Álgebra y Geometría Analítica

Clase 05: Doble producto mixto y vectorial (solo en R^3)

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

Unidad 1 – Clase 05

01 Repaso de Clases Anteriores

02 Doble Producto mixto entre Vectores

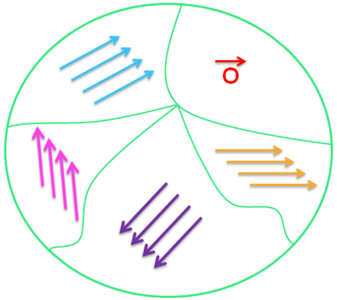
03 Interpretación Geométrica

04 Doble Producto Vectorial

05 Ejercicios

Repaso de Clases Anteriores

✓ Vectores Libres



✓ Componentes de un Vector

$$A(a_1;a_2;a_3) \qquad B(b_1;b_2;b_3)$$

$$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1;b_2-a_2;b_3-a_3)$$

✓ Vector expresado por medio de sus Componentes y coordenadas.

$$\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$$

✓ Módulo de un vector

$$\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2}\in R_{\geq 0}$$

Repaso de Clases Anteriores

OPERACIONES CON VECTORES

I) SUMA DE VECTORES

$$Sean: \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \wedge \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{b} = (b_1; b_2; b_3):$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$$

PROPIEDADES:

1. Ley de Composición Interna
2. Propiedad Conmutativa
3. Propiedad Asociativa
4. Existencia de Elemento Neutro
5. Elemento Opuesto

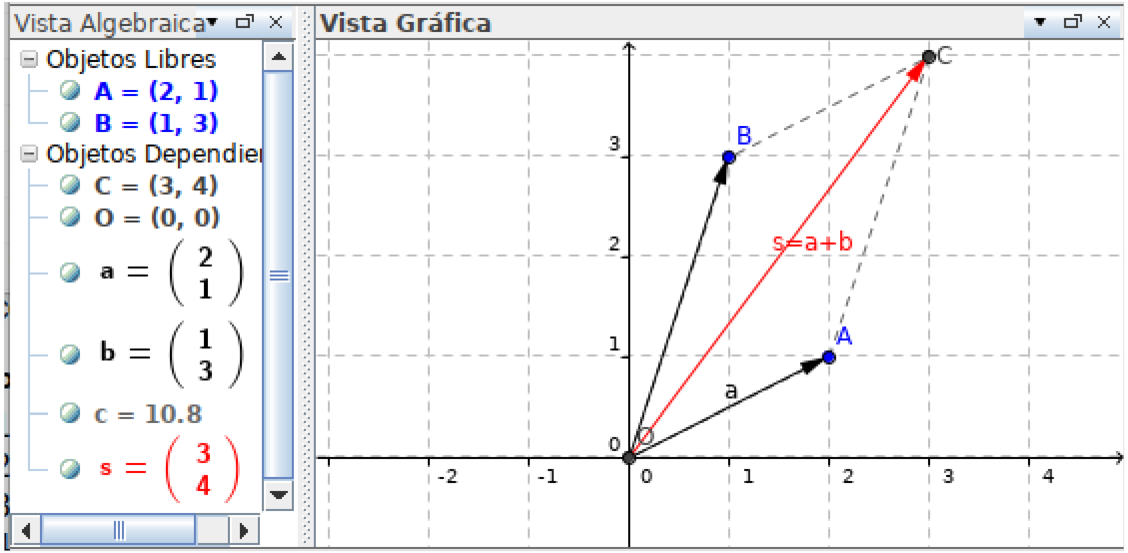
Repaso de Clases Anteriores

OPERACIONES CON VECTORES

I) SUMA DE VECTORES

$$Sean: \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \wedge \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{b} = (b_1; b_2; b_3):$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$$



Repaso de Clases Anteriores

OPERACIONES CON VECTORES

II) PRODUCTO DE ESCALAR Y VECTOR

$$Sean: \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge \alpha \in \mathbb{R}:$$

$$\alpha \vec{a} = (\alpha a_1 ; \alpha a_2 ; \alpha a_3)$$

PROPIEDADES

$$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \wedge \forall \vec{c} \in \mathbb{R}^3 \wedge \forall \alpha \in \mathbb{R} \wedge \forall \beta \in \mathbb{R}$$

(a) Ley de Composición Externa $\alpha \vec{a} \in \mathbb{R}^3$

(b) Asociativa Mixta $(\alpha \beta) \vec{a} = \alpha (\beta \vec{a})$

(c) Existencia de Escalar Neutro $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \ \exists \ 1 \in \mathbb{R} \ / \ 1 \vec{a} = \vec{a}$

(d) Distributiva respecto a la suma de Escalares $(\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$

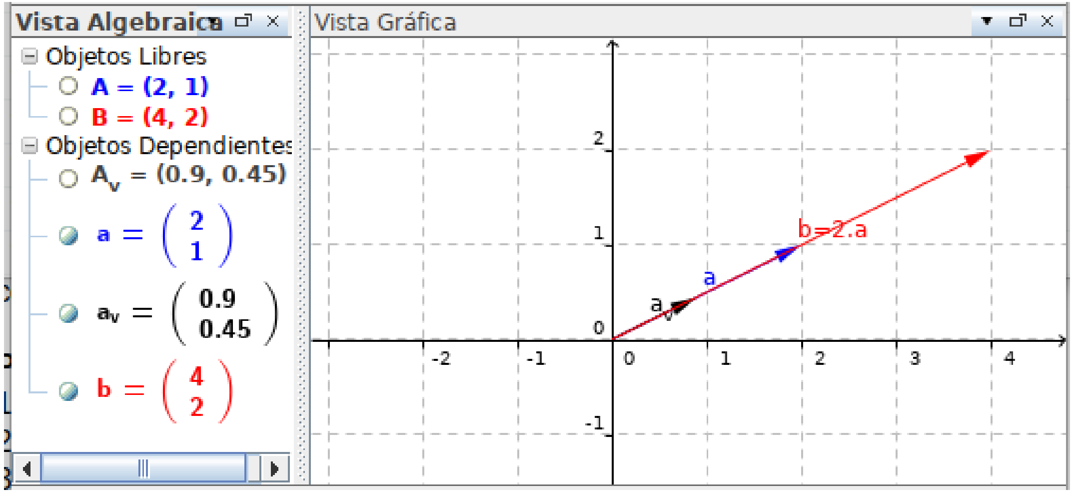
(e) Distributiva respecto a la suma de vectores $\alpha (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$

Repaso de Clases Anteriores

OPERACIONES CON VECTORES

II) PRODUCTO DE ESCALAR Y VECTOR

$$Sean: \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge \alpha \in \mathbb{R}:$$
$$\alpha \vec{a} = (\alpha a_1; \alpha a_2; \alpha a_3)$$



Versores:

$$\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} \quad \text{con: } |\hat{a}| = 1$$

Condición de Paralelismo:

$$Sean: \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{a} \neq \vec{0} \wedge \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{b} \neq \vec{0}:$$
$$\vec{a} \,//\, \vec{b} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} / \vec{a} = \alpha \vec{b}$$

Repaso de Clases Anteriores

III) Producto Escalar entre Vectores (o Producto Punto)

$$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n \wedge \vec{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n) \wedge \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n \wedge \vec{b} = (b_1; b_2; \dots; b_n):$$

$$\vec{a} . \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{i=n} a_i b_i$$

Repaso de Clases Anteriores

III) Producto Escalar entre Vectores

PROPIEDADES:

$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3, \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^3, \forall \vec{c} \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

No cumple:

- LCI ==> No cumple propiedades de la Suma
- LCE ==> No cumple propiedades del producto de escalar y vector.

Sin embargo se verifican las siguientes propiedades:

(a) Conmutativa: $\overline{a}.\overline{b} = \overline{b}.\overline{a}$

(b) Asociativa con escalar: $\alpha(\overline{a} \,.\, \overline{b}) = (\alpha\overline{a}) \,.\, \overline{b}$

(c) Distributiva del producto escalar respecto de la Suma de vectores: $\overline{a} \,.\, (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \,.\, \overline{b} + \overline{a} \,.\, \overline{c}$

(d) $\vec{a}.\vec{a} \geq 0 \wedge \left(\vec{a}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}\right)$

$\boxed{Recordar: \ \vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^2}$

Repaso de Clases Anteriores

III) Producto Escalar entre Vectores

Interpretación Geométrica

$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{a} \neq \vec{0} \wedge \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{b} \neq \vec{0}:$

$\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi$

Angulo entre vectores:

$\phi = \arccos\left(\dfrac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$ (es el menor ángulo)

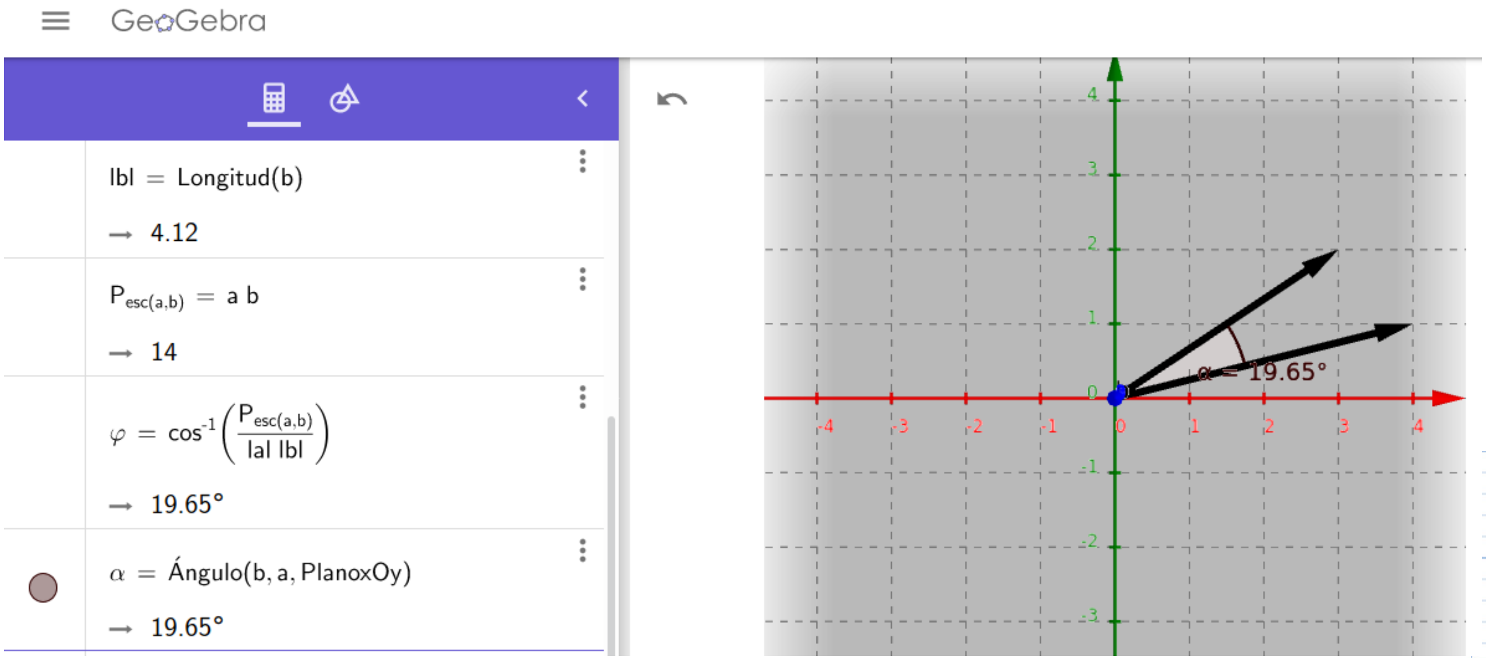
Condición de ortogonalidad:

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\,.\,\vec{b} = 0$

Repaso de Clases Anteriores

III) Producto Escalar entre Vectores

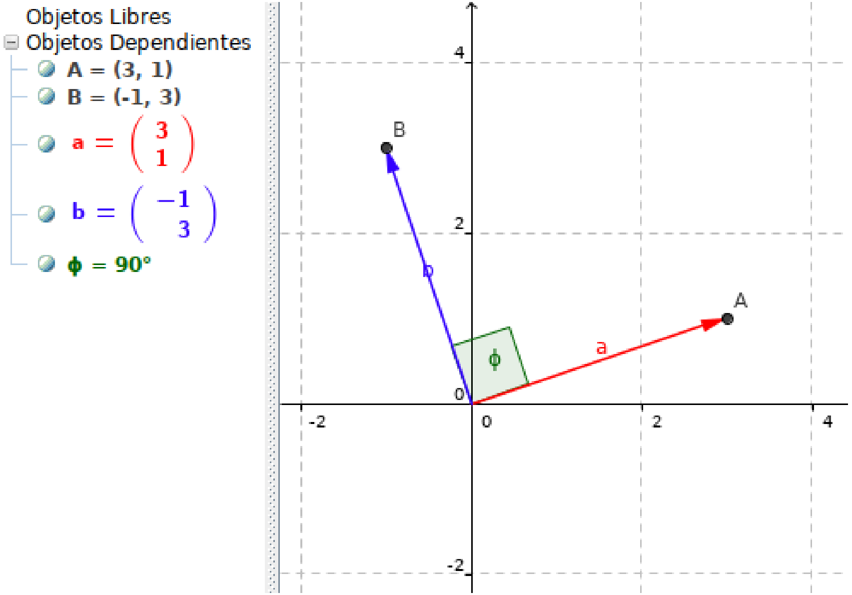
Angulo entre vectores:



Repaso de Clases Anteriores

III) Producto Escalar entre Vectores

Condición de ortogonalidad:



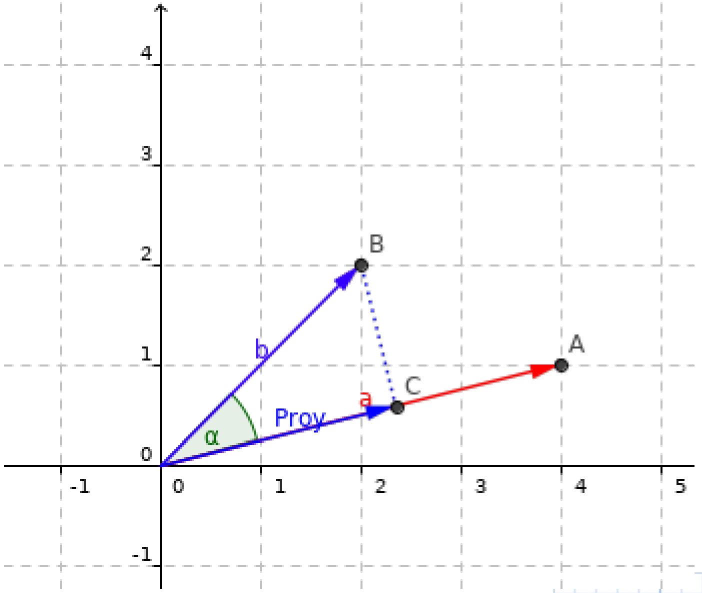
Repaso de Clases Anteriores

PROYECCION DE UN VECTOR SOBRE LA DIRECCIÓN DE OTRO

$$\cos\alpha = \frac{Proy_a \vec{b}}{|\vec{b}|} \Rightarrow Proy_a \vec{b} = |\vec{b}|\cos\alpha$$

$$Proy_a \vec{b} = \frac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|}$$ es un número

$$\overrightarrow{Proy_a \vec{b}} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|}\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\vec{a}.\vec{a}}\vec{a}$$ es un vector



Operaciones con Vectores

IV) Producto Vectorial entre Vectores (Producto Cruz)

Es una operación propia de vectores de R^3

$$Datos:\begin{cases}\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)\\ \vec{b}=(b_1;b_2;b_3)\end{cases}$$

Se obtiene a partir de un pseudo-determinante:

$$\vec{a}\,x\,\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\hat{i}\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}-\hat{j}\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2.b_3-a_3.b_2;-(a_1.b_3-a_3.b_1);a_1.b_2-a_2.b_1)$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)\in\mathbb{R}^3$$

Operaciones con Vectores

IV) Producto Vectorial entre Vectores (Producto Cruz)

PROPIEDADES:

$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3, \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^3, \forall \vec{c} \in \mathbb{R}^3, \forall \vec{d} \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

1) Anticonmutativa:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

2) Asociativa con escalar:

$$\alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = (\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha \vec{b})$$

3) Distributiva respecto de la suma de vectores:

Pre-distributiva: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Post-distributiva: $(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{d} = \vec{b} \times \vec{d} + \vec{c} \times \vec{d}$

Operaciones con Vectores

IV) Producto Vectorial entre Vectores (Producto Cruz)

Atributos del vector resultado:

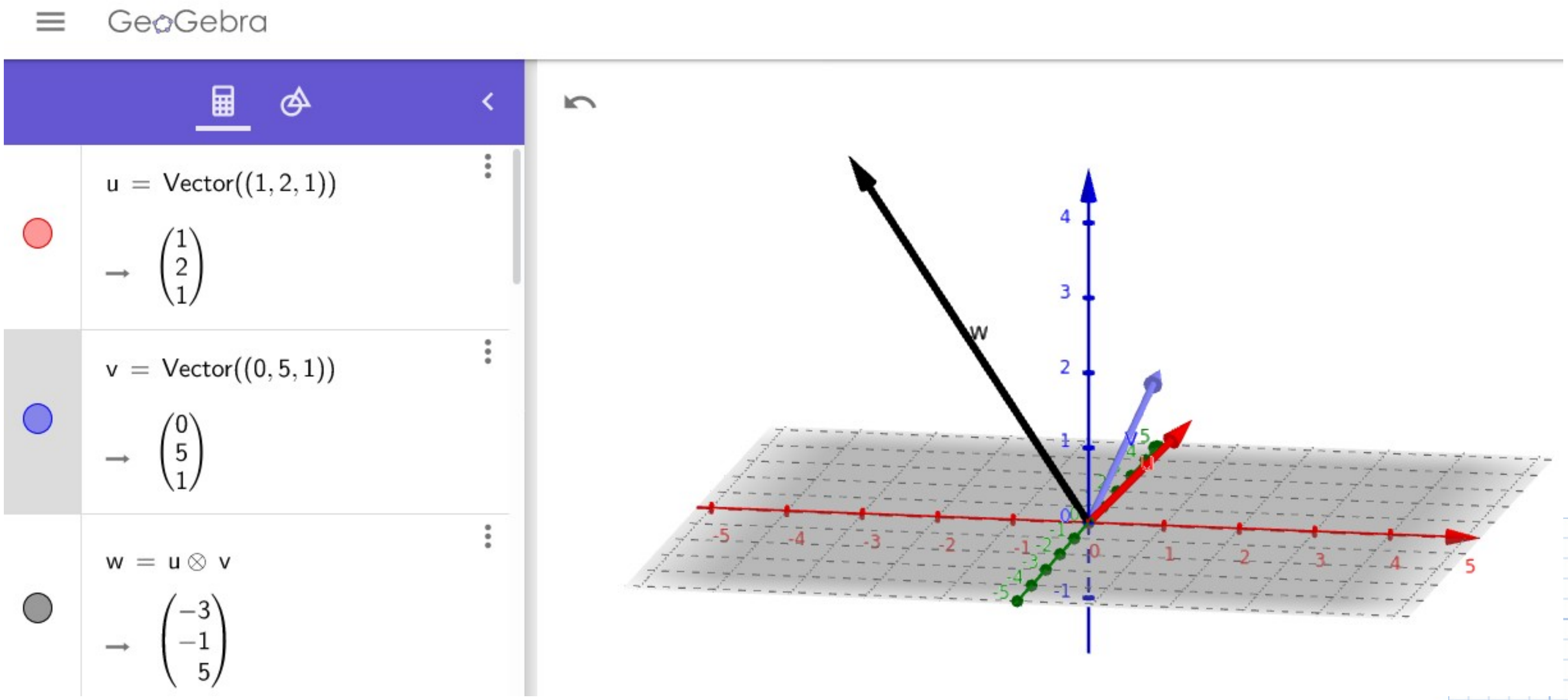
Dirección: *El vector resultado es ortogonal al plano formado por los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$.*

Sentido: No está bien definido (ternas positivas o negativas)

Módulo: Es el área del paralelogramo que tiene por lados a los vectores.

Operaciones con Vectores

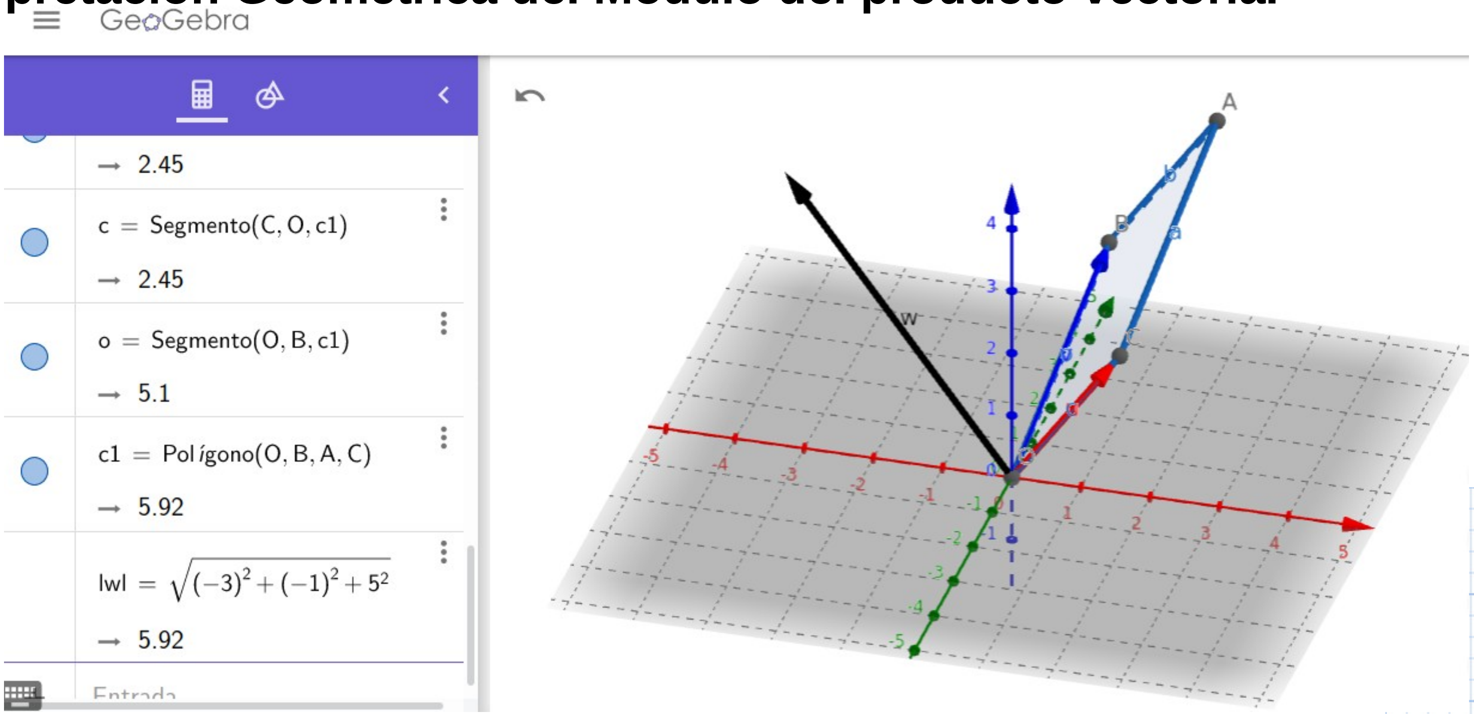
IV) Producto Vectorial entre Vectores (Producto Cruz)



Operaciones con Vectores

IV) Producto Vectorial entre Vectores (Producto Cruz)

Interpretación Geométrica del Módulo del producto vectorial



Doble Producto Mixto de Vectores

V) Doble Producto Mixto entre Vectores

Está definido para R^3 ya que participan las operaciones producto escalar y producto vectorial, y el producto vectorial solo está definido en R^3.

$$Sean: \vec{a}=(a_1;a_2;a_3), \vec{b}=(b_1;b_2;b_3), \vec{c}=(c_1;c_2;c_3)$$

$$\vec{a}.(\vec{b}\,x\,\vec{c})=(a_1;a_2;a_3).(b_2c_3-b_3c_2;b_3c_1-b_1c_3;b_1c_2-b_2c_1)$$
$$\vec{a}.(\vec{b}\,x\,\vec{c})=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)$$
$$\vec{a}.(\vec{b}\,x\,\vec{c})=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1$$

$$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1).(c_1;c_2;c_3)$$
$$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}=(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3$$
$$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}=a_2b_3c_1-a_3b_2c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2+a_1b_2c_3-a_2b_1c_3$$

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}.\vec{c}=(\vec{a};\vec{b};\vec{c})}$$

Doble Producto Mixto de Vectores

V) Doble Producto Mixto entre Vectores

Otra forma de cálculo:

$$(\vec{a};\vec{b};\vec{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{a};\vec{b};\vec{c})=a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)$$

$$(\vec{a};\vec{b};\vec{c})=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1=\vec{a}.(\vec{b}\,x\,\vec{c})$$

Doble Producto Mixto de Vectores

V) Doble Producto Mixto entre Vectores

PROPIEDADES:

1) Conmutativa de orden cíclico:

$(\bar{a} ; \bar{b} ; \bar{c}) = (\bar{b} ; \bar{c} ; \bar{a}) = (\bar{c} ; \bar{a} ; \bar{b})$ (en un orden)

$(\bar{a} ; \bar{b} ; \bar{c}) = (\bar{c} ; \bar{a} ; \bar{b}) = (\bar{b} ; \bar{c} ; \bar{a})$ (en otro orden)

Pero:

$(\bar{a} ; \bar{b} ; \bar{c}) = -(\bar{b} ; \bar{a} ; \bar{c})$

Ya que:

$(\bar{a} \times \bar{b}) . \bar{c} = -(\bar{b} \times \bar{a}) . \bar{c}$

2) Distributiva respecto de suma de vectores:

$(\bar{a} + \bar{b} ; \bar{c} ; \bar{d}) = (\bar{a} ; \bar{c} ; \bar{d}) + (\bar{b} ; \bar{c} ; \bar{d})$

Doble Producto Mixto de Vectores

V) Doble Producto Mixto entre Vectores

Observaciones:

1) $(\overline{a}\ ;\ \overline{b}\ ;\ \overline{0}) = 0$

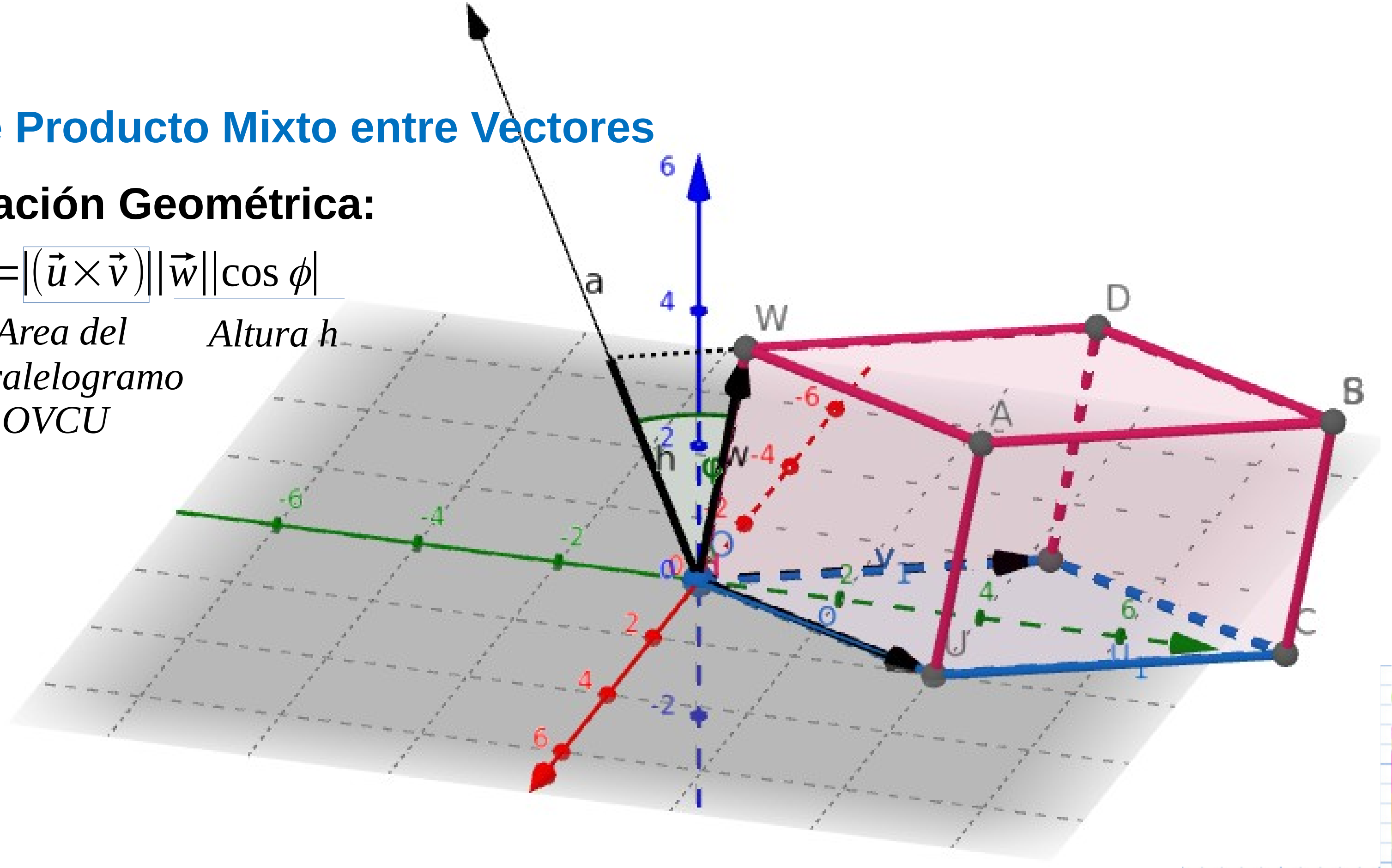
2) $(\overline{a}\ ;\ \overline{b}\ ;\ \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}) = (\overline{a}\ ;\ \overline{b}\ ;\ \alpha\overline{a}) + (\overline{a}\ ;\ \overline{b}\ ;\ \beta\overline{b}) = 0$

Doble Producto Mixto de Vectores

V) Doble Producto Mixto entre Vectores

Interpretación Geométrica:

$$\left|\left(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}\right)\right| = \underbrace{\left|\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\right|}_{\substack{\text{Area del}\\ \text{Paralelogramo}\\ \text{OVCU}}}\underbrace{\left|\vec{w}\right|\left|\cos\phi\right|}_{\text{Altura } h}$$



Doble Producto Mixto de Vectores

V) Doble Producto Mixto entre Vectores

Interpretación Geométrica:

$$|(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w})|=|(\vec{u}\times\vec{v})||\vec{w}||\cos\phi|$$

$|(\overline{u}\ ;\ \overline{v}\ ;\ \overline{w})|$ = Volumen del paralelepípedo con aristas $\overline{u}$, $\overline{v}$ y $\overline{w}$.

Nota: Se ponen las barras de valor absoluto para los casos en los que el angulo ϕ es negativo, lo que resultaría en un absurdo: un volumen negativo.

Doble Producto Mixto de Vectores

V) Doble Producto Mixto entre Vectores

Interpretación Geométrica: Ejemplo

Sean los vectores $\overline{u} = (2 ; 4 ; 0)$, $\overline{v} = (0 ; 5; 1)$, $\overline{w} = (1 ; 1 ; 4)$.

a) Hallar $(\overline{u} ; \overline{v} ; \overline{w})$

b) Hallar el volumen del paralelepípedo S determinado por $\overline{u}$, $\overline{v}$ y $\overline{w}$.

a) $\overline{u} = (2 ; 4 ; 0)$
$\overline{v} = (0 ; 5; 1)$
$\overline{w} = (1 ; 1 ; 4)$

$(\overline{u} ; \overline{v} ; \overline{w}) = (\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{w}$
$(\overline{u} ; \overline{v} ; \overline{w}) = (4 ; -2 ; 10) \cdot (1 ; 1 ; 4)$
$(\overline{u} ; \overline{v} ; \overline{w}) = 4 – 2 + 40$
$(u ; v ; w) = 42$

b) $V(S) = |(\overline{u} ; \overline{v} ; \overline{w})| = |42|$
$V(S) = 42$

Doble Producto Mixto de Vectores

V) Doble Producto Mixto entre Vectores

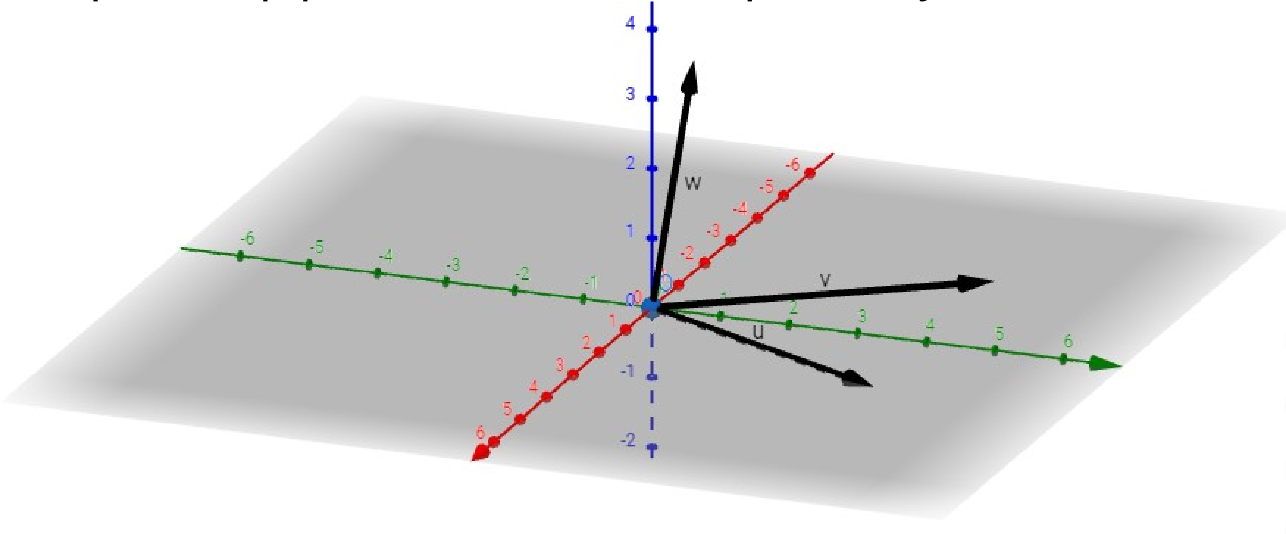
Interpretación Geométrica: Ejemplo

Sean los vectores $\overline{u} = (2\ ;\ 4\ ;\ 0)$, $\overline{v} = (0\ ;\ 5;\ 1)$, $\overline{w} = (1\ ;\ 1\ ;\ 4)$.

a) Hallar $(\overline{u}\ ;\ \overline{v}\ ;\ \overline{w})$

b) Hallar el volumen del paralelepípedo S determinado por $\overline{u}$, $\overline{v}$ y $\overline{w}$.

Los vectores



Doble Producto Mixto de Vectores

V) Doble Producto Mixto entre Vectores

Interpretación Geométrica: Ejemplo

Sean los vectores $\overline{u} = (2\ ;\ 4\ ;\ 0)$, $\overline{v} = (0\ ;\ 5;\ 1)$, $\overline{w} = (1\ ;\ 1\ ;\ 4)$.

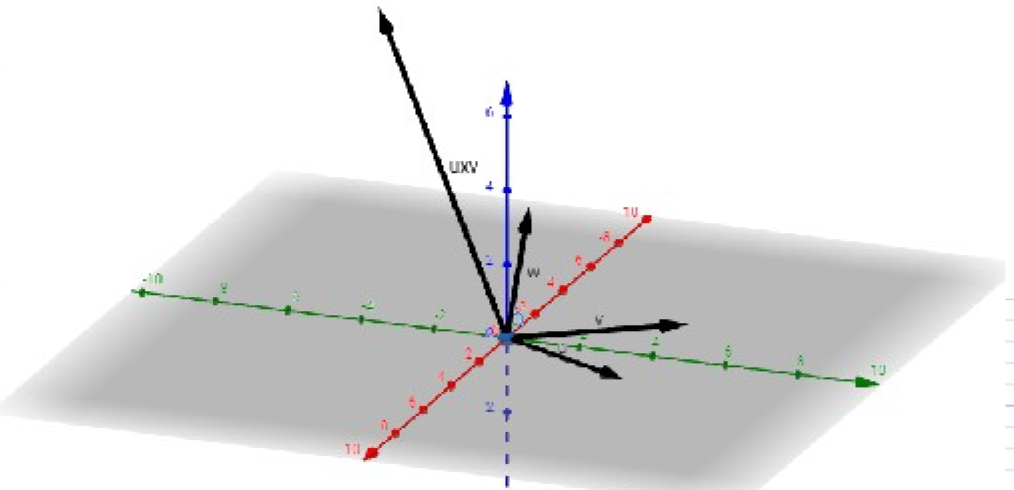
a) Hallar $(\overline{u}\ ;\ \overline{v}\ ;\ \overline{w})$

b) Hallar el volumen del paralelepípedo S determinado por $\overline{u}$, $\overline{v}$ y $\overline{w}$.

El producto vectorial

$$uxv = u \otimes v$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$$



Doble Producto Mixto de Vectores

V) Doble Producto Mixto entre Vectores

Interpretación Geométrica: Ejemplo

Sean los vectores $\overline{u} = (2\ ;\ 4\ ;\ 0)$, $\overline{v} = (0\ ;\ 5;\ 1)$, $\overline{w} = (1\ ;\ 1\ ;\ 4)$.

a) Hallar $(\overline{u}\ ;\ \overline{v}\ ;\ \overline{w})$

b) Hallar el volumen del paralelepípedo S determinado por $\overline{u}$, $\overline{v}$ y $\overline{w}$.

El módulo del producto vectorial

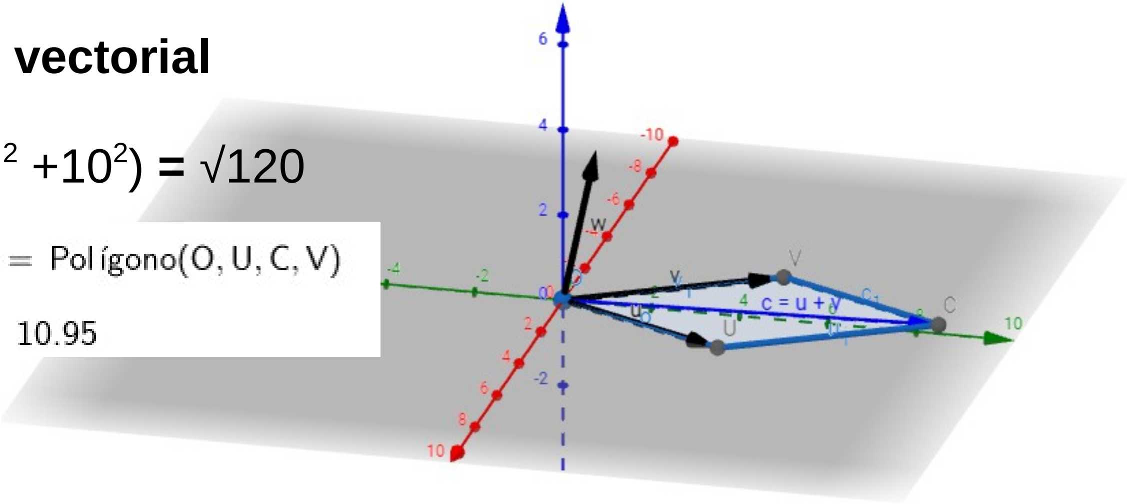
Con $|(\overline{u} \times \overline{v})| = \sqrt{(4^2 + (-2)^2 + 10^2)} = \sqrt{120}$

a = Longitud(uxv)

→ 10.95

c1 = Polígono(O, U, C, V)

→ 10.95



Doble Producto Mixto de Vectores

V) Doble Producto Mixto entre Vectores

Interpretación Geométrica: Ejemplo

Sean los vectores $\overline{u} = (2 ; 4 ; 0)$, $\overline{v} = (0 ; 5; 1)$, $\overline{w} = (1 ; 1 ; 4)$.

a) Hallar $(\overline{u} ; \overline{v} ; \overline{w})$

b) Hallar el volumen del paralelepípedo S determinado por $\overline{u}$, $\overline{v}$ y $\overline{w}$.

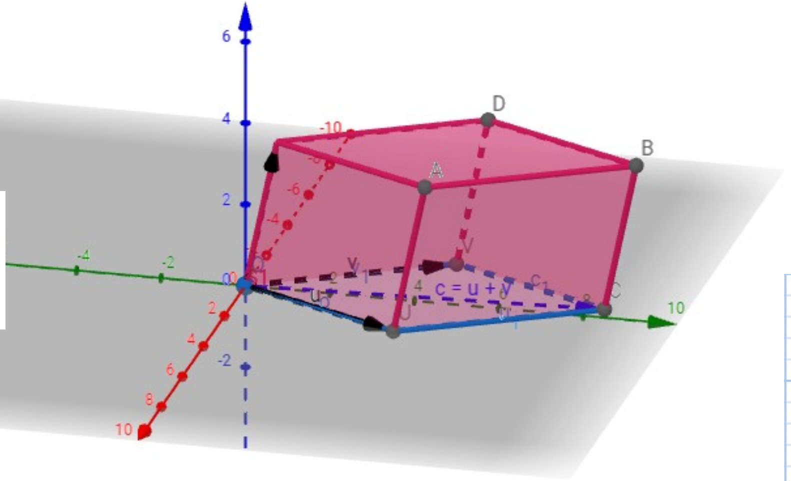
El doble producto mixto

A = uxv w

→ 42

S1 = Prisma(c1, W)

→ 42



Doble Producto Mixto de Vectores

V) Doble Producto Mixto entre Vectores

Condición de Coplanaridad

Tres vectores no nulos de R^3 resultan coplanares si y solo sí su producto Mixto resulta cero.

H) $\vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{a} \neq \vec{0} \wedge \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{b} \neq \vec{0} \wedge \vec{c} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{c} \neq \vec{0}$

T) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\ coplanares \Leftrightarrow (\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}) = 0$

Doble Producto Mixto de Vectores

V) Doble Producto Mixto entre Vectores

Condición de Coplanaridad

Tres vectores no nulos de R^3 resultan coplanares si y solo sí su producto Mixto resulta cero.

H) $\vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{a} \neq \vec{0} \wedge \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{b} \neq \vec{0} \wedge \vec{c} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{c} \neq \vec{0}$

T) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *coplanares* $\Leftrightarrow (\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}) = 0$

$\Rightarrow$ H1) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *coplanares*

T1) $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}) = 0$

D1) $|(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})| = |\vec{a} \, x \, \vec{b}||\vec{c}| \cos\phi$

$$Por \;\; ser \;\; coplanares: \phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})| = |\vec{a} \, x \, \vec{b}||\vec{c}| \cos\frac{\pi}{2}$$

$$|(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})| = 0 \Rightarrow (\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}) = 0$$

Doble Producto Mixto de Vectores

V) Doble Producto Mixto entre Vectores

Condición de Coplanaridad (cont.)

$\Leftarrow$ H2) $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})=0$

T2) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *coplanares*

D2) $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})=\vec{a}\,x\,\vec{b}.\vec{c}$

$$|(\vec{a};\vec{b};\vec{c})|=|\vec{a}\,x\,\vec{b}||\vec{c}||\cos\phi|$$

$$Por\ hipótesis:|\vec{a}\,x\,\vec{b}|=0\vee|\vec{c}|=0\vee|\cos\phi|=0:$$

$$|\vec{a}\,x\,\vec{b}|=0\Rightarrow\vec{a}//\vec{b}\,(son\ coplanares)$$

$$|\vec{c}|=0\Rightarrow\vec{c}=\vec{0}\,(absurdo\ por\ hipótesis)$$

$$|\cos\phi|=0\Rightarrow\vec{a},\vec{b},\vec{c}\ coplanares$$

Doble Producto Vectorial

VI) Doble Producto Vectorial

Operación válida para R^3.

$$\vec{a}=(a_1;a_2;a_3),\vec{b}=(b_1;b_2;b_3),\vec{c}=(c_1;c_2;c_3)$$

$$(\vec{a}\,x\,\vec{b})\,x\,\vec{c}\ es\ un\ vector\ en\ el\ plano\ formado\ por: \vec{a}\ y\,\vec{b}$$

$$\vec{a}\,x\,(\vec{b}\,x\,\vec{c})\ es\ un\ vector\ en\ el\ plano\ formado\ por: \vec{b}\ y\,\vec{c}$$

Cálculo:

$$(\vec{a}\,x\,\vec{b})\,x\,\vec{c}=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}.\vec{c})\vec{a}$$

$$\vec{a}\,x\,(\vec{b}\,x\,\vec{c})=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$$

Doble Producto Vectorial

VI) Doble Producto Vectorial

Cálculo: Demostración.

$$(\vec{a}\,x\,\vec{b})\,x\,\vec{c}=(\vec{a}\,.\,\vec{c})\,\vec{b}-(\vec{b}\,.\,\vec{c})\,\vec{a}$$

D) $(\vec{a}\,x\,\vec{b})\,x\,\vec{c}:$

$$(\vec{a}\,x\,\vec{b})=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1),\vec{c}(c_1;c_2;c_3)$$

$$\begin{aligned}(\vec{a}\,x\,\vec{b})\,x\,\vec{c}=(&a_3b_1c_3-a_1b_3c_3-a_1b_2c_2+a_2b_1c_2;\\ &a_1b_2c_1-a_2b_1c_1-a_2b_3c_3+a_3b_2c_3;\\ &a_2b_3c_2-a_3b_2c_2-a_3b_1c_1+a_1b_3c_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\vec{a}\,x\,\vec{b})\,x\,\vec{c}=(&a_3b_1c_3-a_1b_3c_3-a_1b_2c_2+a_2b_1c_2+a_1b_1c_1-a_1b_1c_1;\\ &a_1b_2c_1-a_2b_1c_1-a_2b_3c_3+a_3b_2c_3+a_2b_2c_2-a_2b_2c_2;\\ &a_2b_3c_2-a_3b_2c_2-a_3b_1c_1+a_1b_3c_1+a_3b_3c_3-a_3b_3c_3)\end{aligned}$$

Doble Producto Vectorial

VI) Doble Producto Vectorial

Cálculo: Demostración (cont.)

$$(\vec{a}\, x\, \vec{b})\, x\, \vec{c} = (b_1(a_3c_3+a_2c_2+a_1c_1); b_2(a_1c_1+a_3c_3+a_2c_2); b_3(a_3c_3+a_2c_2+a_1c_1)) -$$

$$-(a_1(b_3c_3+b_2c_2+b_1c_1); a_2(b_1c_1+b_3c_3+b_2c_2); a_3(b_2c_2+b_1c_1+b_3c_3)) =$$

$$= (b_1(\vec{a}.\vec{c}); b_2(\vec{a}.\vec{c}); b_3(\vec{a}.\vec{c})) - (a_1(\vec{b}.\vec{c}); a_2(\vec{b}.\vec{c}); a_3(\vec{b}.\vec{c})) =$$

$$= (\vec{a}.\vec{c})(b_1; b_2; b_3) - (\vec{b}.\vec{c})(a_1; a_2; a_3)$$

$$\boxed{(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}.\vec{c})\vec{a}}$$

Productos con Vectores

Resumen

Condiciones interesantes

$$\forall \vec{a} \neq \vec{0} \wedge \forall \vec{b} \neq \vec{0} \wedge \forall \vec{c} \neq \vec{0}$$

Condiciones de Paralelismo

$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} / \vec{a} = \alpha \vec{b}$$

$$Solo\ en\ R^3 : \vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

Condición de ortogonalidad

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} . \vec{b} = 0$$

Condición de coplanaridad

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\ son\ coplanares \Leftrightarrow (\vec{a} ; \vec{b} ; \vec{c}) = 0$$

Cálculos de interés geométrico

Versor asociado a un vector

$$\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \ \wedge \ |\hat{a}| = 1$$

El ángulo entre dos vectores

$$\phi = \arccos\left(\frac{\vec{a} . \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \right)$$

El área del paralelogramo

$$|\vec{a} \times \vec{b}| : Area\ del\ paralelogramo$$

El volumen del paralelepípedo

$$|(\vec{a} ; \vec{b} ; \vec{c})| : Volumen\ del\ paralelepípedo$$

Ejercicios de la Práctica

Ejercicio 10.1: $Sean\ los\ vectores: \vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}, \vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}, \vec{c}=\alpha\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$

a) Determinar α para que los vectores resulten coplanares.

$$Datos: \begin{cases} \vec{a}=(2;-1;1) \\ \vec{b}=(1;2;1) \\ \vec{c}=(\alpha;-1;-1) \end{cases}$$

Para que los vectores resulten coplanares, el producto mixto debe ser nulo.

$$(\vec{a};\vec{b};\vec{c})=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ \alpha & -1 & -1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & -1 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \alpha & -1 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{a};\vec{b};\vec{c})=2(2(-1)-1(-1))+1(1(-1)-\alpha)+(-1-2\alpha)=-2-1-\alpha-1-2\alpha$$

$$(\vec{a};\vec{b};\vec{c})=0 \Rightarrow -3\alpha-4=0 \Rightarrow \boxed{\alpha=\frac{-4}{3}}$$

Ejercicios de la Práctica

Ejercicio 10.1: $Sean\ los\ vectores: \vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}, \vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}, \vec{c}=\alpha\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$
b) Determinar α para que el volumen del paralelepípedo determinado por
Los vectores resulte 5.

$$Datos: \begin{cases} \vec{a}=(2;-1;1) \\ \vec{b}=(1;2;1) \\ \vec{c}=(\alpha;-1;-1) \end{cases}$$

Para que el volumen del paralelepípedo sea 5, el
Valor absoluto del producto mixto debe dar cinco.

$$(\vec{a};\vec{b};\vec{c})=2(2(-1)-1(-1))+1(1(-1)-\alpha)+(-1-2\alpha)=-2-1-\alpha-1-2\alpha$$

$$|(\vec{a};\vec{b};\vec{c})|=5 \Rightarrow |-3\alpha-4|=5 \Rightarrow \boxed{\alpha=-3} \vee \boxed{\alpha=\frac{1}{3}}$$

Ejercicios de la Práctica

Para hacer por los alumnos:

Ejercicio 10.2:
Determinar si los puntos P(1 ; -2 ; 0), Q(0 ; -1 ; 3), R(-1 ; 1 ; 0) y S(0 ; 2 ; -2) son coplanares.

Ejercicio 10.3:
¿Para qué valores de m los vectores $\overline{u} = (1 ; 1 ; m)$, $\overline{v} = (1 ; 1 ; m+1)$, $\overline{w} = (1 ; -1 ; m)$ son coplanares?

Ejercicio 10.4:
Justificar la validez de la siguiente sentencia:

$$Si\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\ y\ \vec{d}\ están\ en\ un\ mismo\ plano\ entonces\ (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{0}$$