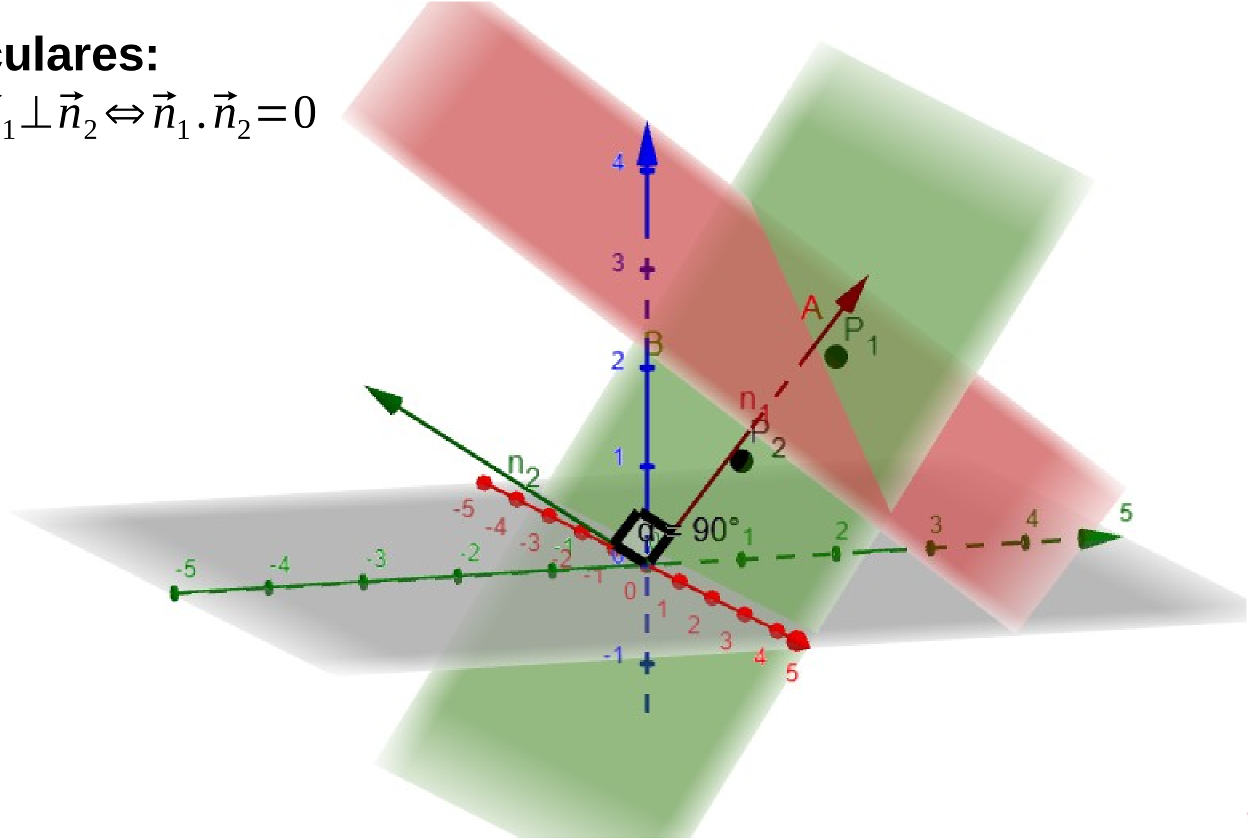


Ecuaciones de Planos

Posiciones relativas entre dos planos

Perpendiculares:

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 . \vec{n}_2 = 0$$

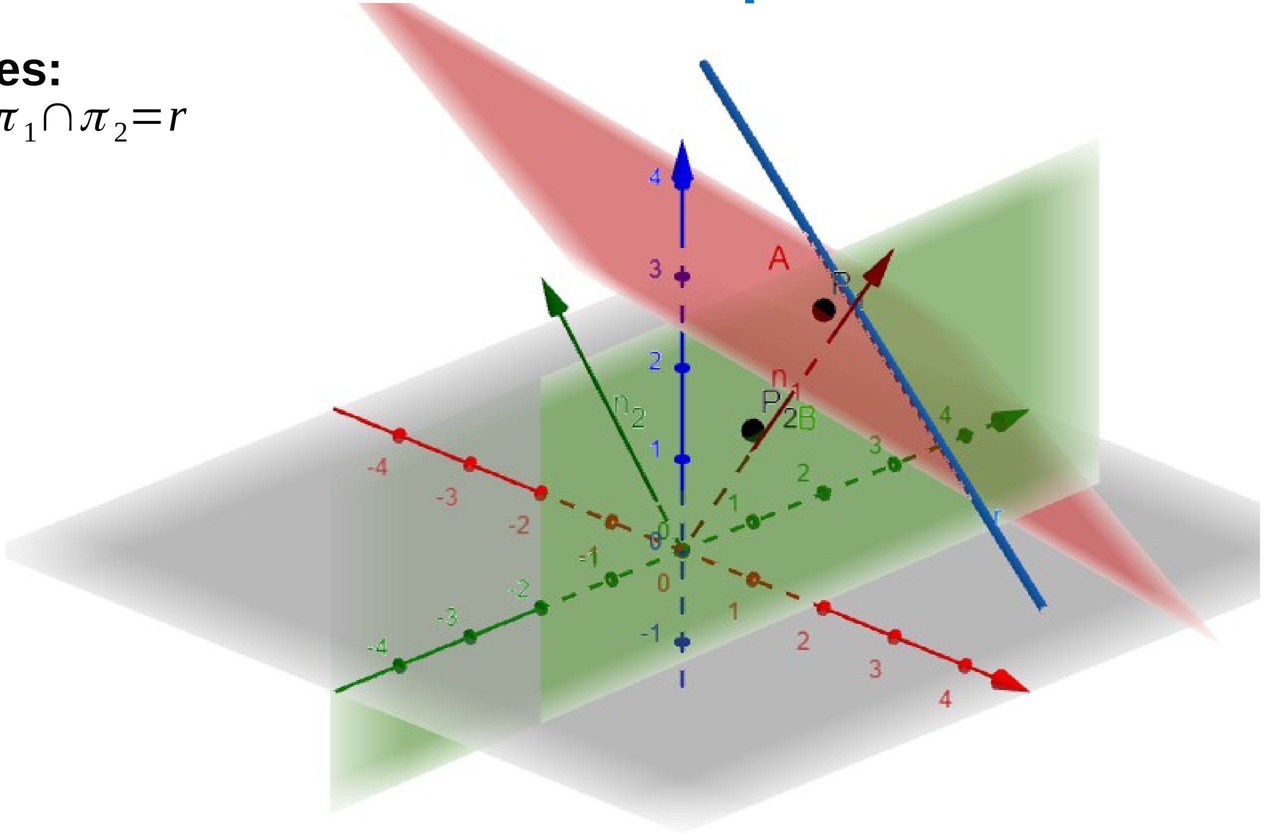


Ecuaciones de Planos

Posiciones relativas entre dos planos

Incidentes:

$\pi_1 \measuredangle \pi_2 \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = r$



Ejercicios de la Práctica

<u>Ejercicio 14:</u> Hallar la Ecuación Vectorial Paramétrica, Cartesiano Paramétricas y General del plano tal que cumple las siguientes Condiciones.

14.2) Contenga al punto P(3 ; -1 ; 2) y sea paralelo al plano xz

Dos vectores directores // al plano xz: $\overline{u} = (1 ; 0 ; 0)$ y $\overline{v} = (0 ; 0 ; 1)$ y

EVP: $\pi : (x ; y ; z) = (3 ; -1 ; 2) + \lambda (1 ; 0 ; 0) + \mu (0 ; 0 ; 1) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R}$

ECP: $\pi : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 2 + \mu \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R}$

EGI: Hallamos $\overline{u} \times \overline{v} = (0 ; -1 ; 0)$. Luego,

π: –y + D = 0. Reemplazando (x;y;z) por P(3 ; -1 ; 2) queda:

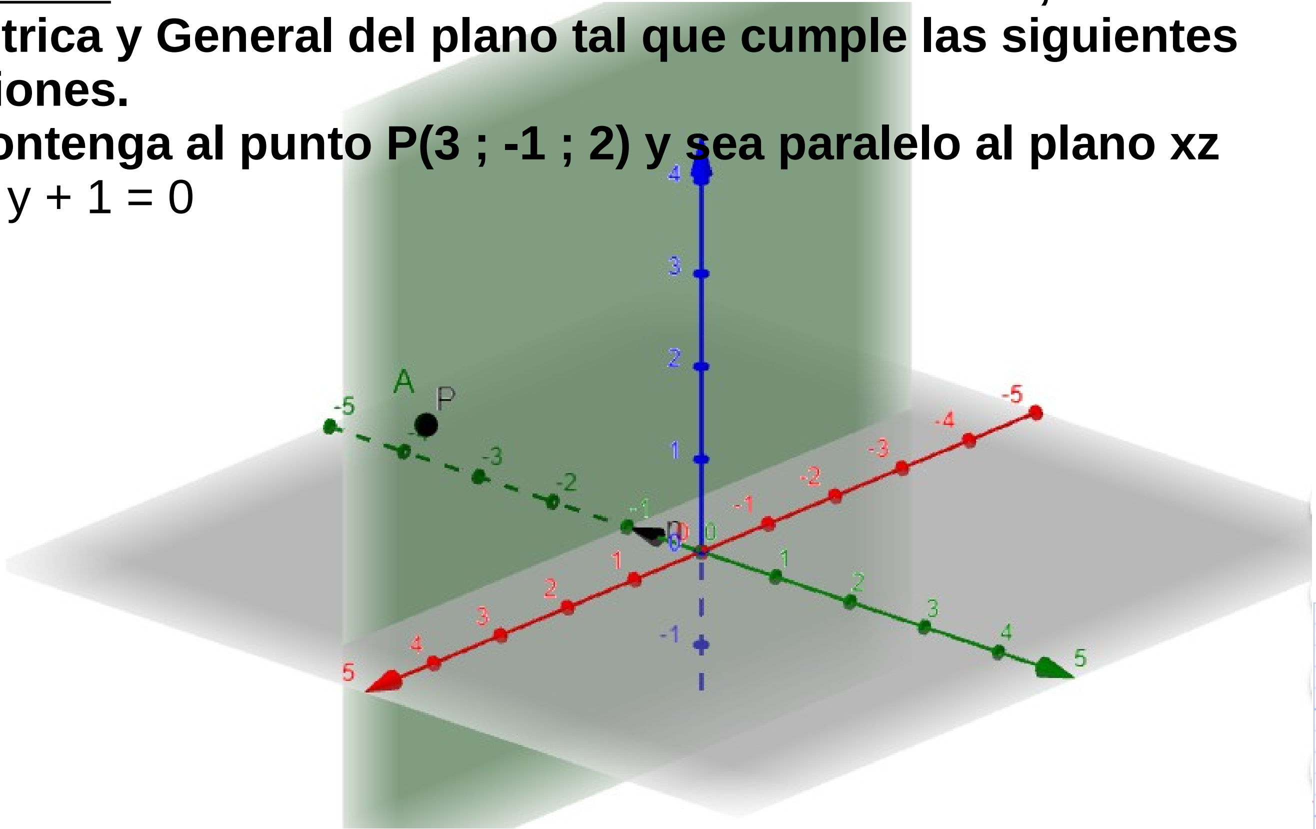
–(–1) + D = 0, D = –1 Entonces: **π: y + 1 = 0**

Ejercicios de la Práctica

<u>Ejercicio 14:</u> Hallar la Ecuación Vectorial Paramétrica, Cartesiano Paramétrica y General del plano tal que cumple las siguientes Condiciones.

14.2) Contenga al punto P(3 ; -1 ; 2) y sea paralelo al plano xz

EGI: $\pi: y + 1 = 0$



Ejercicios de la Práctica

<u>Ejercicio 14:</u> Hallar la Ecuación Vectorial Paramétrica, Cartesiano Paramétrica y General del plano tal que cumple las siguientes Condiciones.

14.4) Contenga al punto P(1 ; -1 ; 0) y la recta: $r_2 : \frac{x-1}{2} = y = \frac{z-2}{3}$

De la recta puedo obtener: Q(1 ; 0 ; 2) y $\overline{u}$ = (2 ; 1 ; 3)

Necesitamos un vector director más: $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (0;1;2)$

EVP: $\pi : (x;y;z) = (1;-1;0) + \lambda(2;1;3) + \mu(0;1;2) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R}$

ECP: $\pi : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda + \mu \\ z = 0 + 3\lambda + 2\mu \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R}$

EGI: Hallamos $\overline{u}$ x $\overline{v}$ = (-1 ; -4 ; 2). Luego,

π: –x–4y + 2z + D = 0. Reemplazando (x;y;z) por P(1 ; -1 ; 0) queda:

–1–4(-1) + 2.0 + D = 0

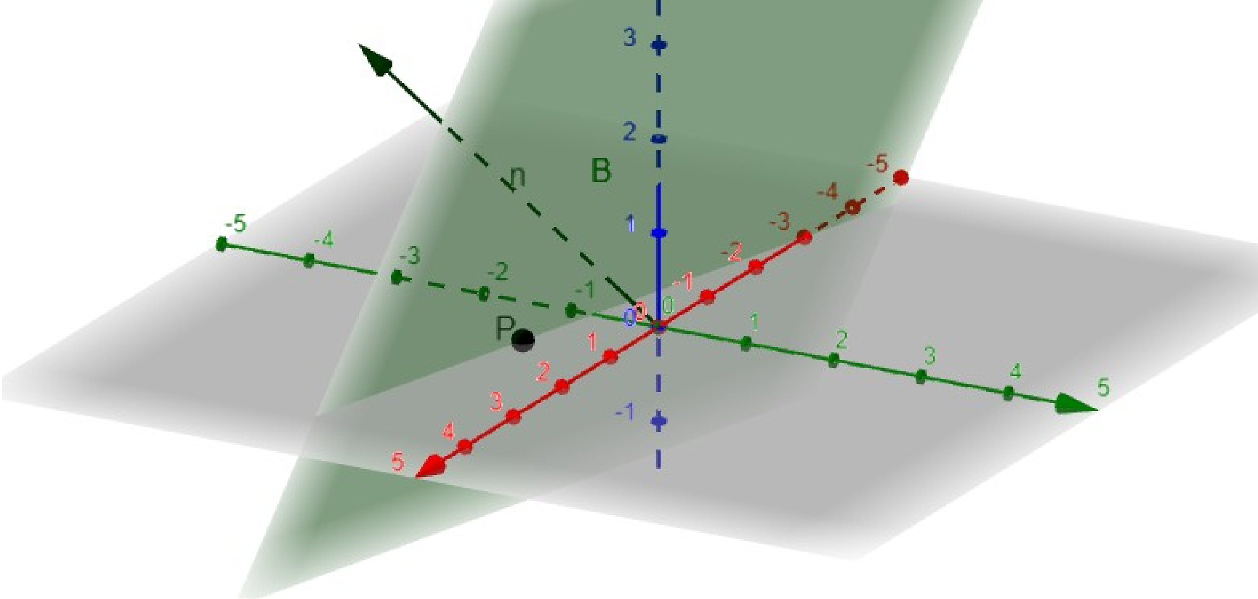
D = -3 Entonces: **π: –x–4y + 2z–3 = 0**

Ejercicios de la Práctica

<u>Ejercicio 14:</u> Hallar la Ecuación Vectorial Paramétrica, Cartesiano Paramétrica y General del plano tal que cumple las siguientes Condiciones.

14.4) Contenga al punto P(1 ; -1 ; 0) y la recta: $r_2: \dfrac{x-1}{2} = y = \dfrac{z-2}{3}$

EGI: π: –x–4y + 2z–3 = 0

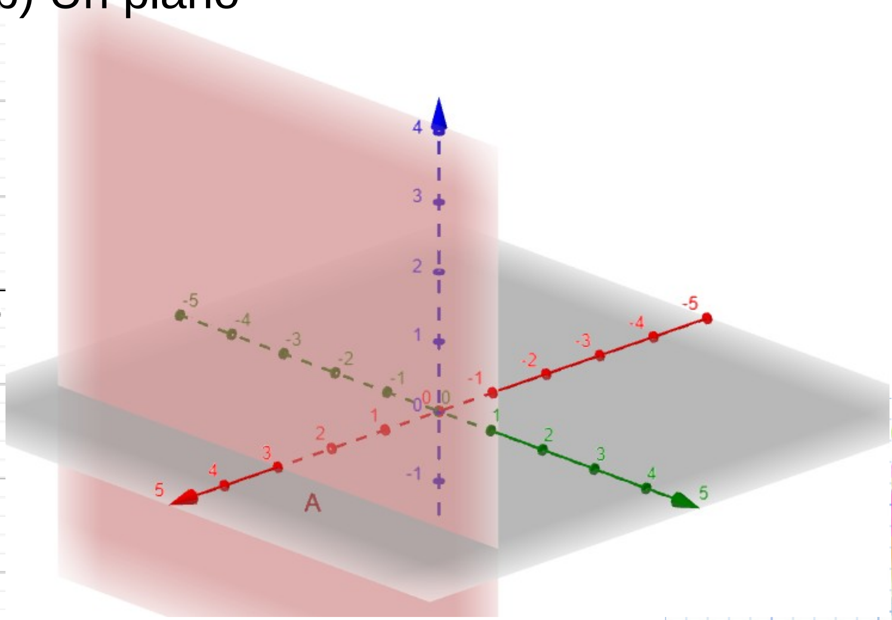


Ejercicios de la Práctica

Ejercicio 15: **Identificar el lugar geométrico de los puntos que verifican las Siguientes ecuaciones y/o condiciones y graficar.**
15.1) $x = 3$ a) en el plano, b) en el espacio:

a) Una recta

b) Un plano



Ejercicios de la Práctica

<u>Ejercicio 15:</u> Identificar el lugar geométrico de los puntos que verifican las Siguientes ecuaciones y/o condiciones y graficar.

15.4)
$$\begin{cases} x-2y=0 \Rightarrow \; plano\ que\ pasa\ por\ origen\ y\ tiene\ \vec{n}_1=(1;-2;0) \\ x+y=0 \quad \Rightarrow \; plano\ que\ pasa\ por\ origen\ y\ tiene\ \vec{n}_2=(1;1;0) \end{cases}$$

Que se de la primera y segunda ecuación, implica la intersección entre los espacios. Como son dos planos, se intersecan en una recta r.
En principio, si ambos pasan por el origen, P(0;0;0) es un punto de r.
Un vector director $\bar{u}$ de r puede hallarse con el producto vectorial entre $\bar{n}_1$ y $\bar{n}_2$

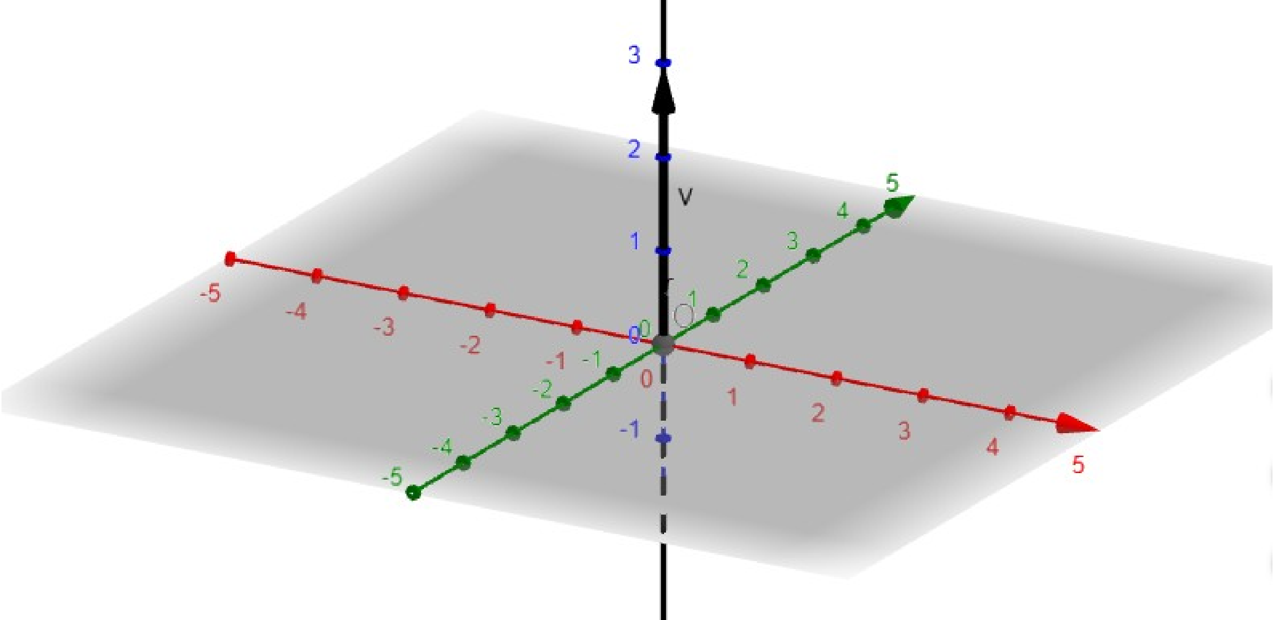
$\bar{u} = (0 ; 0 ; 3)$

Luego: $r:(x;y;z)=(0;0;0)+\lambda(0;0;3) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Ejercicios de la Práctica

<u>Ejercicio 15:</u> Identificar el lugar geométrico de los puntos que verifican las Siguientes ecuaciones y/o condiciones y graficar.

15.4) $\begin{cases} x-2y=0 \Rightarrow \text{plano que pasa por origen y tiene } \vec{n}_1=(1;-2;0) \\ x+y=0 \quad \Rightarrow \text{plano que pasa por origen y tiene } \vec{n}_2=(1;1;0) \end{cases}$



Ejercicios de la Práctica

Para hacer por los alumnos: el resto del Ejercicio 14 y 15