Álgebra y Geometría Analítica

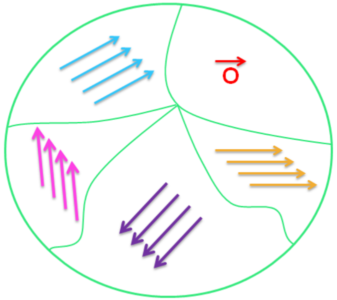
Clase 04: El producto vectorial entre vectores (solo de R^3)

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

Unidad 1 – Clase 04

Repaso de Clases Anteriores

✓ Vectores Libres



✓ Componentes de un Vector

$$A(a_1;a_2;a_3) \qquad B(b_1;b_2;b_3)$$

$$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1;b_2-a_2;b_3-a_3)$$

✓ Vector expresado por medio de sus Componentes y coordenadas.

$$\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$$

✓ Módulo de un vector

$$\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2}\in R_{\geq 0}$$

Repaso de Clases Anteriores

OPERACIONES CON VECTORES

I) SUMA DE VECTORES

$$Sean: \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \wedge \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{b} = (b_1; b_2; b_3):$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$$

PROPIEDADES:

1. Ley de Composición Interna
2. Propiedad Conmutativa
3. Propiedad Asociativa
4. Existencia de Elemento Neutro
5. Elemento Opuesto

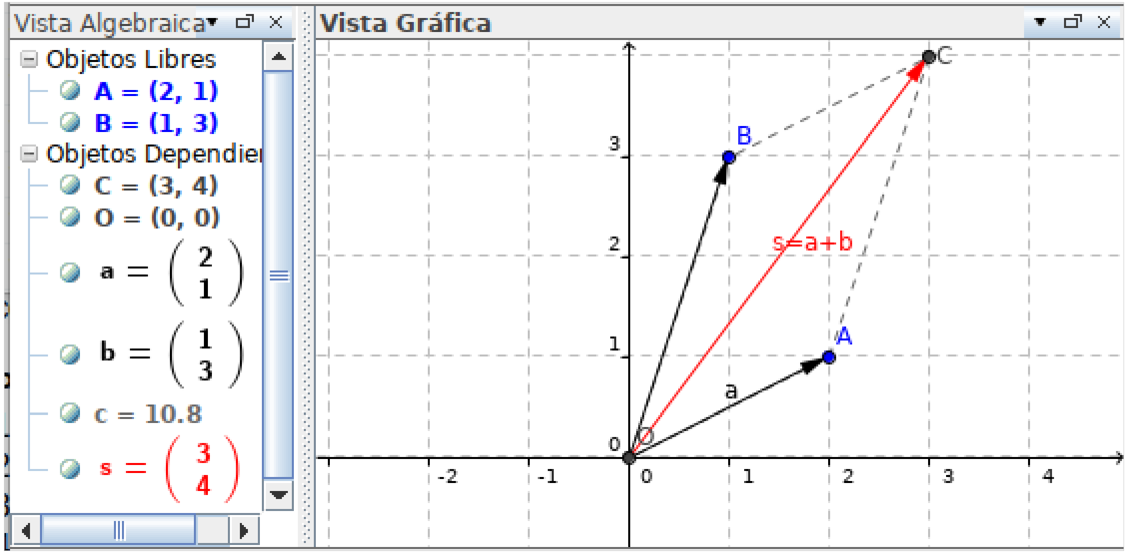
Repaso de Clases Anteriores

OPERACIONES CON VECTORES

I) SUMA DE VECTORES

$$Sean: \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \wedge \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{b} = (b_1; b_2; b_3):$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$$



Repaso de Clases Anteriores

OPERACIONES CON VECTORES

II) PRODUCTO DE ESCALAR Y VECTOR

$$Sean: \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge \alpha \in \mathbb{R}:$$
$$\alpha \vec{a} = (\alpha a_1 ; \alpha a_2 ; \alpha a_3)$$

PROPIEDADES

$$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \wedge \forall \vec{c} \in \mathbb{R}^3 \wedge \forall \alpha \in \mathbb{R} \wedge \forall \beta \in \mathbb{R}$$

(a) Ley de Composición Externa $\alpha \vec{a} \in \mathbb{R}^3$

(b) Asociativa Mixta $(\alpha \beta) \vec{a} = \alpha (\beta \vec{a})$

(c) Existencia de Escalar Neutro $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \ \exists \ 1 \in \mathbb{R} \ / \ 1 \vec{a} = \vec{a}$

(d) Distributiva respecto a la suma de Escalares $(\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$

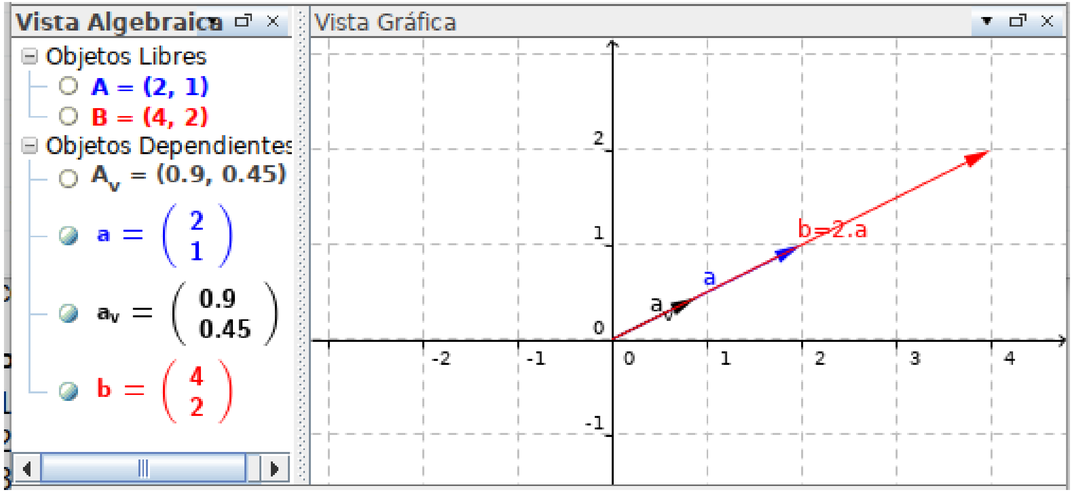
(e) Distributiva respecto a la suma de vectores $\alpha (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$

Repaso de Clases Anteriores

OPERACIONES CON VECTORES

II) PRODUCTO DE ESCALAR Y VECTOR

$$Sean: \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge \alpha \in \mathbb{R}:$$
$$\alpha\vec{a} = (\alpha a_1; \alpha a_2; \alpha a_3)$$



Versores:

$$\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} \quad y\ además: |\hat{a}| = 1$$

Condición de Paralelismo:

$$Sean:\ \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{a} \neq \vec{0} \wedge \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{b} \neq \vec{0}:$$
$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} / \vec{a} = \alpha\vec{b}$$

Repaso de Clases Anteriores

III) Producto Escalar entre Vectores (o Producto Punto)

$$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n \wedge \vec{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n) \wedge \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n \wedge \vec{b} = (b_1; b_2; \ldots; b_n):$$

$$\vec{a} . \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{i=n} a_i b_i$$

Repaso de Clases Anteriores

III) Producto Escalar entre Vectores

PROPIEDADES:

$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3, \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^3, \forall \vec{c} \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

No cumple:

- LCI ==> No cumple propiedades de la Suma
- LCE ==> No cumple propiedades del producto de escalar y vector.

Sin embargo se verifican las siguientes propiedades:

(a) Conmutativa: $\overline{a}.\overline{b} = \overline{b}.\overline{a}$

(b) Asociativa con escalar: $\alpha(\overline{a} \,.\, \overline{b}) = (\alpha\overline{a}) \,.\, \overline{b}$

(c) Distributiva del producto escalar respecto de la Suma de vectores: $\overline{a} \,.\, (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \,.\, \overline{b} + \overline{a} \,.\, \overline{c}$

(d) $\vec{a}.\vec{a} \geq 0 \wedge (\vec{a}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0})$

$\boxed{Recordar: \ \vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^2}$

Repaso de Clases Anteriores

III) Producto Escalar entre Vectores

Interpretación Geométrica

$$\forall\, \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{a} \neq \vec{0} \wedge \forall\, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{b} \neq \vec{0}:$$

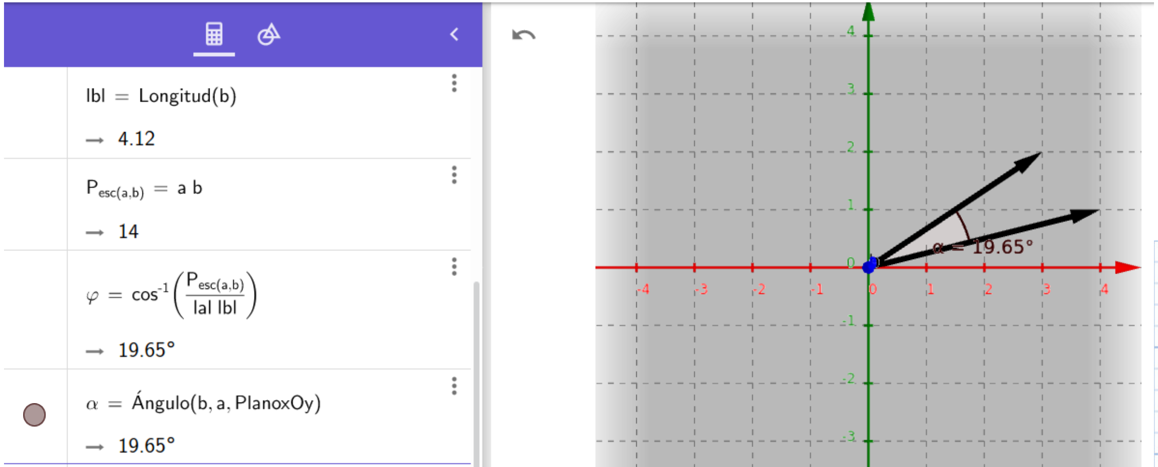
$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\phi$$

Angulo entre vectores:

$$\phi = \arccos\left(\frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}\right)$$

Condición de ortogonalidad:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\,.\,\vec{b} = 0$$



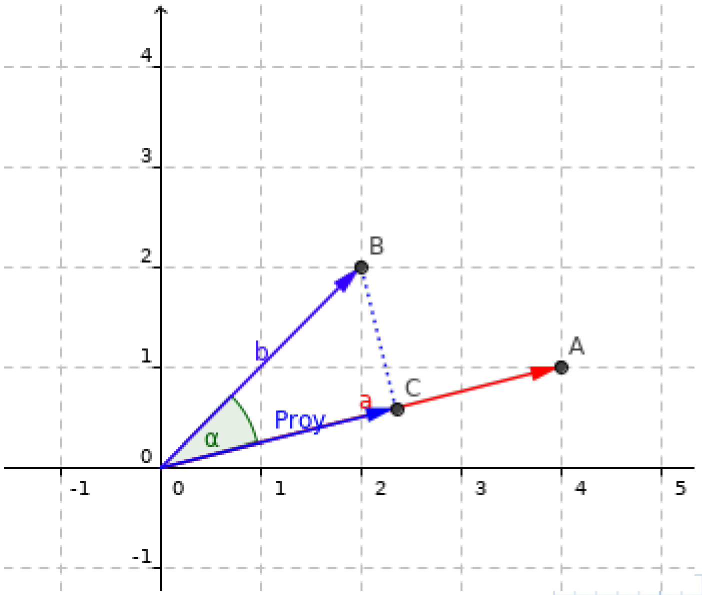
Repaso de Clases Anteriores

PROYECCION DE UN VECTOR SOBRE LA DIRECCIÓN DE OTRO

$$\cos\alpha = \frac{Proy_a \vec{b}}{|\vec{b}|} \Rightarrow Proy_a \vec{b} = |\vec{b}|\cos\alpha$$

$$Proy_a \vec{b} = \frac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|}$$ es un número

$$\overrightarrow{Proy_a \vec{b}} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|}\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\vec{a}.\vec{a}}\vec{a}$$ es un vector



Operaciones con Vectores

IV) Producto Vectorial entre Vectores (Producto Cruz)

Es una operación propia de vectores de R^3

$$Datos:\begin{cases}\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)\\ \vec{b}=(b_1;b_2;b_3)\end{cases}$$

Se obtiene a partir de un pseudo-determinante:

$$\vec{a}\,x\,\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\hat{i}\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}-\hat{j}\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2.b_3-a_3.b_2;-(a_1.b_3-a_3.b_1);a_1.b_2-a_2.b_1)$$

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=(a_2.b_3-a_3.b_2;a_3.b_1-a_1.b_3;a_1.b_2-a_2.b_1)\in\mathbb{R}^3}$$

Operaciones con Vectores

IV) Producto Vectorial entre Vectores (Producto Cruz)

PROPIEDADES:

$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3, \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^3, \forall \vec{c} \in \mathbb{R}^3, \forall \vec{d} \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

1) Anticonmutativa:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

2) Asociativa con escalar:

$$\alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\vec{b})$$

3) Distributiva respecto de la suma de vectores:

Pre-distributiva: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

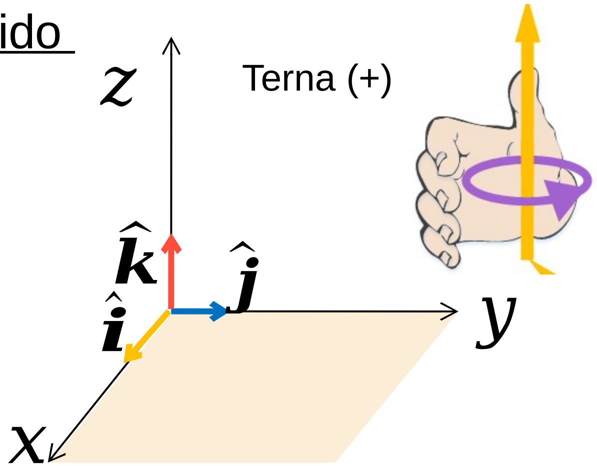
Post-distributiva: $(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{d} = \vec{b} \times \vec{d} + \vec{c} \times \vec{d}$

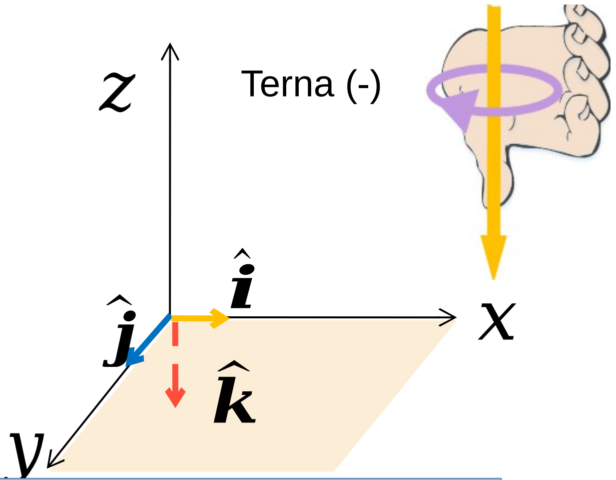
Operaciones con Vectores

IV) Producto Vectorial entre Vectores

Atributos del vector resultado:

Sentido





Dependiendo de la terna

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = -\hat{k}$$

El sentido no está perfectamente definido

(Extraído de la presentación realizada por la Ing. Maribel Tolaba el 22/04/2020)

Operaciones con Vectores

IV) Producto Vectorial entre Vectores (Producto Cruz)

Atributos del vector resultado:

<u>Dirección:</u>

El vector resultado es ortogonal al plano formado por los vectores $\overline{a}$ y $\overline{b}$.

H) $\vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{a} = (a_1 ; a_2 ; a_3) \wedge \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{b} = (b_1 ; b_2 ; b_3) \wedge \vec{c} \in \mathbb{R}^3 / \vec{c} = \vec{a} \, x \, \vec{b}$

T) $\vec{c} \perp \vec{a} \wedge \vec{c} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{c} \perp pl(\vec{a} ; \vec{b})$

D) $\vec{c} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \vec{c} . \vec{a} = 0 \wedge \vec{c} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{c} . \vec{b} = 0$

$$\vec{a} . \vec{c} = (a_1 ; a_2 ; a_3) . (c_1 ; c_2 ; c_3)$$

$$\vec{a} . \vec{c} = (a_1 ; a_2 ; a_3) . (a_2 b_3 - a_3 . b_2 ; a_3 b_1 - a_1 b_3 ; a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$\vec{a} . \vec{c} = (\cancel{a_1 a_2 b_3} - \cancel{a_1 a_3 b_2} + \cancel{a_2 a_3 b_1} - \cancel{a_2 a_1 b_3} + \cancel{a_3 a_1 b_2} - \cancel{a_3 a_2 b_1})$$

$$\boxed{\vec{a} . \vec{c} = 0}$$

Tarea para el alumno demostrar: $\vec{c} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{c} . \vec{b} = 0$

Operaciones con Vectores

IV) Producto Vectorial entre Vectores (Producto Cruz)

Atributos del vector resultado:

Módulo:

H) $\vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge a = (a_1; a_2; a_3) \wedge \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \wedge b = (b_1; b_2; b_3)$

T) $|\vec{a}\, x\, \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\, sen\, \phi$

D) $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}$

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2 = a_2^2 b_3^2 - 2 a_2 b_3 a_3 b_2 + a_3^2 b_2^2 + a_3^2 b_1^2 - 2 a_3 b_1 a_1 b_3 + a_1^2 b_3^2 + a_1^2 b_2^2 - 2 a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2^2 b_1^2 +$$
$$+ a_1^2 b_1^2 - a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 - a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 - a_3^2 b_3^2$$

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2 = a_2^2 (b_3^2 + b_1^2 + b_2^2) + a_3^2 (b_2^2 + b_1^2 + b_3^2) + a_1^2 (b_3^2 + b_2^2 + b_1^2) -$$
$$- [2 a_2 b_3 a_3 b_2 + 2 a_3 b_1 a_1 b_3 + 2 a_1 b_2 a_2 b_1 + a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2]$$

Operaciones con Vectores

IV) Producto Vectorial entre Vectores (Producto Cruz)

Atributos del vector resultado:

<u>Módulo (cont):</u>

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2=|\vec{b}|^2\left(a_2^2+a_3^2+a_1^2\right)-\left(a_1 b_1+a_2 b_2+a_3 b_3\right)^2=|\vec{b}|^2|\vec{a}|^2-\left(\vec{a}\,.\,\vec{b}\right)^2$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2=|\vec{b}|^2\left(a_2^2+a_3^2+a_1^2\right)-\left(a_1 b_1+a_2 b_2+a_3 b_3\right)^2=|\vec{b}|^2|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2|\vec{a}|^2\cdot\cos^2\phi$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\left(1-\cos^2\phi\right)=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 sen^2\phi$$

$$\sqrt{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2}=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\left(1-\cos^2\phi\right)=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 sen^2\phi}$$

$$\sqrt{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2}=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\left(1-\cos^2\phi\right)=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 sen^2\phi}$$

$$\boxed{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|\vec{a}||\vec{b}|\,sen\,\phi}$$

Operaciones con Vectores

IV) Producto Vectorial entre Vectores (Producto Cruz)

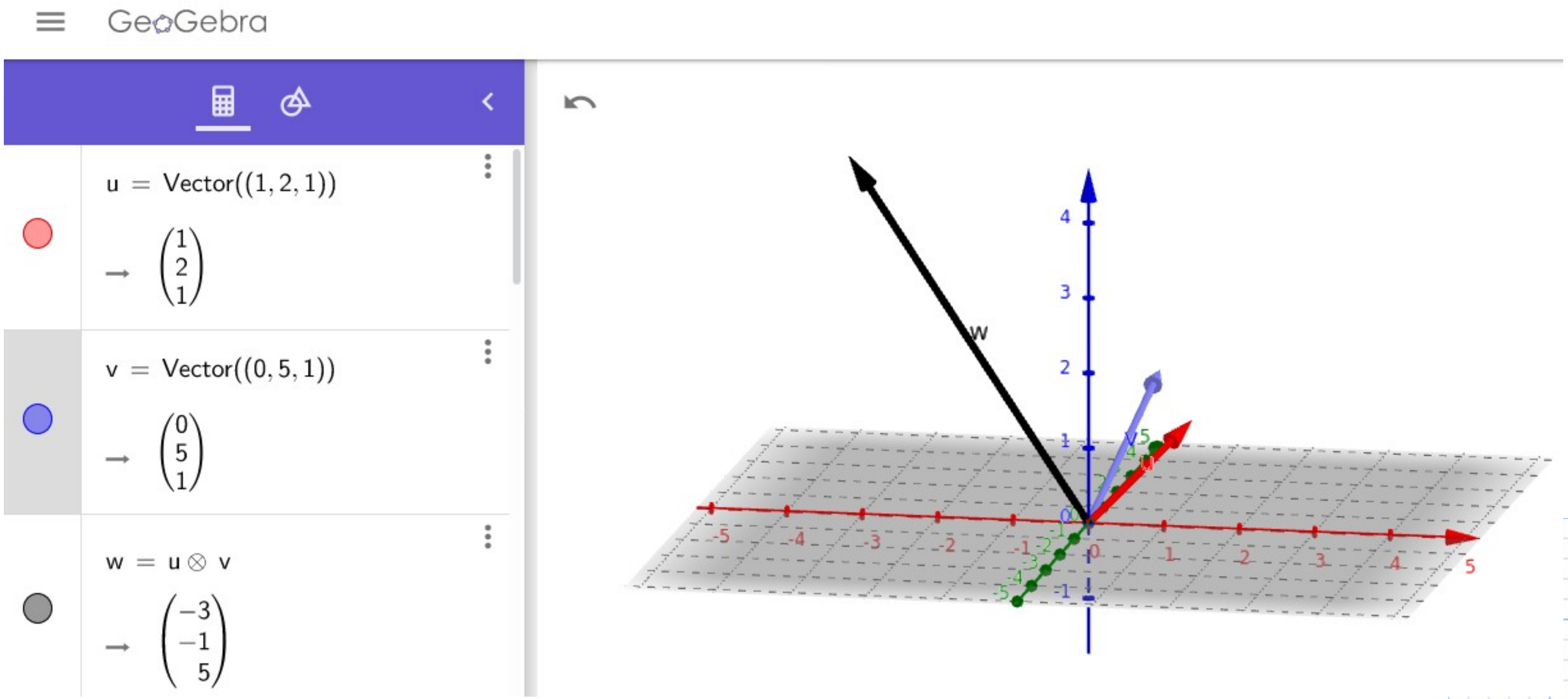
Ejemplo: Sean los vectores $\bar{u}$ = (1 ; 2 ; 1) y $\bar{v}$ = (0 ; 5 ; 1), hallar el producto vectorial entre ambos.

$$Datos: \begin{cases} \vec{u} = (1;2;1) \\ \vec{v} = (0;5;1) \end{cases}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (2.1 - 1.5; 1.0 - 1.1; 1.5 - 2.0) = (-3; -1; 5)$$

Operaciones con Vectores

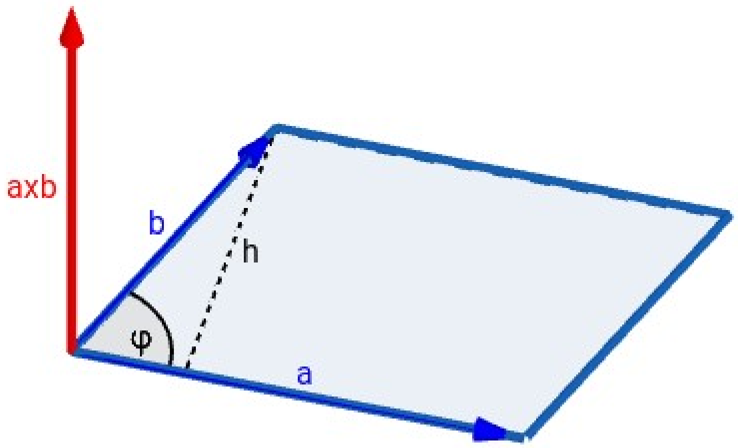
IV) Producto Vectorial entre Vectores (Producto Cruz)



Operaciones con Vectores

IV) Producto Vectorial entre Vectores (Producto Cruz)

Interpretación Geométrica:



$$sen\,\hat{\phi} = \frac{h}{|\vec{b}|}$$

$$|\vec{b}|\,sen\,\hat{\phi} = h$$

$$|\vec{a}||\vec{b}|\,sen\,\hat{\phi} = |\vec{a}|\,h$$

$$\boxed{|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,h}$$

Area del paralelogramo

Operaciones con Vectores

IV) Producto Vectorial entre Vectores (Producto Cruz)

Ejemplo:

Sean los vectores $\overline{u} = (1 ; 2 ; 1)$ y $\overline{v} = (0 ; 5; 1)$, hallar el área del paralelogramo que conforman ambos vectores.

Datos: $\overline{u} = (1 ; 2 ; 1)$

$\overline{v} = (0 ; 5; 1)$

Sabemos que: $\overline{u} \times \overline{v} = (2.1 – 1.5 ; 1.0 – 1.1 ; 1.5 – 2.0) = (–3 ; –1 ; 5) = \overline{w}$

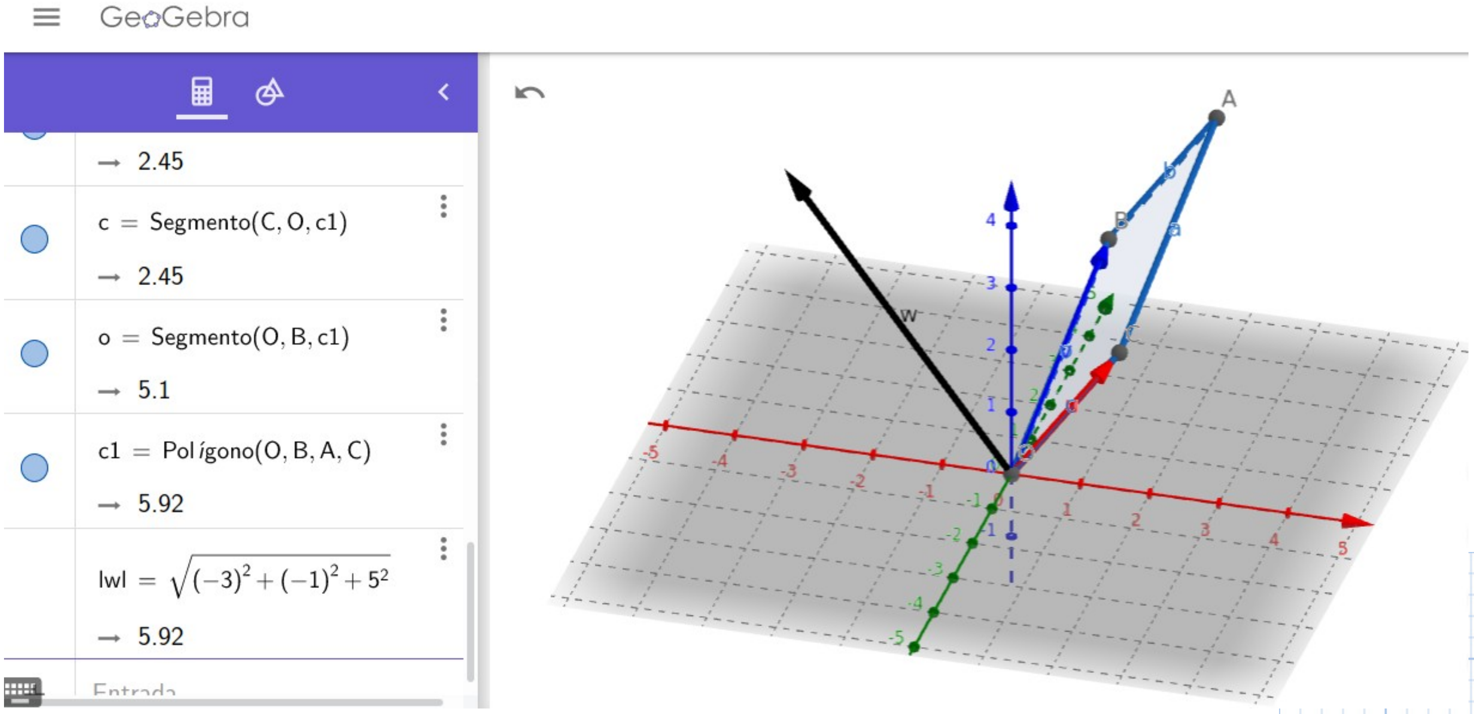
$$Area = |\vec{u} \, x \, \vec{v}| = |\vec{w}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 5^2}$$

$$\boxed{Area = \sqrt{35}}$$

Operaciones con Vectores

IV) Producto Vectorial entre Vectores (Producto Cruz)

Ejemplo:



Operaciones con Vectores

IV) Producto Vectorial entre Vectores (Producto Cruz)

Observaciones:

$$\vec{a}\, x\, \vec{0} = \vec{0}$$

$$\vec{a}\, x\, \vec{a} = \vec{0}$$

Condición de Paralelismo:

Dados dos vectores no nulos de R^3, su producto vectorial da por resultado al vector nulo si y solo si los vectores resultan paralelos entre si.

$$\forall\, \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{a} \neq \vec{0} \wedge \forall\, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{b} \neq \vec{0} :$$

$$\vec{a}\, x\, \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} // \vec{b} \;\; \left(\vec{a} = \alpha \vec{b}\,, \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}\right)$$

Operaciones con Vectores

IV) Producto Vectorial entre Vectores (Producto Cruz)

Condición de Paralelismo (cont.)

$\Rightarrow$) H1) $\vec{a} \, x \, \vec{b} = \vec{0}$

T1) $\vec{a} \, // \, \vec{b}$

D1) $|\vec{a} \, x \, \vec{b}| = |\vec{0}|$

$|\vec{a}||\vec{b}| \, sen \, \phi = 0 \Rightarrow |\vec{a}| = 0 \vee |\vec{b}| = 0 \vee sen \, \phi = 0$

$Pero \ como: |\vec{a}| > 0 \wedge |\vec{b}| > 0 \Rightarrow sen \, \phi = 0 \Rightarrow \phi = 0 \vee \phi = \pi \Rightarrow \vec{a} \, // \, \vec{b}$

$\Leftarrow$) H2) $\vec{a} \, // \, \vec{b}$

T2) $\vec{a} \, x \, \vec{b} = \vec{0}$

D2) $\vec{a} \, x \, \vec{b} = \vec{a} \, x \, (\alpha \vec{a}) = \alpha (\vec{a} \, x \, \vec{a}) \Rightarrow \vec{a} \, x \, \vec{b} = \vec{0}$

Ejercicios de la Práctica

Ejercicio Miscelaneas 5: Dados los puntos *O*(0;0;0), *A*(2;-1;2), *B*(1;1;3) y *C*(t;t+1;3). Hallar t para que:

$$\overrightarrow{Proy}_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{CB}=\left(\frac{2}{5};-\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)$$

<u>Resolución:</u>

$$\overrightarrow{Proy}_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{CB}=\frac{\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}.\frac{1}{|\overrightarrow{OA}|}\overrightarrow{OA}=\frac{(1-t;-t;0).(2;-1;2)}{|(2;-1;2)|}\frac{1}{|(2;-1;2)|}.(2;-1;2)$$

$$\overrightarrow{Proy}_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{CB}=\frac{2(1-t)+t}{\sqrt{9}}\frac{1}{\sqrt{9}}(2;-1;2)=\frac{2-t}{9}(2;-1;2)=\left(\frac{4}{9}-\frac{2}{9}t;-\frac{2}{9}+\frac{1}{9}t;\frac{4}{9}-\frac{2}{9}t\right)$$

$$Como:\ \overrightarrow{Proy}_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{CB}=\left(\frac{2}{5};-\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)\Rightarrow\left(\boxed{\frac{4}{9}-\frac{2}{9}t};\boxed{-\frac{2}{9}+\frac{1}{9}t};\boxed{\frac{4}{9}-\frac{2}{9}t}\right)=\left(\boxed{\frac{2}{5}};\boxed{-\frac{1}{5}};\boxed{\frac{2}{5}}\right)$$

Ejercicios de la Práctica

Ejercicio Miscelaneas 5: Dados los puntos *O*(0;0;0), *A*(2;-1;2), *B*(1;1;3) y *C*(t;t+1;3). Hallar t para que:

$$\overrightarrow{Proy_{\overrightarrow{OA}}}\,\overrightarrow{CB}=\left(\frac{2}{5};-\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)$$

<u>Resolución (cont):</u>

$$\begin{cases} \frac{4}{9}-\frac{2}{9}t=\frac{2}{5} \\ \frac{-2}{9}+\frac{1}{9}t=\frac{-1}{5} \\ \frac{4}{9}-\frac{2}{9}t=\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-2}{9}t=\frac{2}{5}-\frac{4}{9}\Rightarrow -\frac{2}{9}t=\frac{18-20}{45}\Rightarrow t=\frac{(-9)}{2}\frac{(-2)}{45}\Rightarrow t=\frac{18}{90}\Rightarrow \boxed{t=\frac{1}{5}} \\ \frac{1}{9}t=\frac{-1}{5}+\frac{2}{9}\Rightarrow \frac{1}{9}t=\frac{-9+10}{45}\Rightarrow t=9\frac{1}{45}\Rightarrow \boxed{t=\frac{1}{5}} \end{cases}$$

Ejercicios de la Práctica

IV) Producto Vectorial entre Vectores (Producto Cruz)

Ejercicio 9. $Sean\ \vec{a}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}, \vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}, \vec{c}=2\hat{j}+2\hat{k}\ determinar:$

9.1. $\overline{a}$ x $\overline{b}$, $\overline{a}$ x ($\overline{b}$ – 2 $\overline{c}$), $\overline{a}$ x $\overline{b}$ – 2 $\overline{c}$, $\overline{a}$ x ($\overline{b}$ x $\overline{c}$)

$$Datos: \vec{a}=(1;1;-1)$$
$$\vec{b}=(2;-1;0)$$
$$\vec{c}=(0;2;2)$$

$$\vec{a}\,x\,\vec{b}=(1.0-((-1).(-1));(-1).2-1.0;1.(-1)-1.2)=(-1;-2;-3)$$

$$\vec{a}\,x(\vec{b}-2\vec{c})=\vec{a}\,x\,\vec{b}-\vec{a}\,x\,2\vec{c}=\vec{a}\,x\,\vec{b}-2(\vec{a}\,x\,\vec{c})=(-1;-2;-3)-2(4;-2;2)$$
$$\vec{a}\,x(\vec{b}-2\vec{c})=(-1;-2;-3)+(-8;4;-4)=(-9;2;-7)$$

$$\vec{a}\,x\,\vec{b}-2\vec{c}=(-1;-2;-3)-2(0;2;2)=(-1;-2;-3)+(0;-4;-4)=(-1;-6;-7)$$

$$\vec{a}\,x(\vec{b}\,x\,\vec{c})=(1;1;-1)\times((2;-1;0)\times(0;2;2))=(1;1;-1)\times(-2;-4;4)=(0;-2;-2)$$

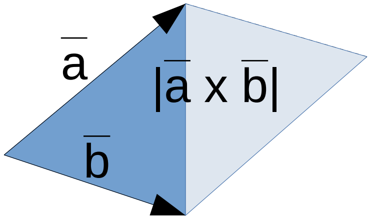
Ejercicios de la Práctica

IV) Producto Vectorial entre Vectores (Producto Cruz)

Ejercicio 9. *Sean* $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}\,,\vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}\,,\vec{c}=2\hat{j}+2\hat{k}$ *determinar* :

9.3. Area del paralelogramo que tiene por lados a $\overline{a}$ y a $\overline{b}$.

Esquema:



$$Area=|\vec{a}\,x\,\vec{b}|=|(-1;-2;-3)|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{14}$$

9.4. Area del triángulo que tiene por lados a $\overline{a}$ y a $\overline{b}$.

$$Area=\frac{1}{2}|\vec{a}\,x\,\vec{b}|=\frac{1}{2}|(-1;-2;-3)|=\frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-3)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{14}$$