Álgebra y Geometría Analítica

Clase 06: Ecuaciones de Rectas

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

Unidad 1 – Clase 06

01 Repaso de Clases Anteriores

02 La recta en R^2 y en R^3

03 Ecuaciones de la recta en R^2

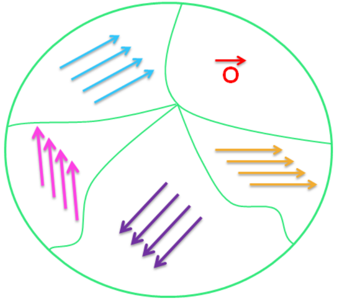
04 Ejercicios

Repaso de Clases Anteriores

VECTORES: INTRODUCCION

- ✓ Vectores: Una definición.
  Es un segmento orientado.

- ✓ Vectores Libres



- ✓ Atributos de un vector:
  - Dirección
  - Sentido
  - Módulo

- ✓ Módulo de un vector

$$\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2} \;\wedge\; |\vec{a}|\in \mathbb{R}\geq 0$$

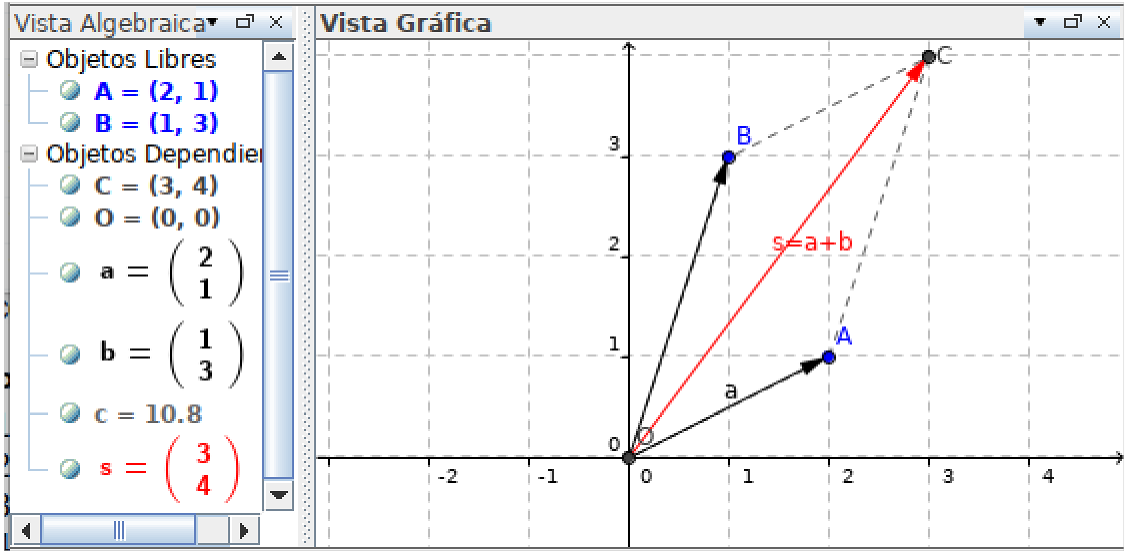
Repaso de Clases Anteriores

OPERACIONES CON VECTORES

I) SUMA DE VECTORES

$$Sean: \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \wedge \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{b} = (b_1; b_2; b_3):$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$$

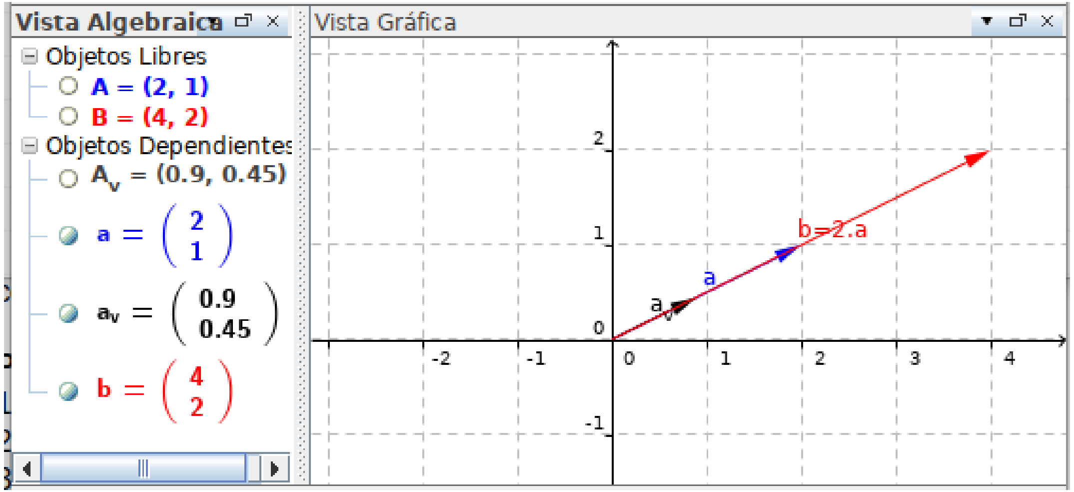


Repaso de Clases Anteriores

OPERACIONES CON VECTORES

II) PRODUCTO DE ESCALAR Y VECTOR

$$Sean: \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge \alpha \in \mathbb{R}:$$
$$\alpha\vec{a} = (\alpha a_1; \alpha a_2; \alpha a_3)$$



Versores:

$$\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} \;\wedge\; |\hat{a}| = 1$$

Condición de Paralelismo:

$$Sean: \; \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{a} \neq \vec{0} \wedge \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{b} \neq \vec{0}:$$
$$\vec{a} \,//\, \vec{b} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} / \vec{a} = \alpha \vec{b}$$

Repaso de Clases Anteriores

OPERACIONES CON VECTORES

III) Producto Escalar entre Vectores (o Producto Punto)

$$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n \wedge \vec{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n) \wedge \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n \wedge \vec{b} = (b_1; b_2; \ldots; b_n):$$

$$\vec{a} . \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{i=n} a_i b_i$$

Es un Escalar

Repaso de Clases Anteriores

OPERACIONES CON VECTORES

III) Producto Escalar entre Vectores

Interpretación Geométrica

$$\forall\, \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{a} \neq \vec{0} \wedge \forall\, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{b} \neq \vec{0}:$$

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi$$

Angulo entre vectores:

$$\phi = \arccos\left(\frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$$ (es el menor ángulo)

Condición de ortogonalidad:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\,.\,\vec{b} = 0$$

Repaso de Clases Anteriores

OPERACIONES CON VECTORES

III) Producto Vectorial entre Vectores (Producto Cruz)

Es una operación propia de vectores de R^3

$$Datos: \begin{cases} \vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \\ \vec{b} = (b_1; b_2; b_3) \end{cases}$$

Se obtiene a partir de un pseudo-determinante:

$$\vec{a}\, x\, \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

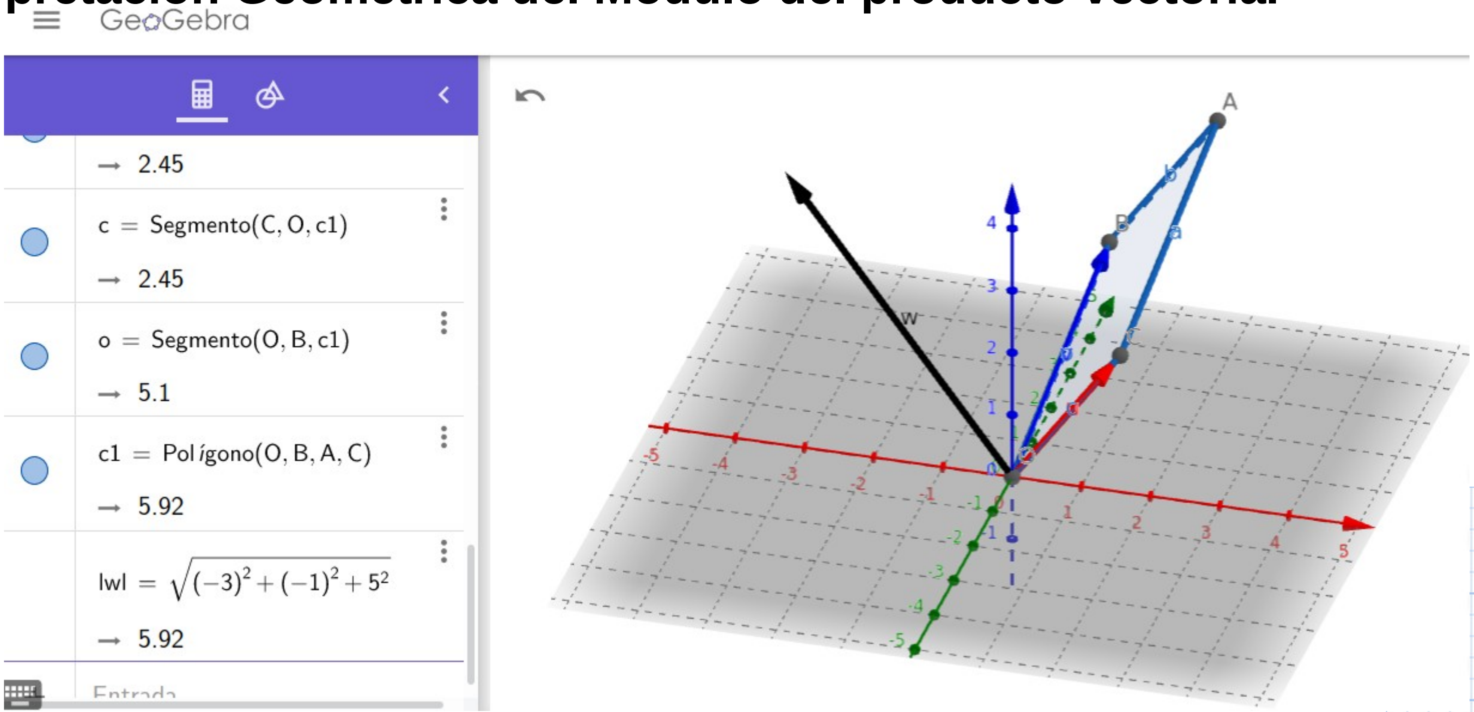
$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 . b_3 - a_3 . b_2 ; -(a_1 . b_3 - a_3 . b_1) ; a_1 . b_2 - a_2 . b_1)$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 . b_3 - a_3 . b_2 ; a_3 . b_1 - a_1 . b_3 ; a_1 . b_2 - a_2 . b_1) \in \mathbb{R}^3$$

Repaso de Clases Anteriores

OPERACIONES CON VECTORES

III) Producto Vectorial entre Vectores (Producto Cruz)

Interpretación Geométrica del Módulo del producto vectorial



Repaso de Clases Anteriores

OPERACIONES CON VECTORES

IV) Doble Producto Mixto entre Vectores

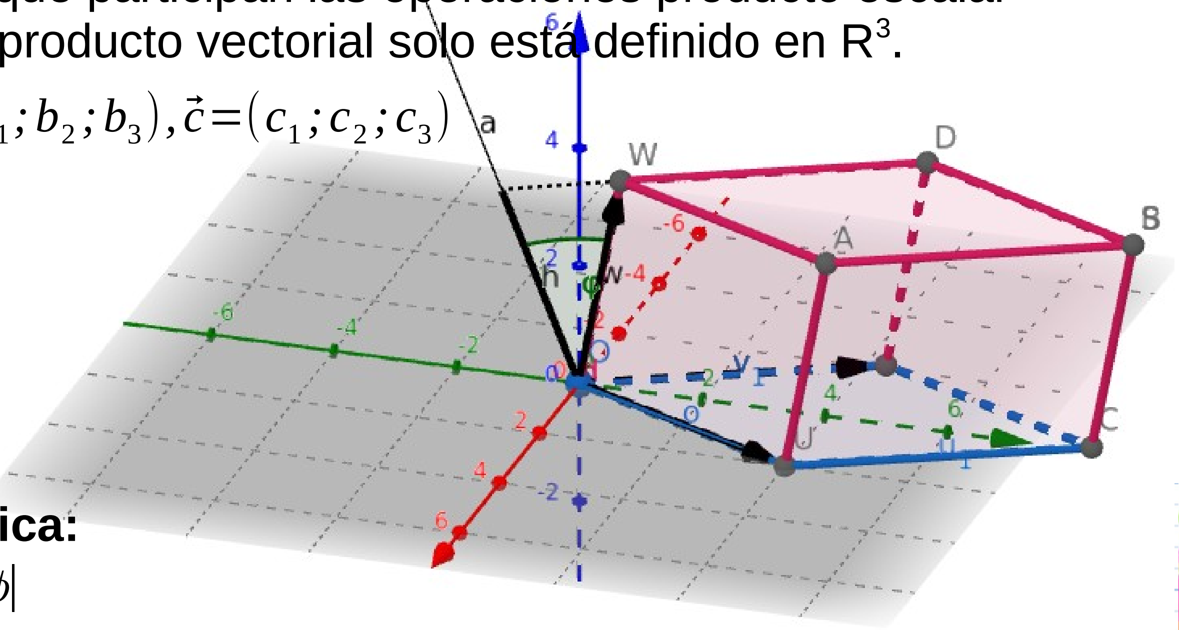
Está definido para R^3 ya que participan las operaciones producto escalar y producto vectorial, y el producto vectorial solo está definido en R^3.

$$Sean: \vec{a}=(a_1;a_2;a_3), \vec{b}=(b_1;b_2;b_3), \vec{c}=(c_1;c_2;c_3)$$

$$\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}.\vec{c}=(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$$

Otra forma de Cálculo:

$$(\vec{a};\vec{b};\vec{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$



Interpretación Geométrica:

$$|(\vec{u};\vec{v};\vec{w})|=|(\vec{u}\times\vec{v})||\vec{w}||\cos\phi|$$

Repaso de Clases Anteriores

OPERACIONES CON VECTORES

V) Doble Producto Vectorial

Operación válida para R^3.

$$\vec{a}=(a_1;a_2;a_3),\vec{b}=(b_1;b_2;b_3),\vec{c}=(c_1;c_2;c_3)$$

$$(\vec{a}\,x\,\vec{b})\,x\,\vec{c}\;es\;un\;vector\;en\;el\;plano\;formado\;por:\vec{a}\;y\;\vec{b}$$

$$\vec{a}\,x\,(\vec{b}\,x\,\vec{c})\;es\;un\;vector\;en\;el\;plano\;formado\;por:\vec{b}\;y\;\vec{c}$$

Cálculo:

$$(\vec{a}\,x\,\vec{b})\,x\,\vec{c}=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}.\vec{c})\vec{a}$$

$$\vec{a}\,x\,(\vec{b}\,x\,\vec{c})=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$$

Repaso de Clases Anteriores

Resumen

Condiciones interesantes

$\forall \vec{a} \neq \vec{0} \wedge \forall \vec{b} \neq \vec{0} \wedge \forall \vec{c} \neq \vec{0}$

Condiciones de Paralelismo

$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} / \vec{a} = \alpha \vec{b}$

$Solo\ en\ R^3 : \vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

Condición de ortogonalidad

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} . \vec{b} = 0$

Condición de coplanaridad

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\ son\ coplanares \Leftrightarrow (\vec{a} ; \vec{b} ; \vec{c}) = 0$

Cálculos de interés geométrico

Versor asociado a un vector

$$\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \ \wedge \ |\hat{a}| = 1$$

El ángulo entre dos vectores

$$\phi = \arccos \left(\frac{\vec{a} . \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right)$$

El área del paralelogramo

$|\vec{a} \times \vec{b}| : Area\ del\ paralelogramo$

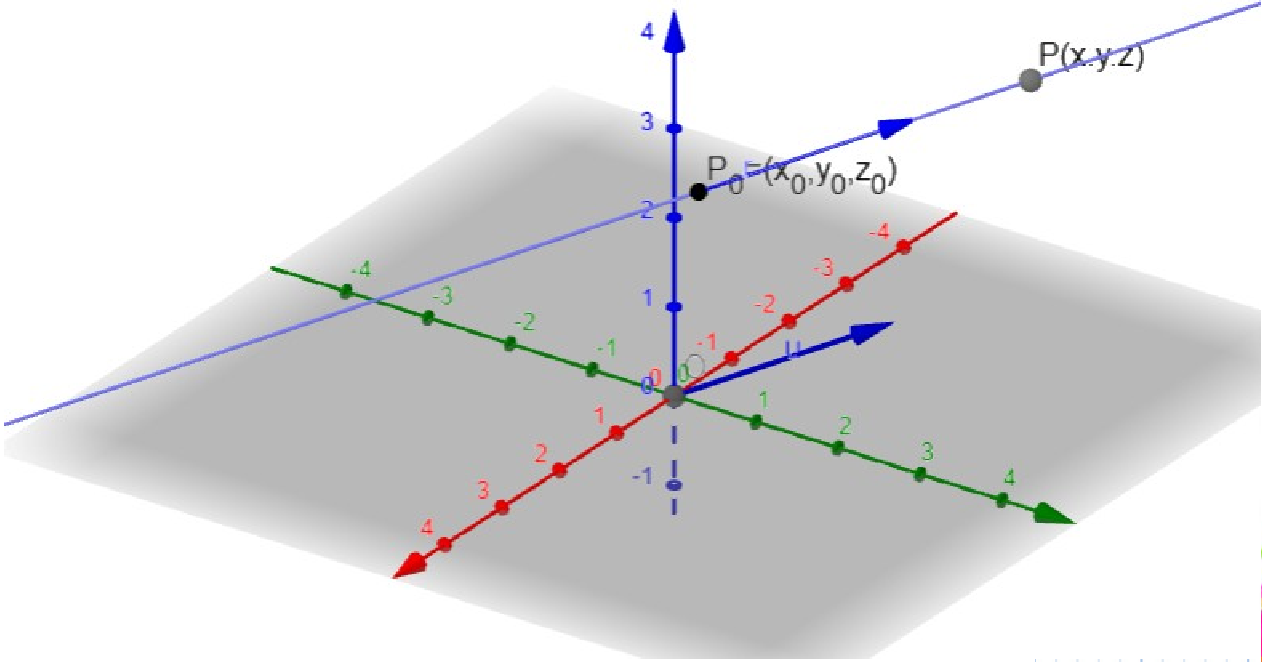
El volumen del paralelepípedo

$|(\vec{a} ; \vec{b} ; \vec{c})| : Volumen\ del\ paralelepípedo$

Ecuaciones de Rectas (R^2 y R^3)

I) Ecuación Vectorial Paramétrica (EVP)

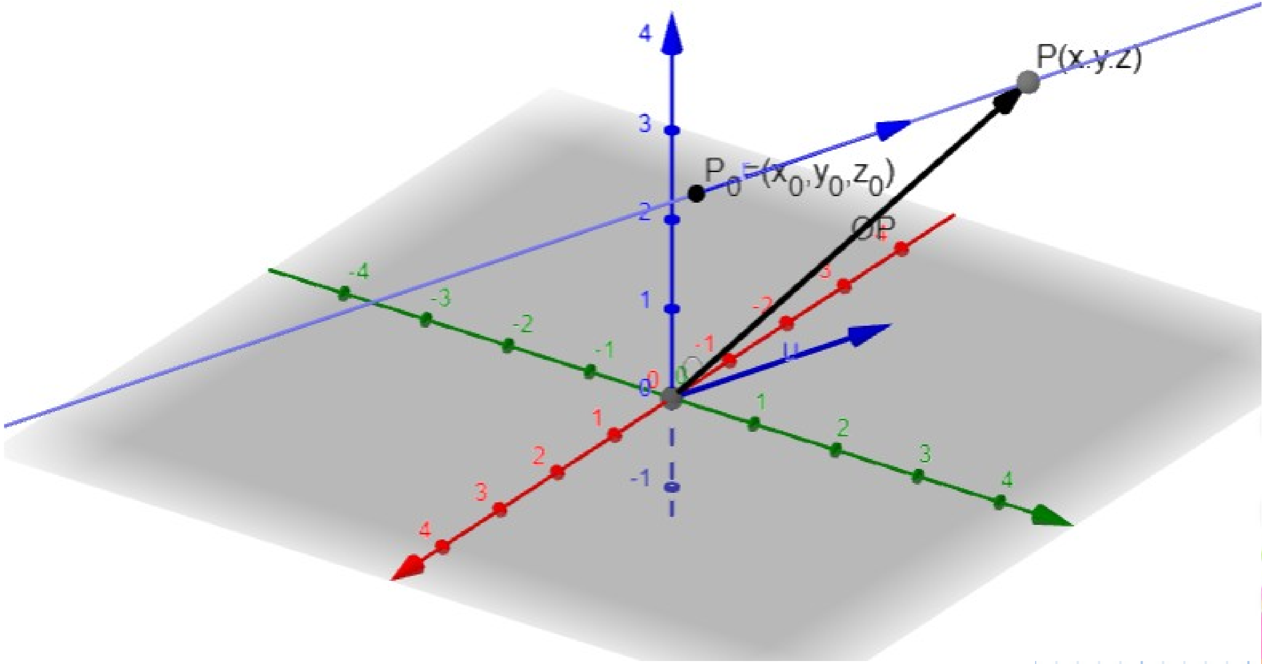
Datos: $P_0 \in r\,,\ \vec{u}\,//\,r$



Ecuaciones de Rectas (R^2 y R^3)

I) Ecuación Vectorial Paramétrica (EVP)

Datos: $P_0 \in r \,,\, \vec{u} \,//\, r$



Ecuaciones de Rectas (R^2 y R^3)

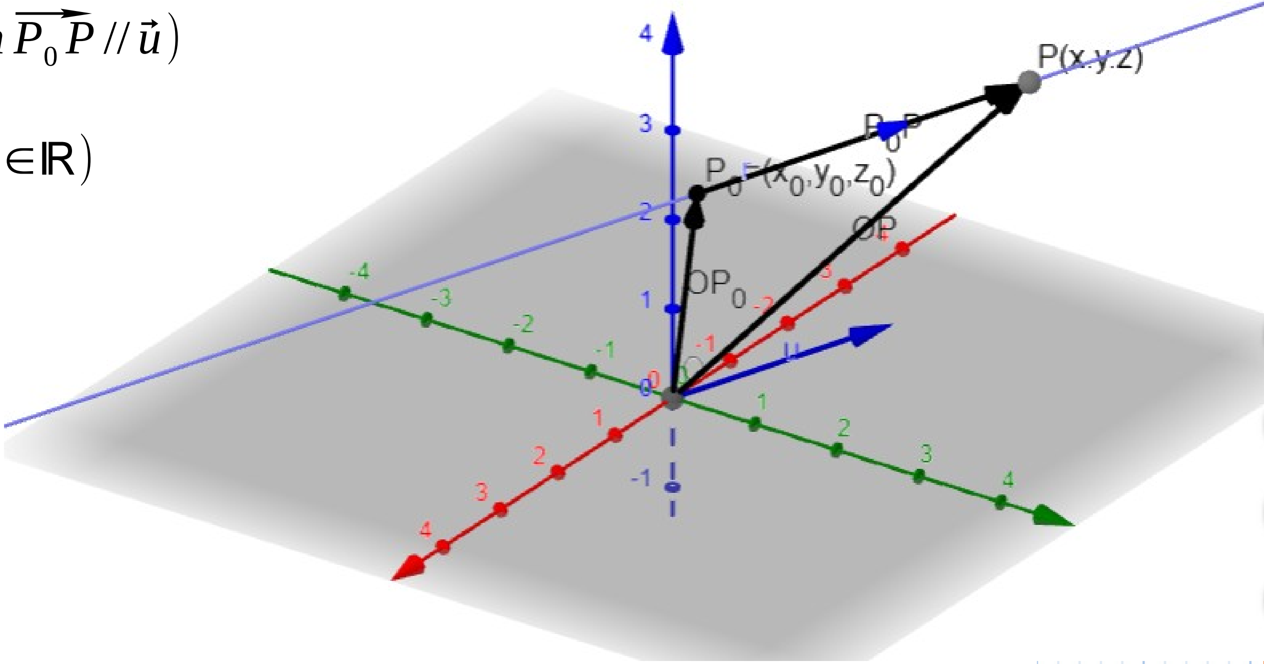
I) Ecuación Vectorial Paramétrica (EVP)

Datos: $P_0 \in r\,,\ \vec{u}\,//\,r$

$r: \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P}\ \left(con\ \overrightarrow{P_0P}\,//\,\vec{u}\right)$

$con\ \overrightarrow{P_0P} = \lambda\vec{u}$

$r: \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\vec{u}\ \left(\forall\,\lambda \in \mathbb{R}\right)$



Ecuaciones de Rectas (R^2 y R^3)

I) Ecuación Vectorial Paramétrica (EVP)

Ejemplo:

$$Datos: \begin{cases} P_0(1,-2,3) \wedge P_0 \in r \\ \vec{u}=(2;1;-1) \wedge \vec{u} // r \end{cases}$$

a) Escribir la EVP de la recta

b) Escribir las coordenadas de al menos cinco puntos que pertenezcan a la Recta r y no coinciden con P_0.

c) Determinar si existe el punto en el cual la recta corta al eje x.

d) Determinar si existe intersección de la recta r con el plano coordenado yz

Ecuaciones de Rectas (R^2 y R^3)

I) Ecuación Vectorial Paramétrica (EVP)

$$Datos: \begin{cases} P_0(1,-2,3) \wedge P_0 \in r \\ \vec{u} = (2;1;-1) \wedge \vec{u} \,//\, r \end{cases}$$

Ejemplo (cont.):

a) Escribir la EVP de la recta

$$r: \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \vec{u} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{r: (x;y;z) = (1;-2;3) + \lambda (2;1;-1) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}}$$

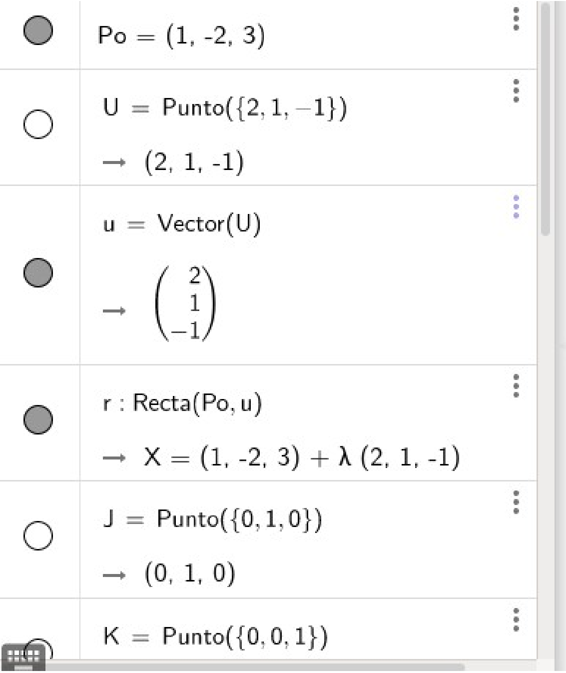
Ecuaciones de Rectas (R^2 y R^3)

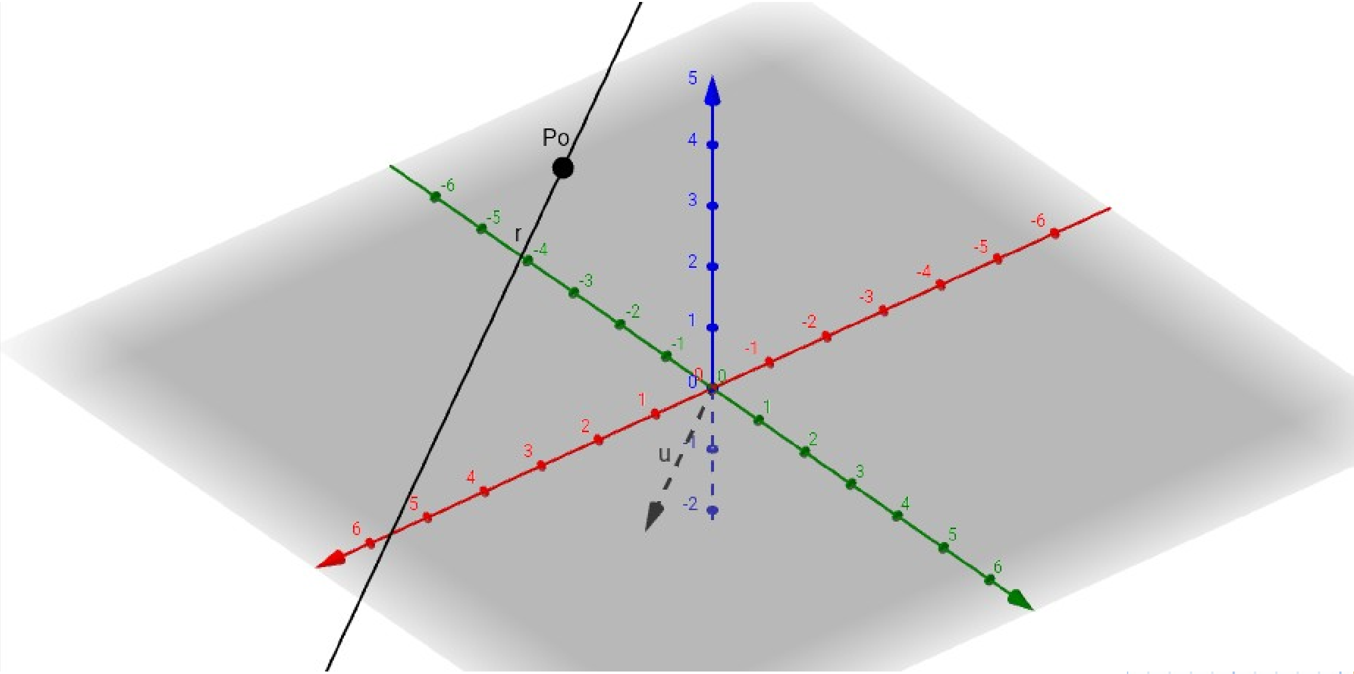
I) Ecuación Vectorial Paramétrica (EVP)

Ejemplo (cont.):

a) Escribir la EVP de la recta

$$Datos:\begin{cases} P_0(1,-2,3) \wedge P_0 \in r \\ \vec{u}=(2;1;-1) \wedge \vec{u} \,//\, r \end{cases}$$





Ecuaciones de Rectas (R^2 y R^3)

I) Ecuación Vectorial Paramétrica (EVP)

$$Datos: \begin{cases} P_0(1,-2,3) \wedge P_0 \in r \\ \vec{u}=(2;1;-1) \wedge \vec{u} // r \end{cases}$$

Ejemplo (cont.):

b) Escribir las coordenadas de al menos cinco puntos que pertenezcan a la Recta *r* y no coinciden con P_0.

λ	$\overline{OPi}$	Pi
1	$\overline{OP}_1 = (3 ; -1 ; 2)$	$P_1\ (3 ; -1 ; 2)$
-1	$\overline{OP}_2 = (-1 ; -3 ; 4)$	$P_2\ (-1 ; -3 ; 4)$
2	$\overline{OP}_3 = (5 ; 0 ; 1)$	$P_3\ (5 ; 0 ; 1)$
1/3	$\overline{OP}_4 = (5/3 ; -5/3 ; 8/3)$	$P_4\ (5/3 ; -5/3 ; 8/3)$
√3	$\overline{OP}_5 = (1+2\sqrt{3} ; -2+\sqrt{3} ; 3-\sqrt{3})$	$P_5\ (1+2\sqrt{3} ; -2+\sqrt{3} ; 3-\sqrt{3})$

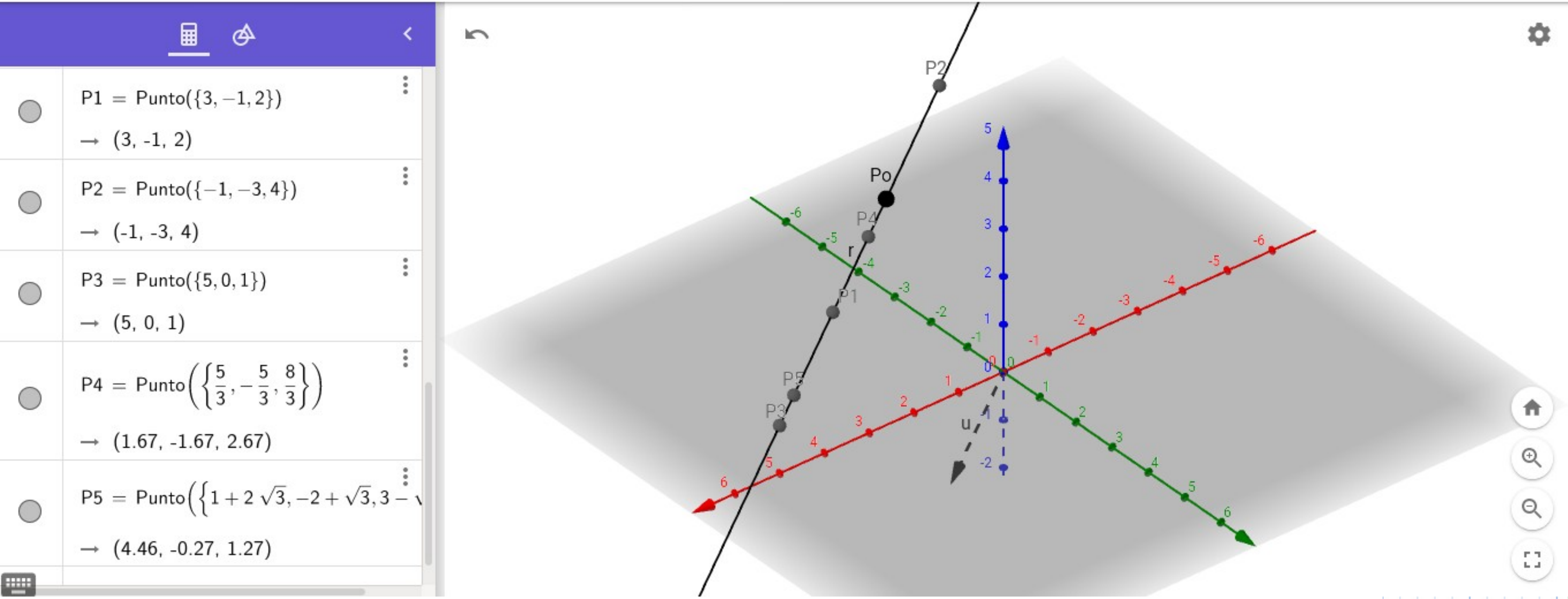
Ecuaciones de Rectas (R^2 y R^3)

I) Ecuación Vectorial Paramétrica (EVP)

Ejemplo (cont.):

$$Datos:\begin{cases} P_0(1,-2,3) \wedge P_0 \in r \\ \vec{u}=(2;1;-1) \wedge \vec{u} \,//\, r \end{cases}$$

b) Escribir las coordenadas de al menos cinco puntos de r



Ecuaciones de Rectas (R^2 y R^3)

I) Ecuación Vectorial Paramétrica (EVP)

$$Datos:\begin{cases} P_0(1,-2,3)\wedge P_0\in r \\ \vec{u}=(2;1;-1)\wedge \vec{u}\,//\,r \end{cases}$$

Ejemplo (cont.):

c) Determinar si existe el punto en el cual la recta corta al eje x.

Los puntos del eje x tienen la forma: P(x ; 0 ; 0)

Escribimos los puntos de la recta:

$$r:(x;y;z)=(1+2\lambda;-2+\lambda;3-1\lambda)$$

$$r:\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-2+\lambda \\ z=3-1\lambda \end{cases}$$

$$Aplico\ condición\ para\ los\ puntos\ del\ eje\ x:$$

$$\begin{cases} 0=-2+\lambda \Rightarrow \lambda_1=2 \\ 0=3-1\lambda \Rightarrow \lambda_2=3 \end{cases}$$

$$\boxed{Como\ \lambda_1\neq\lambda_2 \Rightarrow r\ no\ corta\ al\ eje\ x}$$

Ecuaciones de Rectas (R^2 y R^3)

I) Ecuación Vectorial Paramétrica (EVP)

Ejemplo (cont.):

d) Determinar si existe intersección de la recta r con el plano coordenado yz

Cualquier punto del plano yz tiene la forma: P(0 ; y ; z)

Luego:

$$x=0 \Rightarrow 0=1+2\lambda \Rightarrow \lambda=\frac{-1}{2}$$

$$y=-2-\frac{1}{2}=\frac{-5}{2}$$

$$z=3-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$$

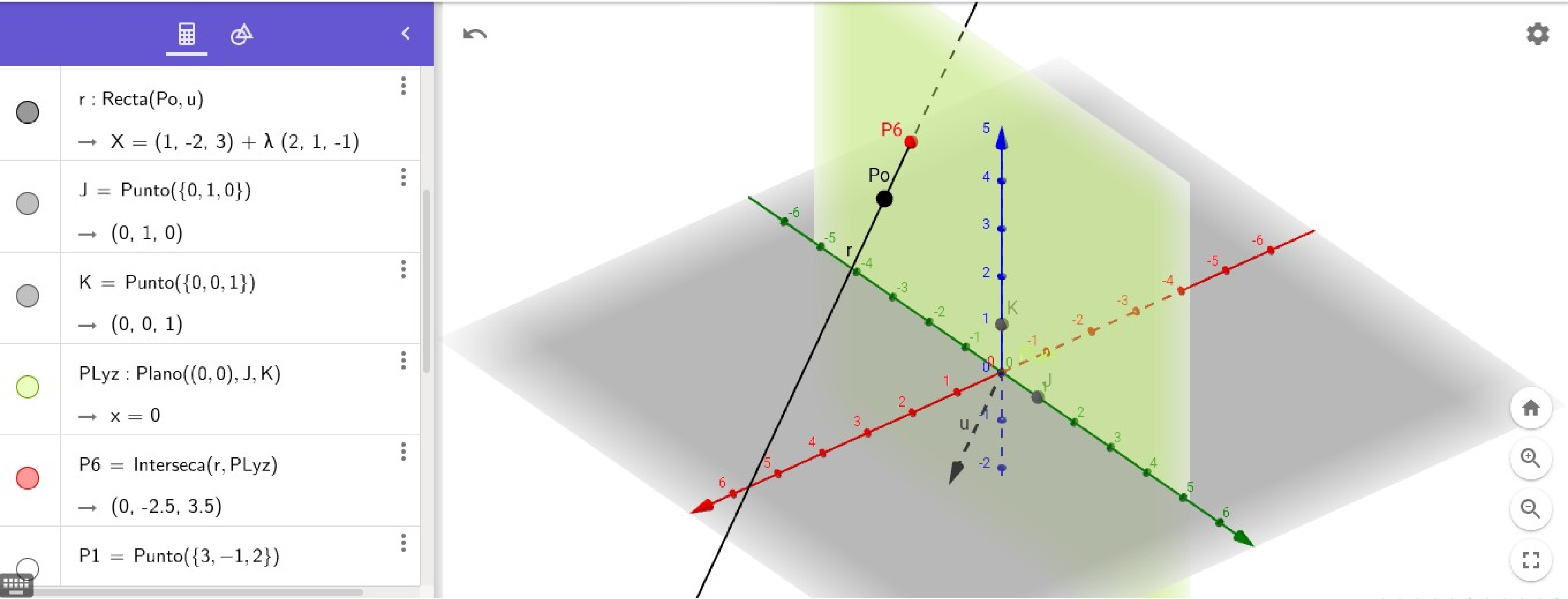
$$Luego: \boxed{P_6\left(0\,;-\frac{5}{2}\,;\frac{7}{2}\right)}$$

Ecuaciones de Rectas (R^2 y R^3)

I) Ecuación Vectorial Paramétrica (EVP)

Ejemplo (cont.):

d) Determinar si existe intersección de la recta r con el plano coordenado yz



Ecuaciones de Rectas (R^2 y R^3)

II) Ecuaciones Cartesiano Paramétricas (ECP)

Se llama así, porque hay varias ecuaciones y un solo parámetro (p/ej.: λ)

$$r: \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \vec{u} \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R})$$

$$r: (x; y; z) = (x_0; y_0; z_0) + \lambda (u_1; u_2; u_3)$$

$$r: (x; y; z) = (x_0 + \lambda u_1; y_0 + \lambda u_2; z_0 + \lambda u_3)$$

$$\boxed{r: \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}}$$

$$\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$$

$$P_0(x_0; y_0; z_0)$$

Ecuaciones de Rectas (R^2 y R^3)

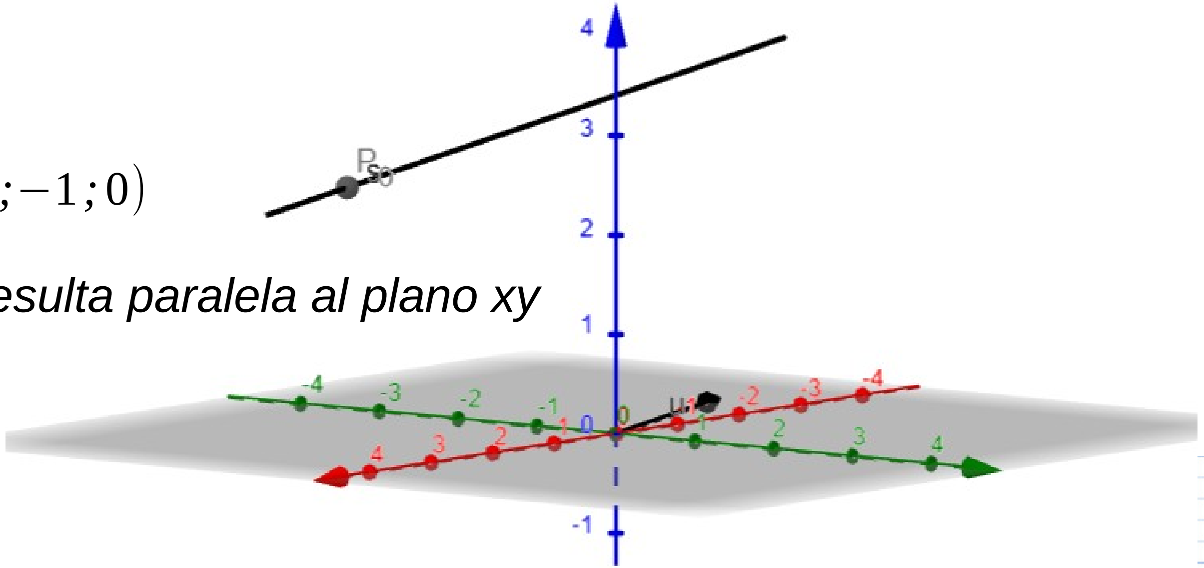
II) Ecuaciones Cartesiano Paramétricas (ECP)

Ejemplo:

$$s:\begin{cases} x=5-3\lambda \\ y=\dfrac{1}{2}-\lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ z=3 \end{cases}$$

Con: $P_0\left(5;\dfrac{1}{2};3\right)$ $\vec{u}=(-3;-1;0)$

Observar que la recta resulta paralela al plano xy



Ecuaciones de Rectas (R^2 y R^3)

III) Ecuaciones Simétricas (ES)

Partiendo de las ECP, despejaremos el parámetro λ:

$$r:\begin{cases} x=x_0+\lambda u_1 \Rightarrow \lambda=\dfrac{x-x_0}{u_1} \\ y=y_0+\lambda u_2 \Rightarrow \lambda=\dfrac{y-y_0}{u_2} \\ z=z_0+\lambda u_3 \Rightarrow \lambda=\dfrac{z-z_0}{u_3} \end{cases}$$

Igualando las expresiones que equivalen a λ:

$$\boxed{r:\frac{x-x_0}{u_1}=\frac{y-y_0}{u_2}=\frac{z-z_0}{u_3}}$$

Ecuaciones de Rectas (R^2 y R^3)

III) Ecuaciones Simétricas (ES)

Ejemplos:

$$r_1: \frac{x-2}{5} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}$$

$$P_0\left(2;-1;-\frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{u} = \left(5;-3;\frac{1}{4}\right)$$

$$r_2: \frac{3x-1}{2} = \frac{4-y}{5} = z \Rightarrow r_2: \frac{\frac{3}{3}x-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{y-4}{-5} = z$$

$$r_2: \frac{x-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{y-4}{-5} = z$$

$$P_0\left(\frac{1}{3};4;0\right)$$

$$\vec{u} = \left(\frac{2}{3};-5;1\right)$$

Ecuaciones de Rectas (R^2 y R^3)

III) Ecuaciones Simétricas (ES)

Observación 1:

$Si\ u_1=0 \wedge u_2 \neq 0 \wedge u_3 \neq 0, no\ se\ puede\ obtener\ \lambda\ en\ la\ ecuacion\ en\ x:$

$$r:\begin{cases} x=x_0 \\ \dfrac{y-y_0}{u_2}=\dfrac{z-z_0}{u_3} \end{cases} \Rightarrow r\,//\,plano\ yz$$

Observación 2:

$Si\ u_1 \neq 0 \wedge u_2=0 \wedge u_3=0$

$no\ se\ puede\ obtener\ \lambda\ en\ la\ ecuacion\ en\ y,\ tampoco\ en\ la\ de\ z:$

$$r:\begin{cases} y=y_0 \\ z=z_0 \end{cases} \Rightarrow r\,//\,eje\ x\ con:\ P_0(0;y_0;z_0), \vec{u}=(1;0;0)$$

Ecuaciones de Rectas (R^2 y R^3)

IV) Ecuaciones Reducidas (ER)

$$r:\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{u_1}=\dfrac{z-z_0}{u_3}\\ \dfrac{y-y_0}{u_2}=\dfrac{z-z_0}{u_3}\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}x-x_0=\dfrac{u_1}{u_3}z-\dfrac{u_1}{u_3}z_0\\ y-y_0=\dfrac{u_2}{u_3}z-\dfrac{u_2}{u_3}z_0\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}x=\underbrace{\boxed{\dfrac{u_1}{u_3}}}_{m}z\underbrace{\boxed{-\dfrac{u_1}{u_3}z_0+x_0}}_{p}\\ y=\underbrace{\boxed{\dfrac{u_2}{u_3}}}_{n}z\underbrace{\boxed{-\dfrac{u_2}{u_3}z_0+y_0}}_{q}\end{cases}$$

$$r:\begin{cases}x=mz+p\\ y=nz+q\end{cases}$$

$$p_1(p;q;0),\vec{v}=(m;n;1)$$

Nota: En estas ecuaciones, se pierde de vista las coordenadas del punto y componentes del vector

Ejemplo:

$$t:\begin{cases}x=-3y+5\\ z=2y+1\end{cases}\Rightarrow P_0(5;0;1),\vec{v}=(-3;1;2)$$

Ecuaciones de Rectas (R^2 y R^3)

Posiciones Relativas entre rectas

$$r_1 : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \lambda \vec{u} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad r_2 : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} + \mu \vec{v} \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

Paralelas:

$$r_1 // r_2 \Leftrightarrow \vec{u} // \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = \alpha \vec{v}$$

$$En\ R^3 : \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$$

Coincidentes:

$$r_1 \equiv r_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} // \vec{v} \\ P_2 \in r_1 \vee P_1 \in r_2 \end{cases}$$

Perpendiculares:

$$r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} . \vec{v} = 0$$

Incidentes:

$$r_1 \angle r_2 \Leftrightarrow r_1 \cap r_2 \neq \emptyset \Rightarrow \begin{cases} r_1 \not\parallel r_2 \\ (\overrightarrow{P_1 P_2} ; \vec{u} ; \vec{v}) = 0 \end{cases}$$

Alabeadas:

$$r_1\ y\ r_2\ son\ alabeadas \begin{cases} r_1 \cap r_2 = \emptyset \\ r_1 \not\parallel r_2 \\ (\overrightarrow{P_1 P_2} ; \vec{u} ; \vec{v}) \neq 0 \end{cases}$$

Ecuaciones de Rectas (R^2 y R^3)

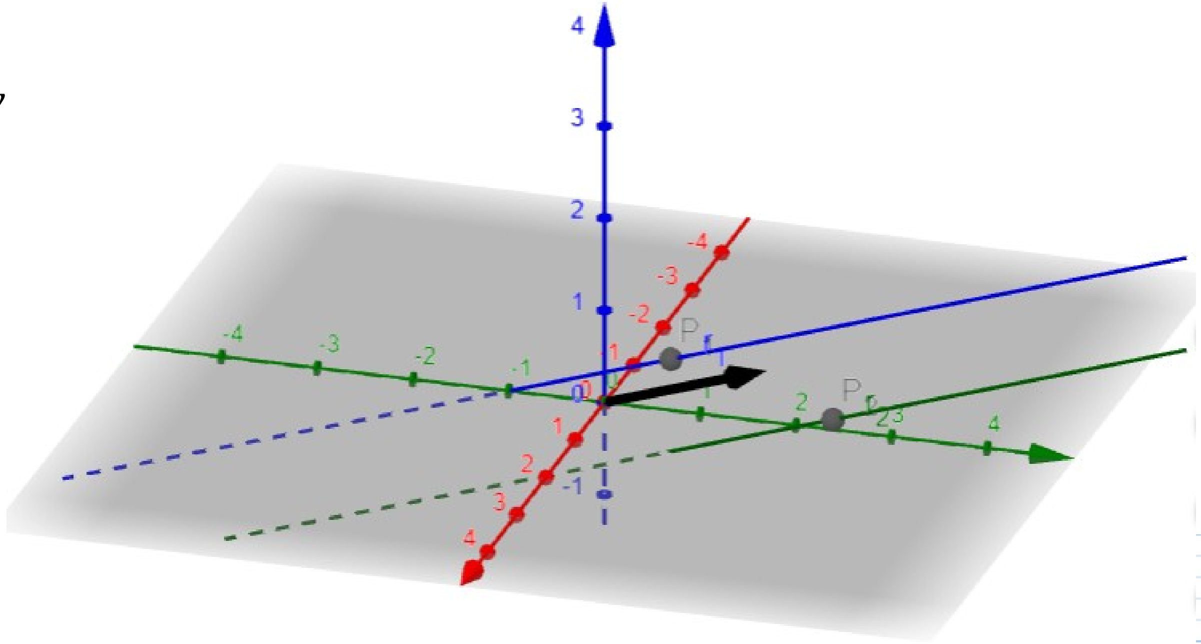
Posiciones Relativas entre rectas

$r_1 : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \lambda \vec{u} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \; r_2 : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} + \mu \vec{v} \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$

Paralelas:

$r_1 // r_2 \Leftrightarrow \vec{u} // \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = \alpha \vec{v}$

$En\ R^3 : \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$



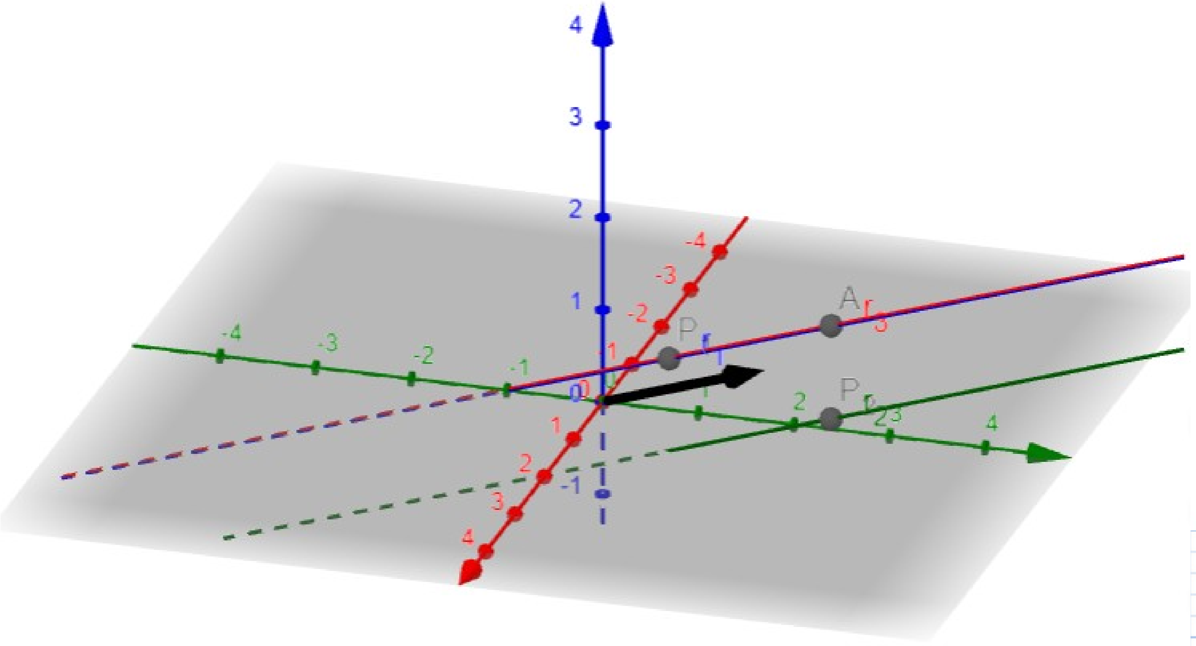
Ecuaciones de Rectas (R^2 y R^3)

Posiciones Relativas entre rectas

$$r_1 : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}_1 + \lambda \vec{u} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad r_2 : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}_2 + \mu \vec{v} \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

Coincidentes:

$$r_1 \equiv r_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \,//\, \vec{v} \\ P_2 \in r_1 \vee P_1 \in \end{cases}$$



Ecuaciones de Rectas (R^2 y R^3)

Posiciones Relativas entre rectas

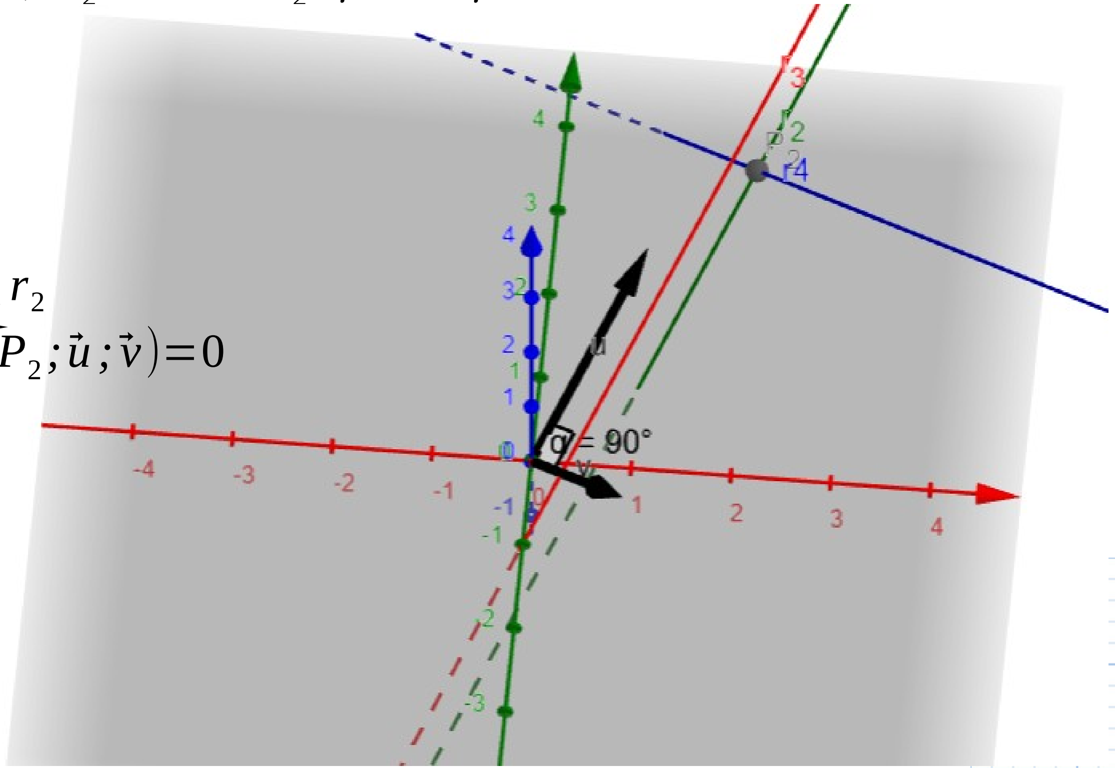
$$r_1 : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \lambda \vec{u} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad r_2 : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} + \mu \vec{v} \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

Perpendiculares:

$$r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} . \vec{v} = 0$$

Incidentes:

$$r_1 \angle r_2 \Leftrightarrow r_1 \cap r_2 \neq \emptyset \Rightarrow \begin{cases} r_1 \not\parallel r_2 \\ \left(\overrightarrow{P_1 P_2} ; \vec{u} ; \vec{v}\right) = 0 \end{cases}$$



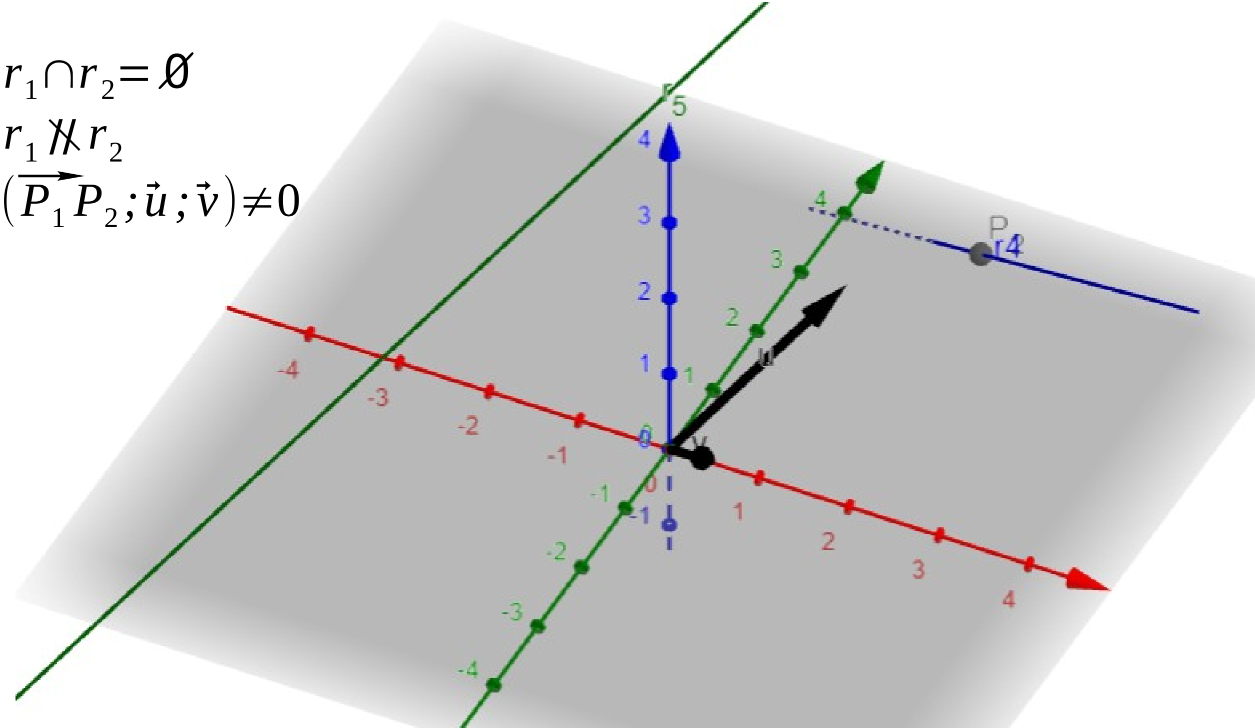
Ecuaciones de Rectas (R^2 y R^3)

Posiciones Relativas entre rectas

$$r_1 : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \lambda \vec{u} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad r_2 : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} + \mu \vec{v} \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

Alabeadas:

$$r_1 \ y \ r_2 \ son \ alabeadas \begin{cases} r_1 \cap r_2 = \emptyset \\ r_1 \not\parallel r_2 \\ \left(\overrightarrow{P_1 P_2} ; \vec{u} ; \vec{v}\right) \neq 0 \end{cases}$$



Ecuaciones de Rectas (R^2)

I) Ecuación Explícita: recta que pasa por 2 puntos

$$Datos: P_0(x_0;y_0),\ P_0 \in r,\ P_1(x_1;y_1),\ P_1 \in r,\ P_0 \neq P_1$$

$$r: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow r: x\begin{vmatrix} y_0 & 1 \\ y_1 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0$$

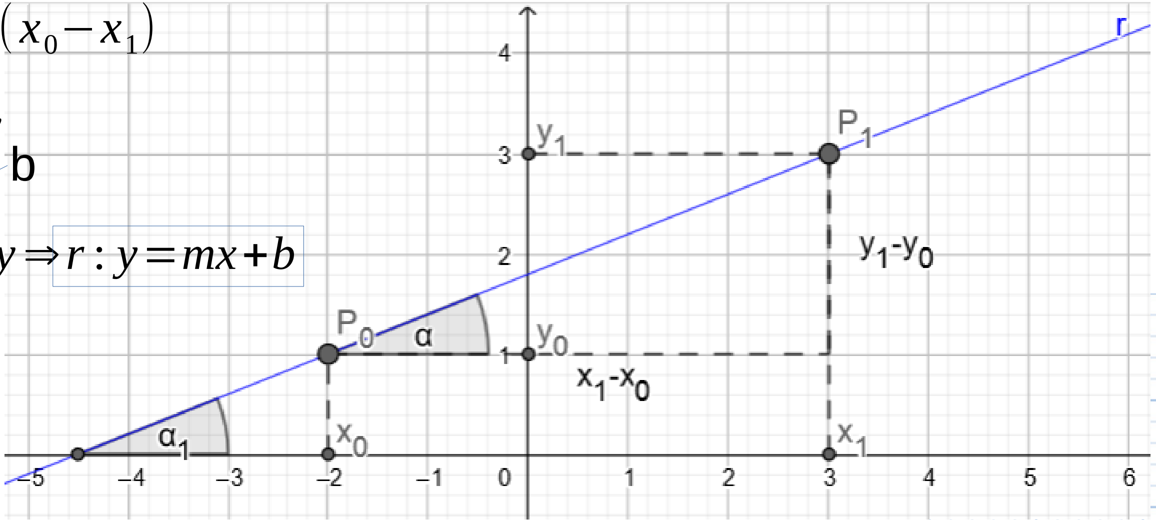
$$x(y_0-y_1) - y(x_0-x_1) + (x_0 . y_1 - x_1 y_0) = 0$$

$$x(y_0-y_1) + (x_0 . y_1 - x_1 y_0) = y(x_0-x_1)$$

$$\frac{x(y_0-y_1) + (x_0 . y_1 - x_1 y_0)}{(x_0-x_1)} = y$$

$$\overbrace{\frac{x(y_0-y_1)}{(x_0-x_1)}}^{m} + \overbrace{\frac{(x_0 . y_1 - x_1 y_0)}{(x_0-x_1)}}^{b} = y \Rightarrow \boxed{r: y = mx + b}$$

$$con\ m = tg\,\alpha = \frac{(y_0-y_1)}{(x_0-x_1)}$$



Ecuaciones de Rectas (R^2)

II) Ecuación General Implícita (EGI)

$$Datos: P_0(x_0; y_0),\ P_0 \in r,\ \vec{n} / \vec{n} \perp r,\ \vec{n} = (A, B)$$

$$\overrightarrow{P_0 P} = (x - x_0; y - y_0)$$

$$como\ \vec{n} \perp \overrightarrow{P_0 P} \Rightarrow \vec{n} . \overrightarrow{P_0 P} = 0$$

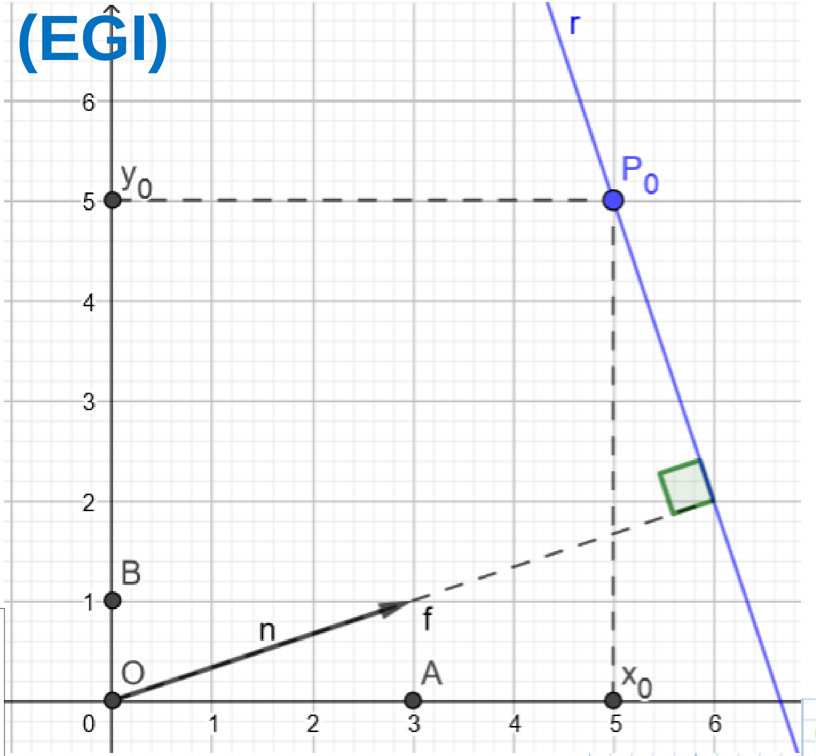
$$(A; B).(x - x_0; y - y_0) = 0$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

$$A\,x - A\,x_0 + By - By_0 = 0$$

$$A\,x + By - A\,x_0 - By_0 = 0$$

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$



Nota Importante:
No existe la Ecuación General Implícita de la recta en R^3

Ecuaciones de Rectas (R^2)

II) Ecuación General Implícita (EGI)

Ejemplo:

Sea la recta r con ecuación $r: 3x - 2y + 6 = 0$

Hallar un vector normal, su módulo, un vector director y un punto de la recta

- Vector normal:

$\vec{n} = (3, -2), |\vec{n}| = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

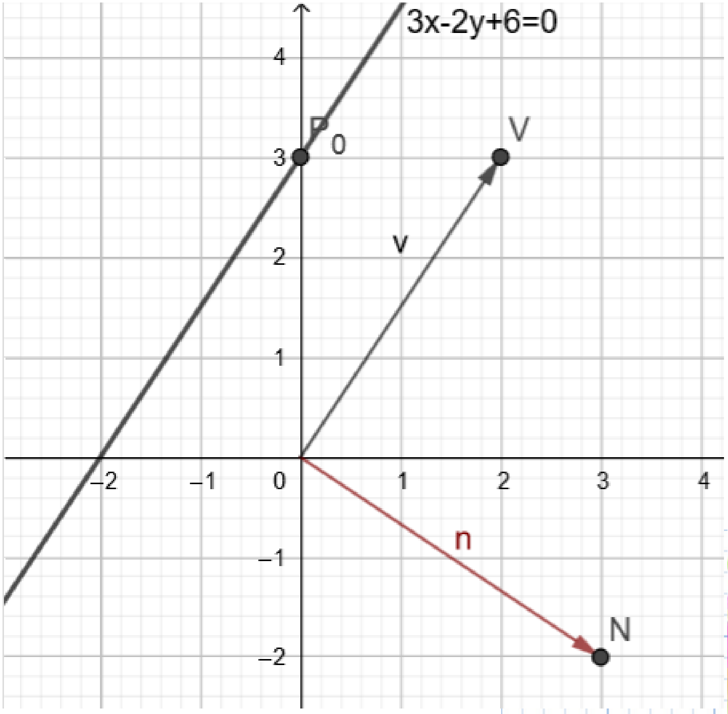
- Vector director:

$\vec{v} = (2; 3)$

- Un punto:

Para obtener un punto, basta con elegir un valor de 'x' y calcular el respectivo 'y'

$P_0(0; 3)$



Ecuaciones de Rectas (R^2)

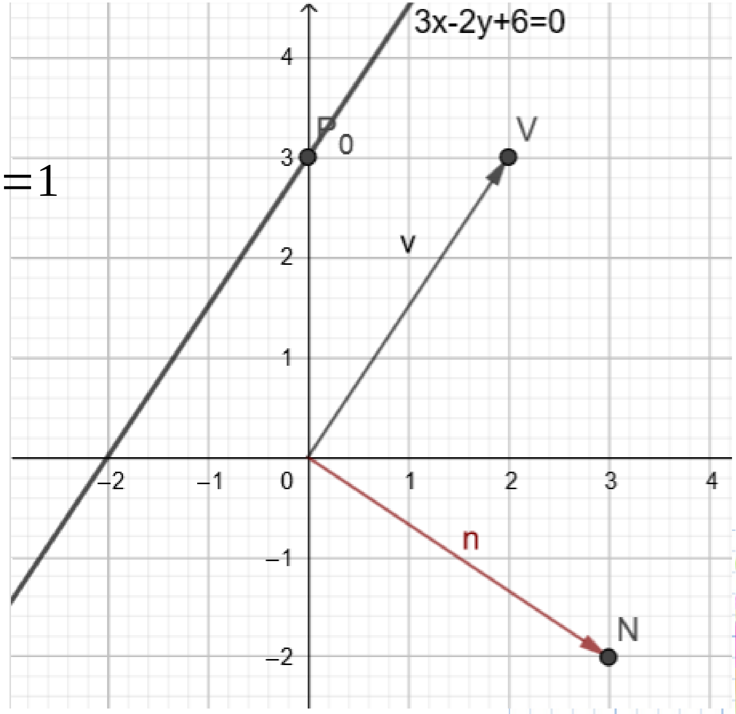
III) Ecuación Normal o Hessiana (a partir de EGI)

A partir del ejemplo anterior:

$$r: 3x-2y+6=0 \ con \ |\vec{n}|=\sqrt{13}$$

$$\frac{1}{\sqrt{13}}(3x-2y+6)=0$$

$$\boxed{\frac{3}{\sqrt{13}}x-\frac{2}{\sqrt{13}}y+\frac{6}{\sqrt{13}}=0} \quad con\ \hat{n}=\left(\frac{3}{\sqrt{13}},\frac{-2}{\sqrt{13}}\right)\wedge|\hat{n}|=1$$



En general:

$$Ax+By+C=0$$

$$\frac{1}{|\vec{n}|}(Ax+By+C)=\frac{1}{|\vec{n}|}0$$

$$\boxed{\frac{A}{|\vec{n}|}x+\frac{B}{|\vec{n}|}y+\frac{C}{|\vec{n}|}=0} \qquad con\ \hat{n}=\left(\frac{A}{|\vec{n}|};\frac{B}{|\vec{n}|}\right)$$

Ecuación Normal o Hessiana

Ecuaciones de Rectas (R^2)

III) Ecuación Normal o Hessiana (a partir de EGI)

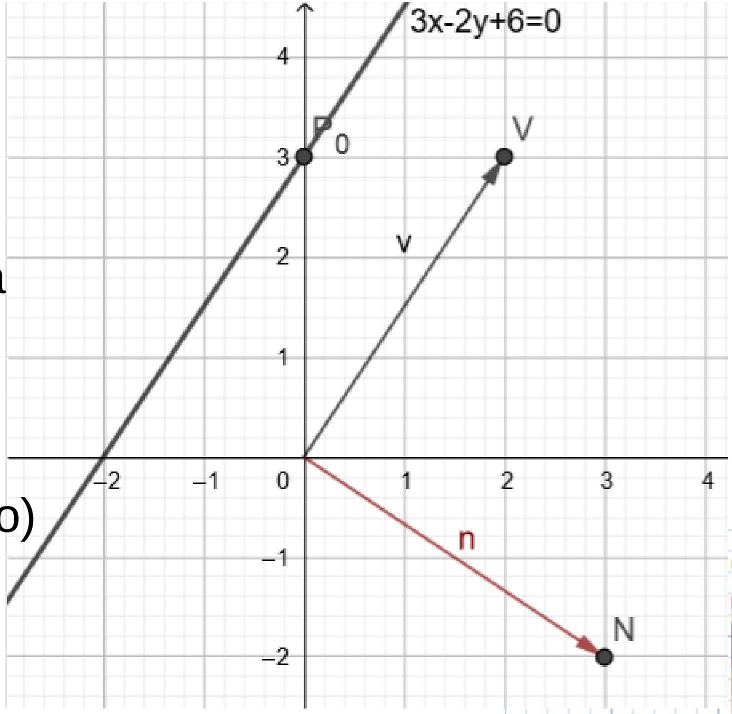
$$como\ \frac{A}{|\vec{n}|}\ y\ \frac{B}{|\vec{n}|}\ son\ cosenos\ directores:$$

$$\cos(\alpha_1)x+\cos(\alpha_2)y+\frac{C}{|\vec{n}|}=0$$

Observación:
El número (C/|n|) corresponde con la distancia
Entre el origen y la recta.

$$\boxed{d(O;r)=\left|\frac{C}{|\vec{n}|}\right|}$$

La barra de valor absoluto está para evitar casos de distancia negativa (absurdo)



Ecuaciones de Rectas (R^2)

IV) Ecuación Segmentaria

$$Condición: O \in r, r \not\parallel eje\ x \wedge r \not\parallel eje\ y:$$

$$r: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r: x\begin{vmatrix} x & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = 0$$

$$r: -bx - ay + ab = 0$$

$$-bx - ay = -ab$$

$$\frac{-bx}{-ab} + \frac{-ay}{-ab} = 1$$

$$\boxed{r: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

Ecuación Segmentaria

Ecuaciones de Rectas (R^2)

IV) Ecuación Segmentaria

Ejemplo:

Hallar la ecuación segmentaria de la recta:

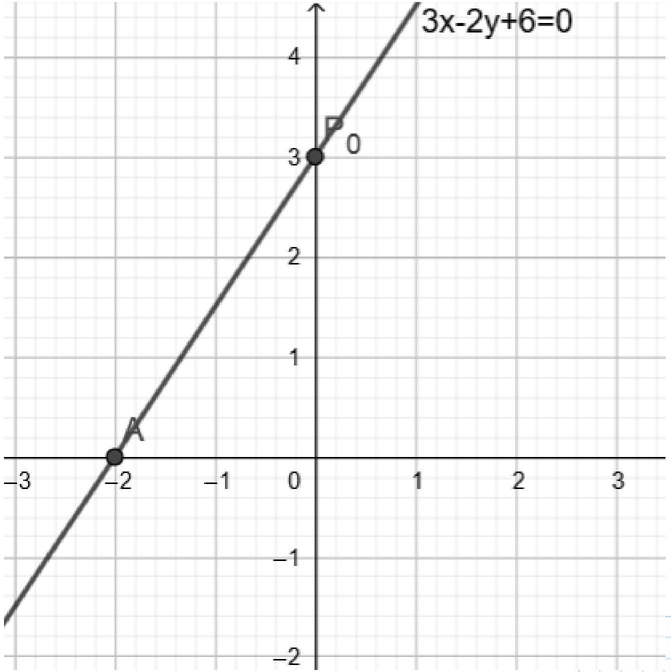
$r: 3x - 2y + 6 = 0$

$$3x - 2y + 6 = 0$$

$$3x - 2y = -6$$

$$\frac{3}{-6}x + \frac{-2}{-6}y = \frac{-6}{-6}$$

$$\boxed{r: \frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1}$$



Ejercicios de la Práctica

Ejercicio 13: Hallar la ecuación en la forma vectorial paramétrica, cartesiano paramétrica, y simétrica de la recta de R3 tal que pasa por A(1;-1;2) y además:

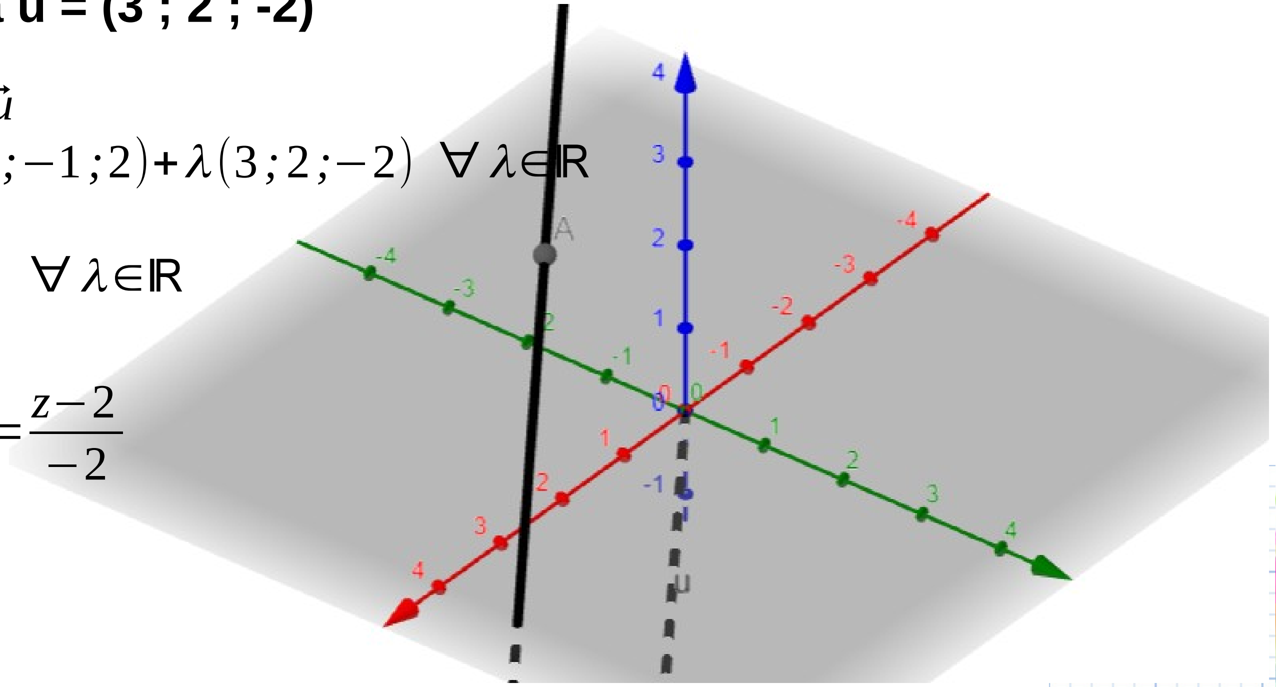
13.1. Sea paralela a $\bar{u}$ = (3 ; 2 ; -2)

$$r: \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{u}$$

EVP: $r: (x; y; z) = (1; -1; 2) + \lambda (3; 2; -2) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

ECP: $r: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

ES: $r: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{-2}$



Ejercicios de la Práctica

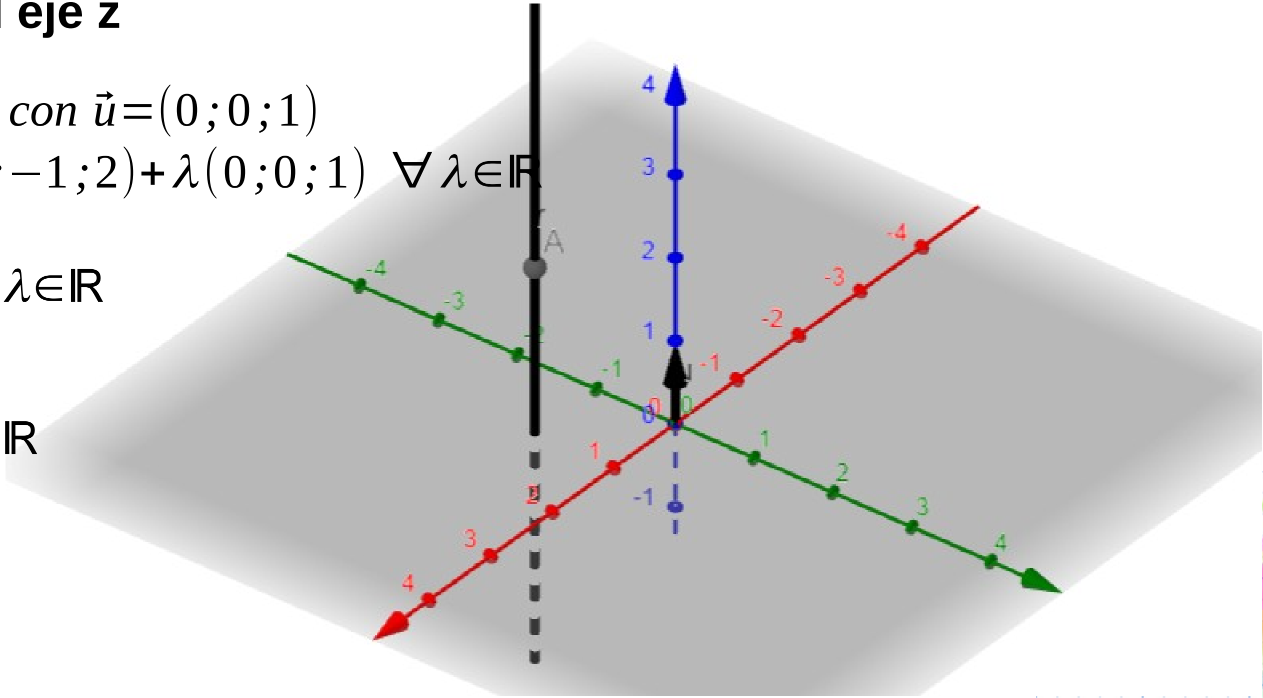
Ejercicio 13: Hallar la ecuación en la forma vectorial paramétrica, cartesiano paramétrica, y simétrica de la recta de R3 tal que pasa por A(1;-1;2) y además:
13.3. Sea paralela al eje z

$$r: \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{u} \ con \ \vec{u} = (0;0;1)$$

EVP: $r: (x;y;z) = (1;-1;2) + \lambda(0;0;1) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

ECP: $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

ES: $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \quad \forall z \in \mathbb{R}$



Ejercicios de la Práctica

Ejercicio 13: Hallar la ecuación en la forma vectorial paramétrica, cartesiano paramétrica, y simétrica de la recta de R3 tal que pasa por A(1;-1;2) y además:

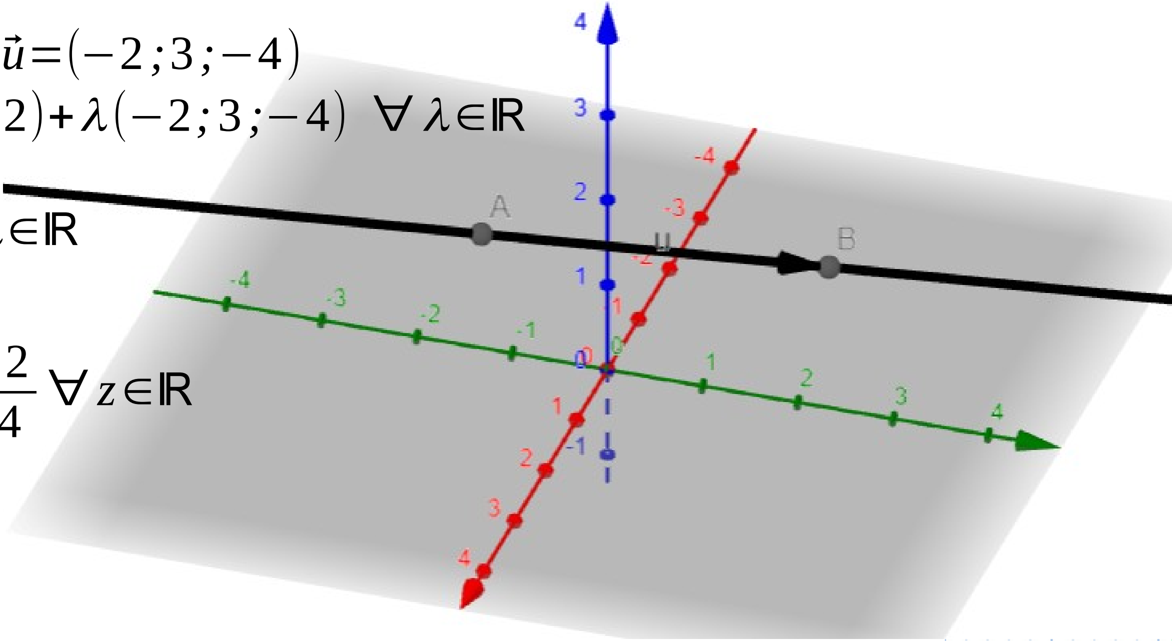
13.5. Pasa por el punto B(-1 ; 2 ; -2)

$$r: \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{u} \; con \; \vec{u} = (-2;3;-4)$$

EVP: $r: (x;y;z) = (1;-1;2) + \lambda(-2;3;-4) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

ECP: $r: \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 2 - 4\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

ES: $r: \left\{ \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-2}{-4} \right. \quad \forall z \in \mathbb{R}$



Ejercicios de la Práctica

Para hacer por los alumnos: el resto del Ejercicio 13