Álgebra y Geometría Analítica

Clase 03: El producto escalar entre vectores

UNIVERSIDAD
TECNOLÓGICA
NACIONAL

Unidad 1 – Clase 03

01 Repaso de Clases Anteriores

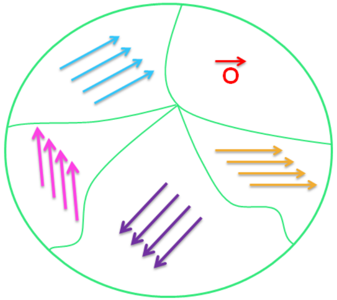
02 Producto Escalar entre Vectores

03 Proyecciones

04 Ejercicios

Repaso de Clases Anteriores

✓ Vectores Libres



✓ Componentes de un Vector

$$A(a_1;a_2;a_3) \qquad B(b_1;b_2;b_3)$$

$$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1;b_2-a_2;b_3-a_3)$$

✓ Vector expresado por medio de sus Componentes y coordenadas.

$$\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$$

✓ Módulo de un vector

$$\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2}\in R_{\geq 0}$$

Repaso de Clases Anteriores

- ✓ Cosenos Directores (R^3)

$$cos(\alpha_1)=\frac{a_1}{|\vec{a}|}$$

$$cos(\alpha_2)=\frac{a_2}{|\vec{a}|}$$

$$cos(\alpha_3)=\frac{a_3}{|\vec{a}|}$$

- ✓ Relación Pitagórica

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3=1$$

Genéricamente:

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\ldots+\cos^2\alpha_n=1$$

$$\sum_{i=1}^{n}\cos^2\alpha_i=1$$

Repaso de Clases Anteriores

OPERACIONES CON VECTORES

I) SUMA DE VECTORES

Dado dos o más vectores de un mismo espacio, su suma da por resultado otro Vector del mismo espacio cuyas componentes se obtienen sumando las componentes respectivas de los vectores dados.

PROPIEDADES:

1. Ley de Composición Interna $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\in\mathbb{R}^3$
2. Propiedad Conmutativa $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
3. Propiedad Asociativa $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$
4. Existencia de Elemento Neutro $\forall\,\vec{a}\in\mathbb{R}^3\ \exists\ \vec{0}\in\mathbb{R}^3 / \vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$
5. Elemento Opuesto $\forall\,\vec{a}\in\mathbb{R}^3\ \exists\left(-\vec{a}\right)\in\mathbb{R}^3/\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$

Repaso de Clases Anteriores

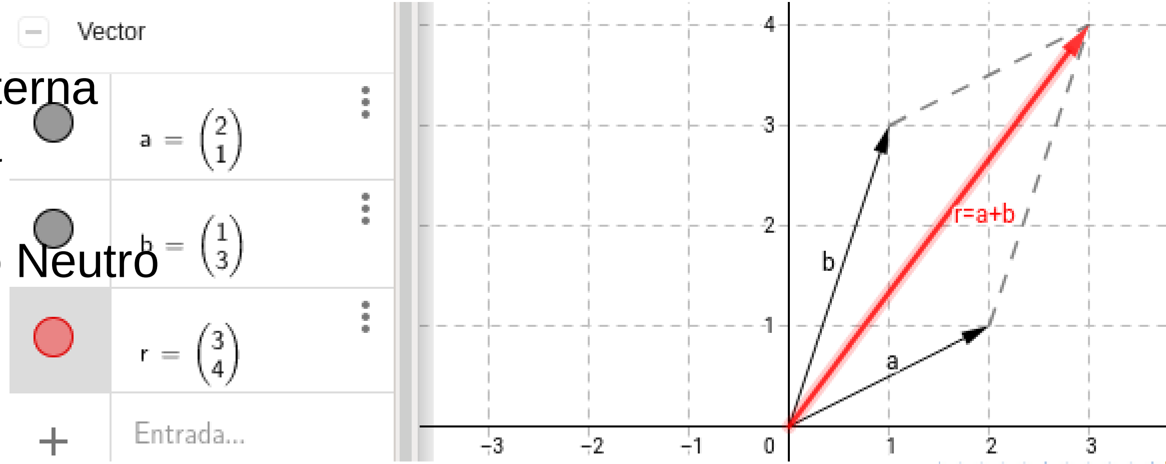
OPERACIONES CON VECTORES

I) SUMA DE VECTORES

Dado dos o más vectores de un mismo espacio, su suma da por resultado otro Vector del mismo espacio cuyas componentes se obtienen sumando las componentes respectivas de los vectores dados.

PROPIEDADES:

1. Ley de Composición Interna
2. Propiedad Conmutativa
3. Propiedad Asociativa
4. Existencia de Elemento Neutro
5. Elemento Opuesto



Repaso de Clases Anteriores

OPERACIONES CON VECTORES

II) PRODUCTO DE ESCALAR Y VECTOR

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \forall\, \vec{a} \in \mathbb{R}^3, \vec{a} = (a_1; a_2; a_3) : \alpha\vec{a} = (\alpha a_1; \alpha a_2; \alpha a_3)$$

PROPIEDADES

$$\forall\, \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge \forall\, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \wedge \forall\, \vec{c} \in \mathbb{R}^3 \wedge \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \wedge \forall\, \beta \in \mathbb{R}$$

(a) Ley de Composición Externa $\alpha\vec{a} \in \mathbb{R}^3$

(b) Asociativa Mixta $(\alpha\,\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$

(c) Existencia de Escalar Neutro $\forall\, \vec{a} \in \mathbb{R}^3\ \exists\ 1 \in \mathbb{R}\ /\ 1\vec{a} = \vec{a}$

(d) Distributiva respecto a la suma de Escalares $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{a}$

(e) Distributiva respecto a la suma de vectores $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\,\vec{a} + \alpha\,\vec{b}$

Repaso de Clases Anteriores

Versor:

El versor asociado a un vector no nulo es:

$$\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$$

Condición de Paralelismo:

$$Sean: \ \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{a} \neq \vec{0} \wedge \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{b} \neq \vec{0}:$$

$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} / \vec{a} = \alpha \vec{b}$$

Repaso de Clases Anteriores

Versor:

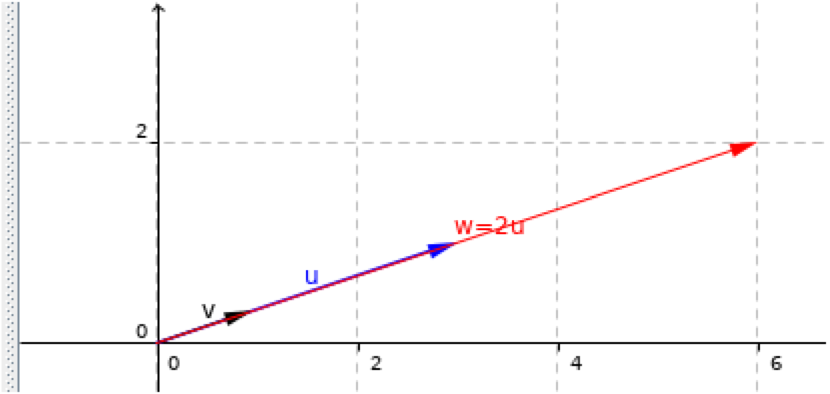
El versor asociado a un vector no nulo es:

$$\hat{a}=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} \quad con\ |\hat{a}|=1$$

Objetos Libres

Objetos Dependientes

- $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $v = \begin{pmatrix} 0.95 \\ 0.32 \end{pmatrix}$
- $w = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$



Condición de Paralelismo

$$Sean:\ \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{a} \neq \vec{0} \wedge \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{b} \neq \vec{0}:$$

$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R} / \vec{a} = \alpha \vec{b}$$

Operaciones con Vectores

III) Producto Escalar entre Vectores (o Producto Punto)

$$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n \wedge \vec{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n) \wedge \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n \wedge \vec{b} = (b_1; b_2; \ldots; b_n):$$

$$\vec{a} . \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{i=n} a_i b_i$$

Operaciones con Vectores

III) Producto Escalar entre Vectores

PROPIEDADES:

$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3, \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^3, \forall \vec{c} \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

No cumple:

- LCI ==> No cumple propiedades de la Suma
- LCE ==> No cumple propiedades del producto de escalar y vector.

Sin embargo se verifican las siguientes propiedades:

(a) Conmutativa: $\overline{a}.\overline{b} = \overline{b}.\overline{a}$

(b) Asociativa con escalar: $\alpha(\overline{a} \,.\, \overline{b}) = (\alpha\overline{a}) \,.\, \overline{b}$

(c) Distributiva del producto escalar respecto de la Suma de vectores: $\overline{a} \,.\, (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \,.\, \overline{b} + \overline{a} \,.\, \overline{c}$

(d) $\vec{a} . \vec{a} \geq 0 \wedge \left(\vec{a} . \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \right)$

Operaciones con Vectores

Demostración:

$$\vec{a}.\vec{a}\geq 0 \wedge (\vec{a}.\vec{a}=0 \Leftrightarrow \vec{a}=\vec{0}):$$

$$\vec{a}.\vec{a}=(a_1;a_2;a_3).(a_1;a_2;a_3)=a_1^2+a_2^2+a_3^2=\left(\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\right)^2\geq 0$$

$$\boxed{\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^2}$$ **Recordarlo!!!**

- $\boldsymbol{\bar{a}\ .\ \bar{a} = 0 \Longleftrightarrow \bar{a} = \bar{0}}$**:**

==>)<u>H1</u>: $\bar{a}\ .\ \bar{a} = \bar{0}$

<u>T1</u>: $\bar{a} = \bar{0}$

<u>D1</u>: $\bar{a}\ .\ \bar{a} = 0$

$|\bar{a}|^2 = 0$

$|\bar{a}| = \bar{0}$

$a = 0$

<==) <u>H2</u>: $\bar{a} = \bar{0}$

<u>T2</u>: $\bar{a}\ .\ \bar{a} = \bar{0}$

<u>D2</u>: $\bar{a} = \bar{0}$

$\bar{a}\ .\ \bar{a} = \bar{0}\ .\ \bar{0}$

$\boldsymbol{a\ .\ a = 0}$

Operaciones con Vectores

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

$$En\ \mathbb{R}^2:\ \forall \vec{a} \in \mathbb{R}^2 \wedge \vec{a} = (a_1 ; a_2) \wedge \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^2 \wedge \vec{b} = (b_1 ; b_2)$$

$$sen(\alpha) = \frac{a_2}{|\vec{a}|} \Rightarrow a_2 = |\vec{a}|\, sen(\alpha), \cos(\alpha) = \frac{a_1}{|\vec{a}|} \Rightarrow a_1 = |\vec{a}| \cos(\alpha)$$

$$sen(\beta) = \frac{b_2}{|\vec{b}|} \Rightarrow b_2 = |\vec{b}|\, sen(\beta), \cos(\beta) = \frac{b_1}{|\vec{b}|} \Rightarrow b_1 = |\vec{b}| \cos(\beta)$$

$$\vec{a} . \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

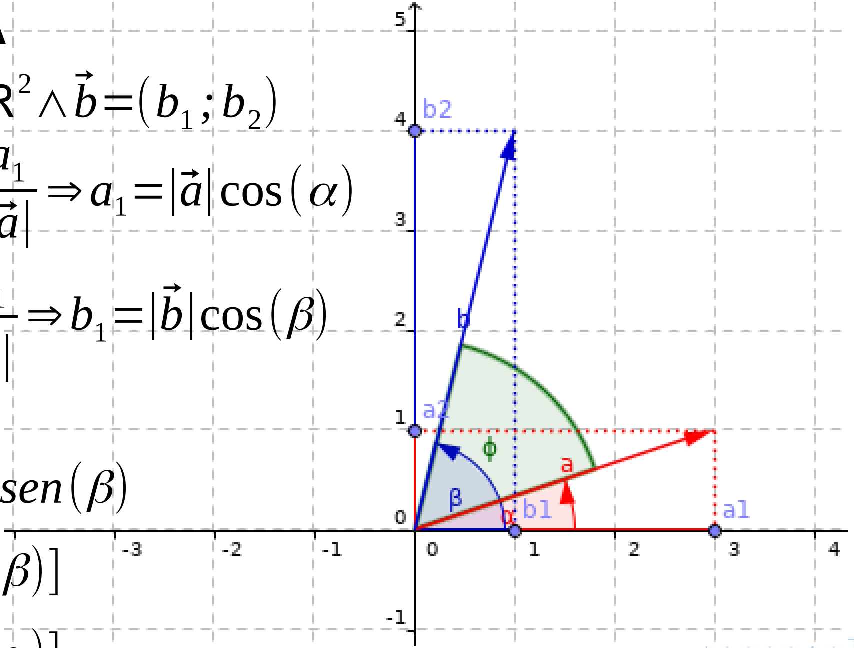
$$\vec{a} . \vec{b} = |\vec{a}| \cos(\alpha) |\vec{b}| \cos(\beta) + |\vec{a}|\, sen(\alpha) |\vec{b}|\, sen(\beta)$$

$$\vec{a} . \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| [\cos(\alpha) \cos(\beta) + sen(\alpha)\, sen(\beta)]$$

$$\vec{a} . \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| [\cos(\alpha - \beta)] = |\vec{a}||\vec{b}| [\cos(\beta - \alpha)]$$

$$con\ \phi = \beta - \alpha :$$

$$\boxed{\vec{a} . \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\phi)} \quad con\ \phi\ el\ menor\ angulo\ entre\ \vec{a}\ y\ \vec{b}\ (0 \le \phi \le \pi)$$



Operaciones con Vectores

Corolario:

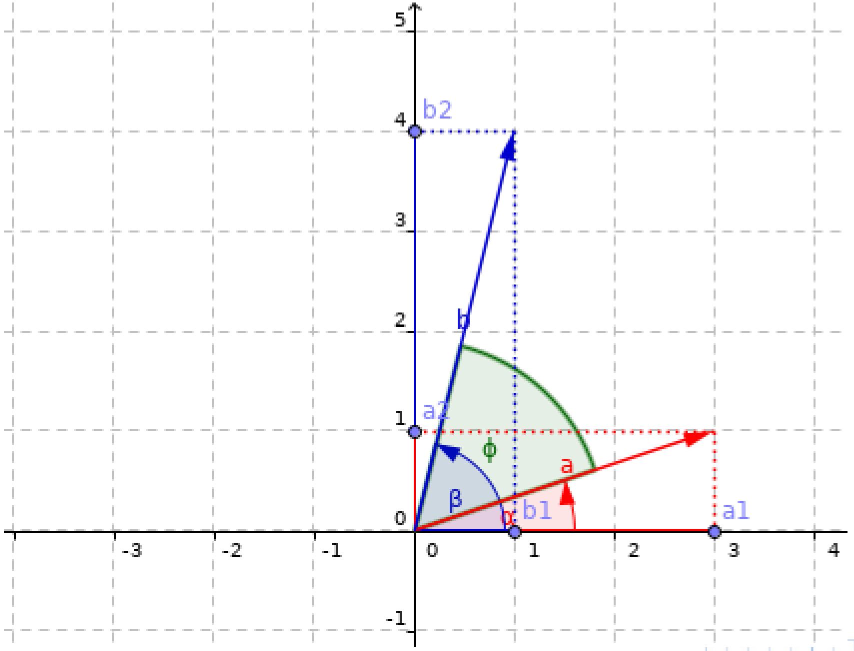
$$Si\ \ \vec{a}.\vec{b} \geq 0 \Rightarrow \phi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$Si\ \ \vec{a}.\vec{b} < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \phi \leq \pi$$

Angulo entre dos vectores:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi \Rightarrow \cos\phi = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\boxed{\phi = \arccos\left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)}$$



Operaciones con Vectores

CONDICIÓN DE ORTOGONALIDAD

Dados dos vectores no nulos de un mismo espacio, estos resultan ortogonales sí y solo sí su producto escalar es igual a cero.

$$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n \wedge \vec{a} \neq \vec{0}, \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n \wedge \vec{b} \neq \vec{0} : \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} . \vec{b} = 0$$

Demostración:

==>) $\boldsymbol{\overline{a} \perp \overline{b} \Longrightarrow \overline{a} . \overline{b} = 0}$

H1: $\overline{a} \perp \overline{b}$

T1: $\overline{a} . \overline{b} = 0$

D1: $\overline{a} . \overline{b} = |\overline{a}|\, |\overline{b}| \cos(\alpha)$

como $\overline{a} \perp \overline{b} \Longrightarrow \alpha = \pi/2 \Longrightarrow \overline{a} . \overline{b} = |\overline{a}|\, |\overline{b}| \cos(\alpha) = 0$

<==) $\boldsymbol{\overline{a} . \overline{b} = 0 \Longrightarrow \overline{a} \perp \overline{b}}$

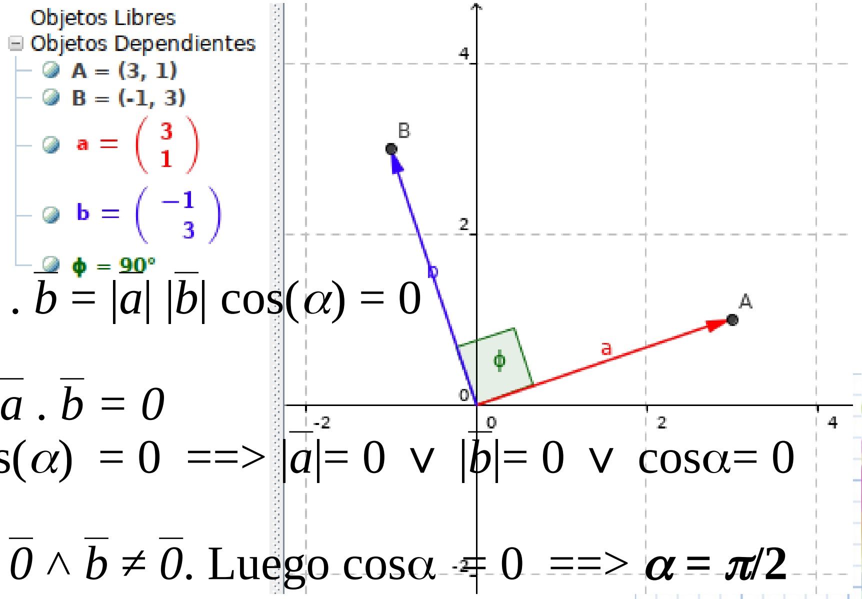
H2: $\overline{a} . \overline{b} = 0$

T2: $\overline{a} \perp \overline{b}$

D2: $\overline{a} . \overline{b} = 0$

$|\overline{a}|\, |\overline{b}| \cos(\alpha) = 0 \Longrightarrow |\overline{a}| = 0 \vee |\overline{b}| = 0 \vee \cos\alpha = 0$

pero $\overline{a} \neq \overline{0} \wedge \overline{b} \neq \overline{0}$. Luego $\cos\alpha = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{\alpha = \pi/2}$



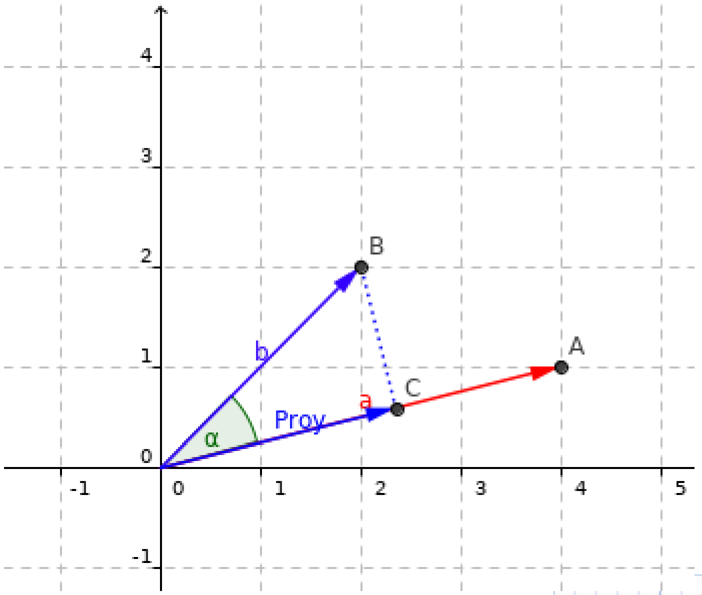
Operaciones con Vectores

PROYECCION DE UN VECTOR SOBRE LA DIRECCIÓN DE OTRO

$$\cos\alpha = \frac{Proy_a \vec{b}}{|\vec{b}|} \Rightarrow Proy_a \vec{b} = |\vec{b}|\cos\alpha$$

$$Proy_a \vec{b} = \frac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|}$$ es un número

$$\overrightarrow{Proy_a \vec{b}} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|}\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\vec{a}.\vec{a}}\vec{a}$$ es un vector



Ejercicios de la Práctica

Ejercicio 7.1.a: Dados los siguientes pares de vectores, $\bar{a}$ y $\bar{b}$, expresados por sus componentes, evaluar su producto escalar y el ángulo entre ellos:

a) $\vec{a}=(1;2-\sqrt{3})$ y $\vec{b}=(\sqrt{3};3+2\sqrt{3})$

Resolución:

$$\vec{a}.\vec{b}=(1;2-\sqrt{3}).(\sqrt{3};3+2\sqrt{3})=1.\sqrt{3}+(2-\sqrt{3}).(3+2\sqrt{3})$$

$$\vec{a}.\vec{b}=\sqrt{3}+6-3\sqrt{3}+4\sqrt{3}-6=2\sqrt{3} \quad (1)$$

Nota: Se considera el mínimo ángulo: $0\leq\hat{\phi}\leq\pi$

Obtención del ángulo: $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\hat{\varphi} \rightarrow \cos\hat{\varphi}=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ (2)

Cálculos Auxiliares:

$$|\vec{a}|=\sqrt{(1)^2+(2-\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+4-4\sqrt{3}+3}=\sqrt{8-4\sqrt{3}}=\sqrt{4.(2-\sqrt{3})}=2.\sqrt{2-\sqrt{3}} \quad (3)$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(3+2\sqrt{3})^2}=\sqrt{3+9+12\sqrt{3}+12}=\sqrt{24+12\sqrt{3}}=\sqrt{12.(2+\sqrt{3})}=2\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{3}} \quad (4)$$

Reemplazando (1), (3) y (4) en (2):

$$\cos\hat{\varphi}=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}\,2\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{1}{2\sqrt{(2-\sqrt{3}).(2+\sqrt{3})}}=\frac{1}{2\sqrt{4-3}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\hat{\varphi}=arc\cos\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$$

Ejercicios de la Práctica

Ejercicio 7.3: Demostrar que el triángulo formado por los puntos P(4;1;5), Q(1;0;-3) y R(3;2;-4) es un triángulo rectángulo.

H) $T: \text{triángulo con vertices } P, Q, R; \hat{\alpha}=\widehat{PQR}, \hat{\beta}=\widehat{PRQ}, \hat{\gamma}=\widehat{QPR}, \vec{a}=\overrightarrow{PQ}, \vec{b}=\overrightarrow{QR}, \vec{c}=\overrightarrow{PR}$

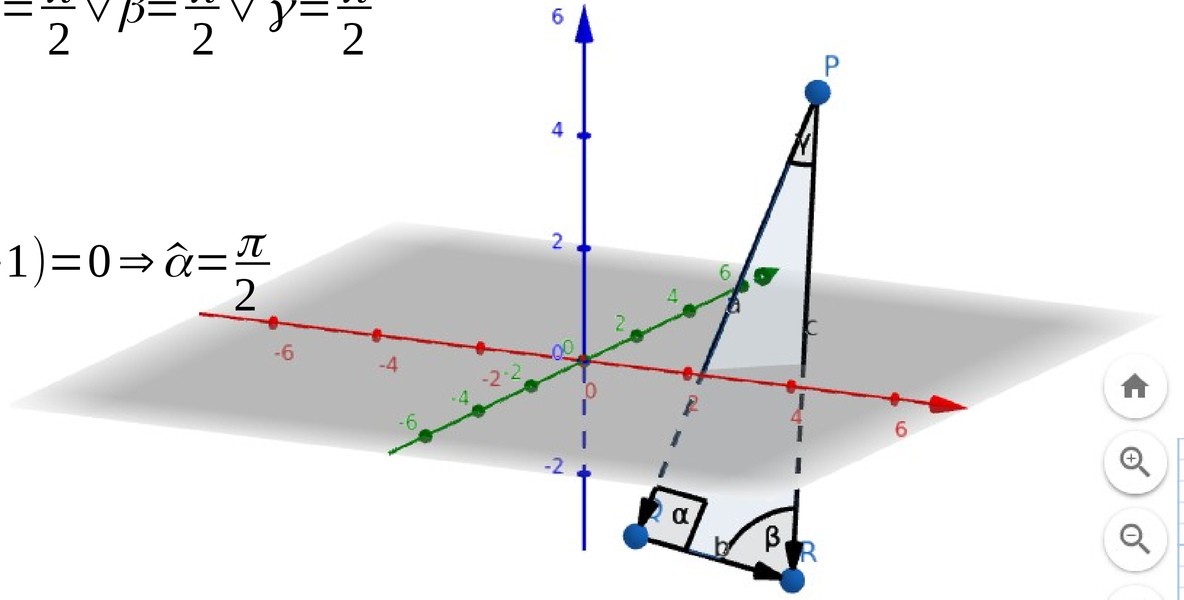
T) $T: \text{Triángulo Rectangulo} \Rightarrow \hat{\alpha}=\frac{\pi}{2} \vee \hat{\beta}=\frac{\pi}{2} \vee \hat{\gamma}=\frac{\pi}{2}$

D) $\vec{a}=\overrightarrow{PQ}=(-3;-1;-8)$

$\vec{b}=\overrightarrow{QR}=(2;2;-1)$

$\vec{c}=\overrightarrow{PR}=(-1;1;-9)$

$\vec{a}.\vec{b}=(-3;-1;-8).(2;2;-1)=0 \Rightarrow \hat{\alpha}=\frac{\pi}{2}$



Ejercicios de la Práctica

Ejercicio 8.4: Probar que si $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son ortogonales entonces $|\overline{u} + \overline{v}|^2 = |\overline{u} - \overline{v}|^2$. Interpretar geométricamente.

H) $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3), \vec{v}=(v_1;v_2;v_3), \vec{u}\perp\vec{v}$

T) $|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}-\vec{v}|^2$

D1) $|\vec{u}+\vec{v}|^2=(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}.\vec{u}+\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}.\vec{u}+\vec{v}.\vec{v}=\vec{u}.\vec{u}+\vec{v}.\vec{v}=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2$

D2) $|\vec{u}-\vec{v}|^2=(\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}.\vec{u}-\vec{u}.\vec{v}-\vec{v}.\vec{u}+\vec{v}.\vec{v}=\vec{u}.\vec{u}+\vec{v}.\vec{v}=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2$

Luego: $\boxed{|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}-\vec{v}|^2}$

Ejercicios de la Práctica

Ejercicio 8.4: **Interpretación Geométrica:**