Álgebra y Geometría Analítica

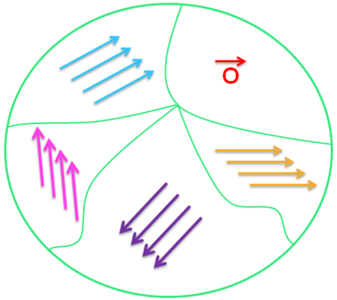
Clase 02:
Operaciones Básicas con vectores

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

Unidad 1 – Clase 02

Repaso Clase Anterior

✓ Vectores Libres



✓ Componentes de un Vector

$$A(a_1;a_2;a_3) \qquad B(b_1;b_2;b_3)$$

$$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1;b_2-a_2;b_3-a_3)$$

✓ Vector expresado por medio de sus Componentes y coordenadas.

$$\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$$

✓ Módulo de un vector

$$\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2}\in R_{\geq 0}$$

Repaso Clase Anterior

- ✓ Cosenos Directores (R^3)

$$\cos(\alpha_1) = \frac{a_1}{|\vec{a}|}$$

$$\cos(\alpha_2) = \frac{a_2}{|\vec{a}|}$$

$$\cos(\alpha_3) = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$$

- ✓ Relación Pitagórica

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1$$

Genéricamente:

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \ldots + \cos^2\alpha_n = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \cos^2\alpha_i = 1$$

Operaciones con Vectores

I) SUMA

Dado dos o más vectores de un mismo espacio, su suma da por resultado otro Vector del mismo espacio cuyas componentes se obtienen sumando las componentes respectivas de los vectores dados.

$$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \;\wedge\; \vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \;\wedge\; \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \;\wedge\; \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1; a_2; a_3) + (b_1; b_2; b_3) = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3) = \vec{c}$$

Donde $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$

Operaciones con Vectores

PROPIEDADES DE LA SUMA

$$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \wedge \forall \vec{c} \in \mathbb{R}^3$$

(a) Ley de Composición interna $\left(\vec{a}+\vec{b}\right) \in \mathbb{R}^3$

(b) Conmutativa $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

(c) Asociativa $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

(d) Existencia de Elemento Neutro $\forall \vec{a} \in R^3 \quad \exists \vec{0} \in \mathbb{R}^3 \quad \vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

(e) Existencia de Elemento Inverso (opuesto) $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \exists \left(-\vec{a}\right) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$

Operaciones con Vectores

SUMA: Ejemplo:

Sean los vectores $\overline{a} = (1 ; 3)$, $\overline{b} = (2 ; 1)$, $\overline{c} = (4 ; 1)$.

a) Calcular la suma: $\overline{s} = \overline{a} + \overline{b}$

b) Obtener $\overline{s}$ gráficamente usando el método gráfico del paralelogramo.

c) Calcular la suma: $\overline{s}_2 = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$

d) Obtener $\overline{s}_2$ gráficamente usando el método gráfico de las poligonales.

Operaciones con Vectores

SUMA: Ejemplo:

Sean los vectores $\overline{a} = (1 ; 3)$, $\overline{b} = (2 ; 1)$, $\overline{c} = (4 ; 1)$.

a) Calcular la suma: $\overline{s} = \overline{a} + \overline{b}$

$\overline{s} = \overline{a} + \overline{b}$

$\overline{s} = (1 ; 3) + (2 ; 1)$

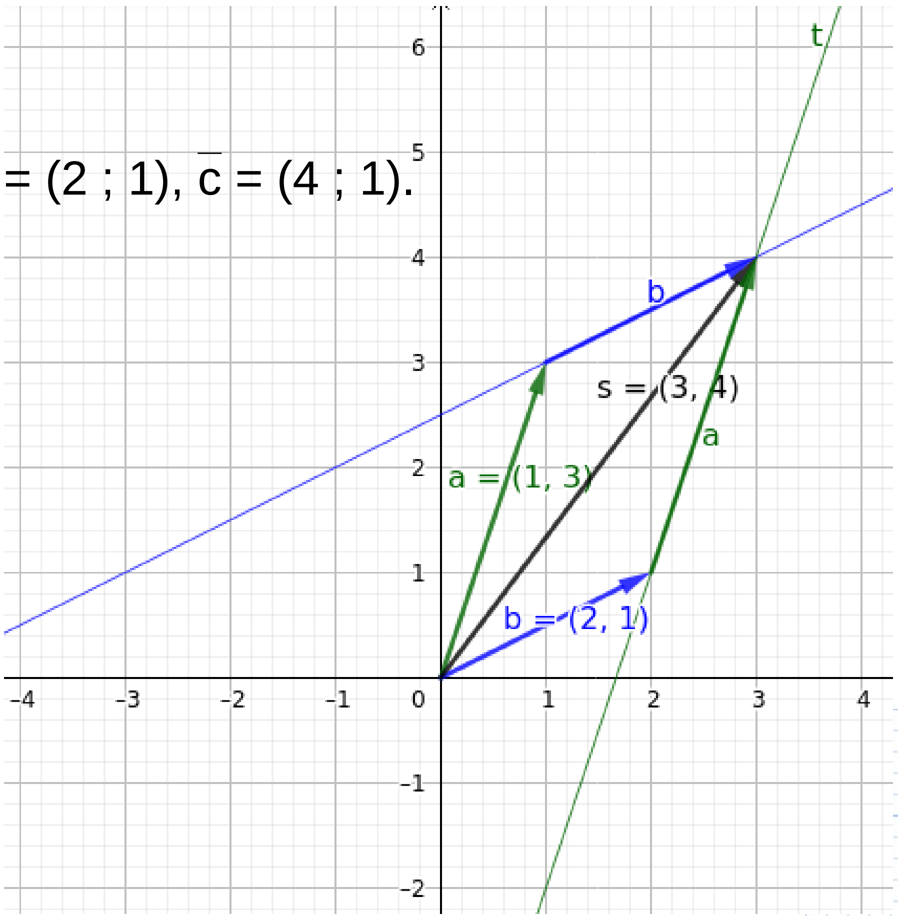
$\boxed{\overline{s} = (3 ; 4)}$

Operaciones con Vectores

SUMA: Ejemplo:

Sean los vectores $\overline{a} = (1 ; 3)$, $\overline{b} = (2 ; 1)$, $\overline{c} = (4 ; 1)$.

b) Graficar (paralelogramo)



Operaciones con Vectores

SUMA: Ejemplo:

Sean los vectores $\overline{a} = (1 ; 3)$, $\overline{b} = (2 ; 1)$, $\overline{c} = (4 ; 1)$.

c) Calcular la suma: $\overline{s}_2 = \overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}} + \overline{\mathbf{c}}$

$$\overline{s}_2 = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$$

$$\overline{s}_2 = (1 ; 3) + (2 ; 1) + (4 ; 1)$$

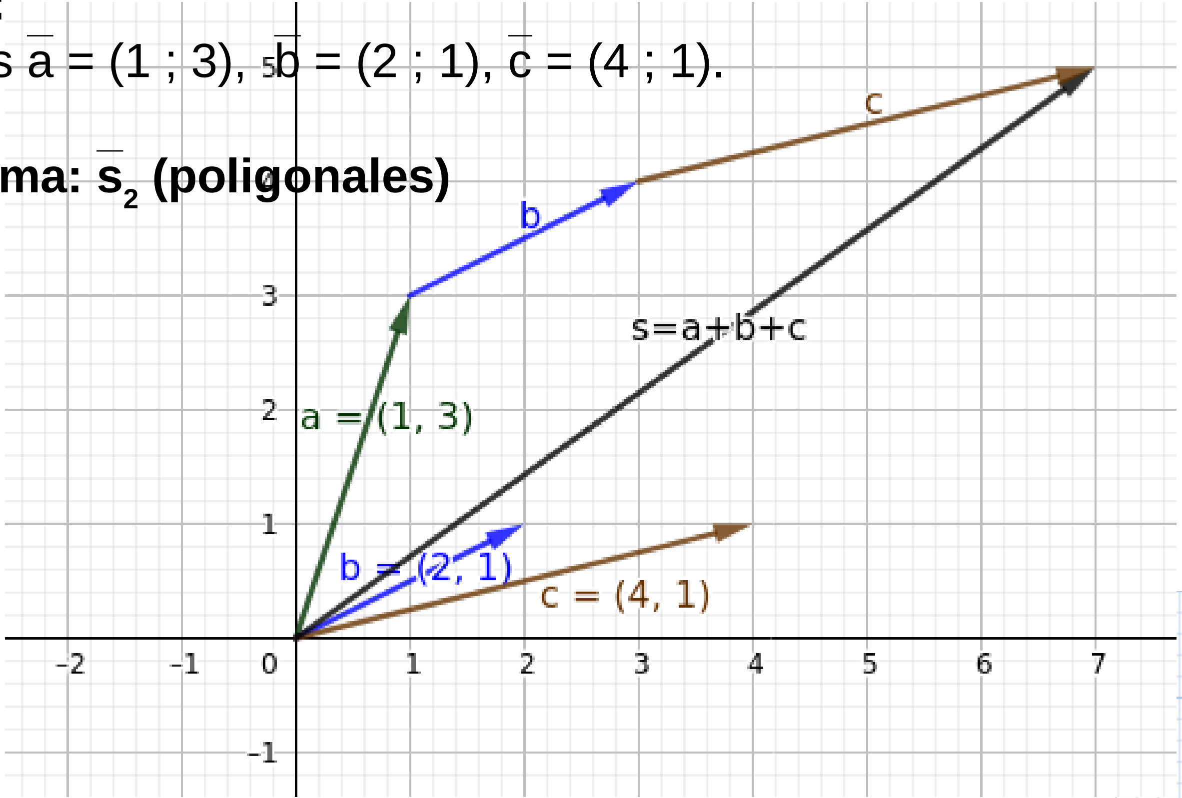
, $\boxed{\overline{s}_2 = (7 ; 5)}$

Operaciones con Vectores

SUMA: Ejemplo:

Sean los vectores $\overline{a} = (1 ; 3)$, $\overline{b} = (2 ; 1)$, $\overline{c} = (4 ; 1)$.

d) Graficar la suma: $\overline{s}_2$ (poligonales)



Operaciones con Vectores

II) Multiplicación de un Escalar por un Vector

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \wedge \forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3$$

$$\alpha \vec{a} = \left(\alpha a_1 ; \alpha a_2 ; \alpha a_3 \right)$$

Operaciones con Vectores

PROPIEDADES

$$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \wedge \forall \vec{c} \in \mathbb{R}^3 \wedge \forall \alpha \in \mathbb{R} \wedge \forall \beta \in \mathbb{R}$$

(a) Ley de Composición Externa $\alpha \vec{a} \in \mathbb{R}^3$

(b) Asociativa Mixta $(\alpha \beta) \vec{a} = \alpha (\beta \vec{a})$

(c) Existencia de Escalar Neutro $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \ \exists \ 1 \in \mathbb{R} \ / \ 1 \vec{a} = \vec{a}$

(d) Distributiva respecto a la suma de Escalares $(\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$

(e) Distributiva respecto a la suma de vectores $\alpha (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$

Operaciones con Vectores

Observaciones

$\alpha\vec{0}=\vec{0}$ Vector nulo

$0\vec{a}=\vec{0}$ Vector nulo

$Si\ \alpha\vec{a}=\vec{0} \Rightarrow \alpha=0 \ \vee \ \vec{a}=\vec{0}$

Operaciones con Vectores

Versor: El versor asociado a un vector no nulo es:

$$\hat{a}=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$$

Notar que para cualquier vector $\bar{a}$ hay dos versores asociados

Versores cartesianos:
Son los versores correspondientes a los ejes cartesianos.

$En\ \mathbb{R}^3\ son:$
$\hat{i}=(1;0;0),\ \hat{i}:$ versor asociado al eje x.
$\hat{j}=(0;1;0),\ \hat{j}:$ versor asociado al eje y.
$\hat{k}=(0;0;1),\ \hat{k}:$ versor asociado al eje z.

Operaciones con Vectores

<u>Ejemplo:</u>

Sea el vector *u* = (3 ; 4)

a) Hallar el versor asociado.

b) Calcular la longitud del mismo.

c) Graficar.

a) Hallar el versor asociado a *u* = (3 ; 4).

$$\hat{u} = \frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}$$

$$Con: |\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} \Rightarrow |\vec{u}| = 5$$

$$\hat{u} = \frac{1}{5}(3 ; 4)$$

$$\boxed{\hat{u} = (\frac{3}{5} ; \frac{4}{5})}$$

Operaciones con Vectores

<u>Ejemplo:</u>

Sea el vector *u* = (3 ; 4)

a) Hallar el versor asociado.

b) Calcular la longitud del mismo.

c) Graficar.

b) Calcular la longitud del mismo.

$$|\hat{u}|=\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{25}{25}}$$

$$\boxed{|\hat{u}|=1}$$

Operaciones con Vectores

<u>Ejemplo:</u>

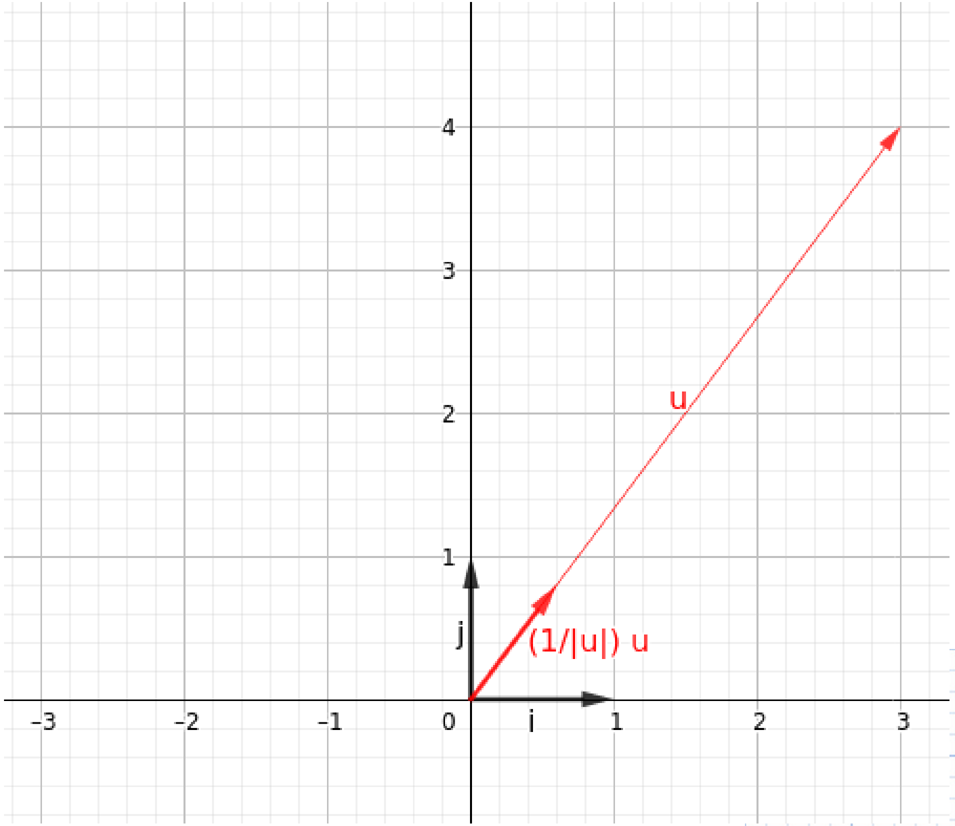
Sea el vector *u* = (3 ; 4)

a) Hallar el versor asociado.

b) Calcular la longitud del mismo.

c) Graficar.

c) Graficar



Operaciones con Vectores

Condición de Paralelismo:

$$Sean:\ \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{a} \neq \vec{0} \wedge \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{b} \neq \vec{0}:$$

$$\vec{a} \,//\, \vec{b} \Leftrightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R} / \vec{a} = \alpha\, \vec{b}$$

Ejemplo:

Sean los vectores $\overline{u} = (2 ; 3)$, $\overline{v} = (-1 ; -3/2)$ y $\overline{w} = (4 ; 6)$

a) Decir si los vectores son o no paralelos justificando adecuadamente. Para ello, basta con hallar el escalar que los relaciona según la condición de paralelismo.

b) Graficar

Operaciones con Vectores

Condición de Paralelismo:

Ejemplo:

Sean los vectores $\overline{u} = (2 ; 3)$, $\overline{v} = (–1 ; –3/2)$ y $\overline{w} = (4 ; 6)$

a) Decir si los vectores son o no paralelos justificando adecuadamente.

$$\vec{u} // \vec{v} : \exists\, \alpha = -2 / \vec{u} = \alpha \vec{v}. \text{ Esto es: } (2;3) = -2\left(-1; -\frac{3}{2}\right)$$

$$\vec{u} // \vec{w} : \exists\, \alpha = \frac{1}{2} \wedge \alpha \in \mathbb{R} / \vec{u} = \alpha \vec{w}. \text{ Esto es: } (2;3) = \frac{1}{2}(4;6)$$

$$\vec{v} // \vec{w} : \exists\, \alpha = \frac{-1}{4} \wedge \alpha \in \mathbb{R} / \vec{v} = \alpha \vec{w}. \text{ Esto es: } \left(-1; -\frac{3}{2}\right) = \frac{-1}{4}(4;6)$$

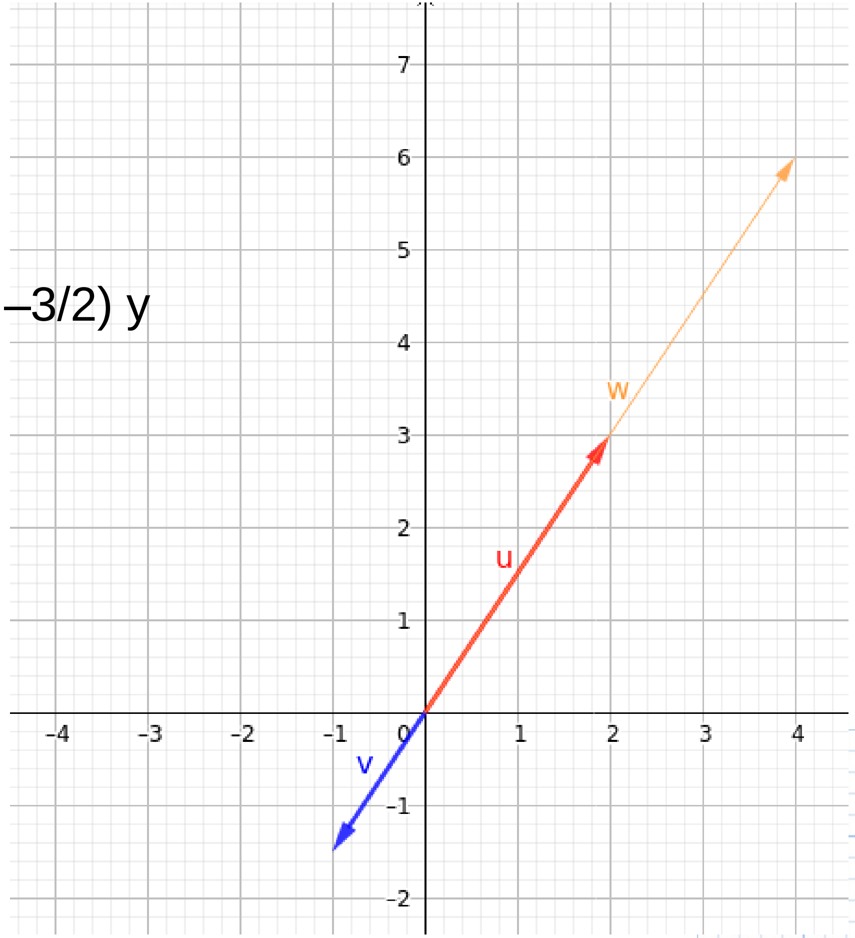
Operaciones con Vectores

Condición de Paralelismo:

Ejemplo:

Sean los vectores $\overline{u} = (2 ; 3)$, $\overline{v} = (–1 ; –3/2)$ y $\overline{w} = (4 ; 6)$

b) Graficar



Ejercicios de la Práctica

Ejercicio 5:Sean los siguientes vectores de R^3

$$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k} \quad \vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} \quad \vec{c} = \hat{i} + \hat{k}$$

(5.1) Encontrar las componentes de:

$$\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$5\left(\vec{b} - 4\vec{c}\right)$$

Ejercicios de la Práctica

Ejercicio 5:Sean los siguientes vectores de R^3

$$\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k} \quad \vec{b}=2\hat{i}-\hat{j} \quad \vec{c}=\hat{i}+\hat{k}$$

$$\vec{a}=(1,1,-1) \quad \vec{b}=(2,-1,0) \quad \vec{c}=(1,0,1)$$

(5.1) Encontrar las componentes de:

$$\vec{a}+2\vec{b}=(1,1,-1)+2(2,-1,0)=(1,1,-1)+(4,-2,0)=(5,-1,-1)$$

$$5(\vec{b}-4\vec{c})=5((2;-1;0)-4(1;0;1))=5(-2;-1;-4)=(-10;-5;-20)$$

Ejercicios de la Práctica

(5.2) Evaluar la expresión

$$\left|\vec{a}+2\vec{b}\right| \quad con \quad \vec{a}+2\vec{b}=(5,-1,-1)$$

$$\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{5^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{25+1+1}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$$

$|\vec{a}|+2\left|\vec{b}\right|$ Analizo: $\vec{a}=(1;1;-1)\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{3}$

$\vec{b}=(2;-1;0)\Rightarrow\left|\vec{b}\right|=\sqrt{5}$

$$|\vec{a}|+2\left|\vec{b}\right|=\sqrt{3}+2\sqrt{5}$$

Ejercicios de la Práctica

$$\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} \qquad Con: \ \vec{a}=(1,1,-1);|\vec{a}|=\sqrt{3}$$

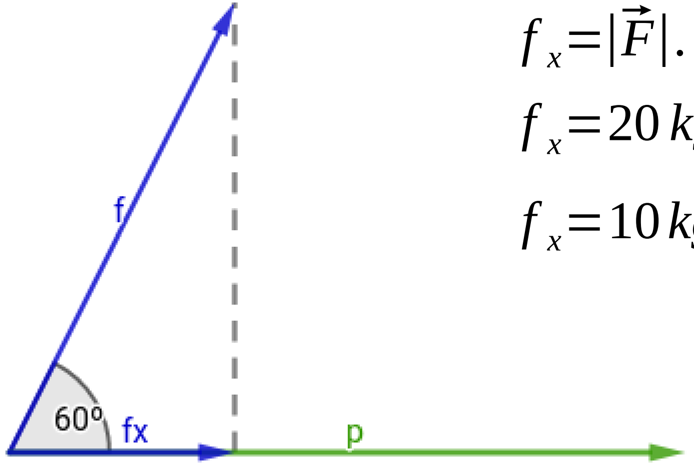
$$\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\left|\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}\right|$$

$$\left|\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)\right|=\left|\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right|=\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{3}{3}}=\sqrt{1}=1$$

Ejercicios de la Práctica

6.2. Cierta partícula solo puede moverse sobre una recta. Sobre ella actúa una Fuerza (representada por un vector $\bar{f}$) de 20 kgf de magnitud y de dirección y sentido tales que forman un ángulo de 60º en sentido anti-horario con la recta. Hallar la Componente de la fuerza que aporta efectivamente al movimiento.



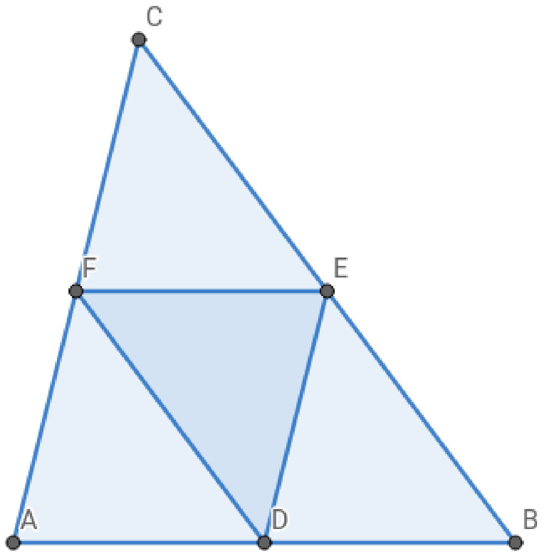
$$f_x = |\vec{F}| . \cos(\alpha)$$

$$f_x = 20\, kgf . \cos(60^a) = 20\, kgf . 0{,}5$$

$$f_x = 10\, kgf$$

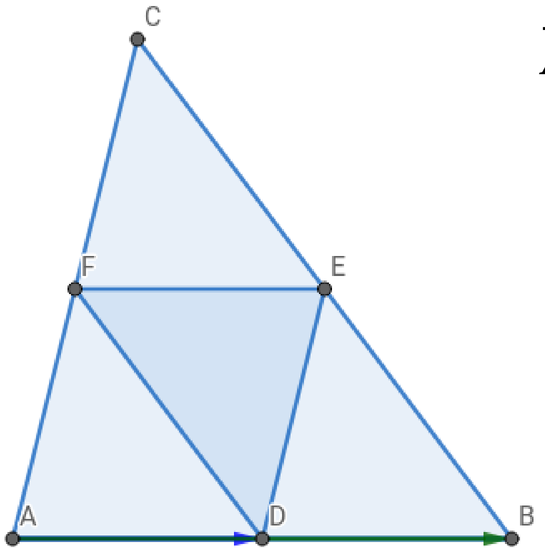
Ejercicios de la Práctica

6.3.a. Demostrar vectorialmente: Si se unen los puntos medios de dos lados de un triangulo arbitrario, el segmento obtenido es paralelo al otro lado del triangulo y su longitud es igual a la mitad de la longitud de dicho lado.



Ejercicios de la Práctica

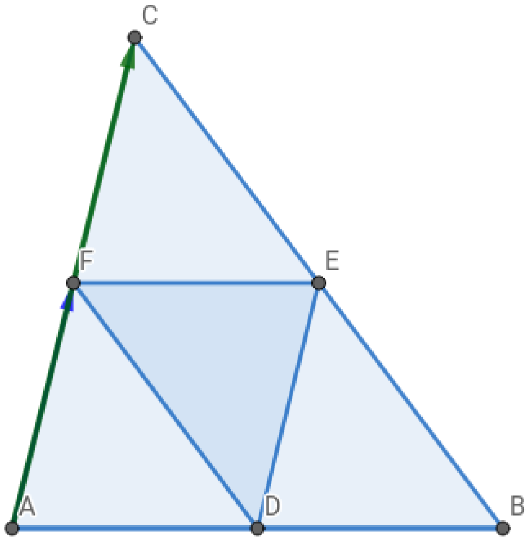
6.3.a. Demostrar vectorialmente: Si se unen los puntos medios de dos lados de un triangulo arbitrario, el segmento obtenido es paralelo al otro lado del triangulo y su longitud es igual a la mitad de la longitud de dicho lado.



$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad (1)$$

Ejercicios de la Práctica

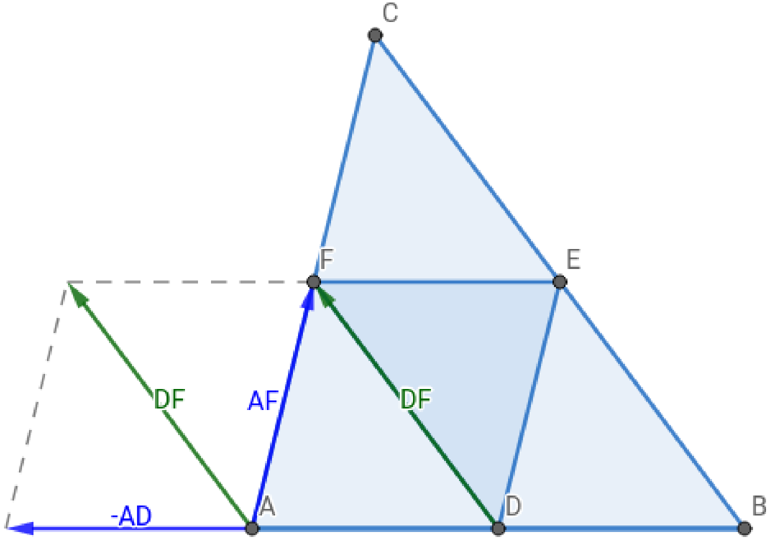
6.3.a. Demostrar vectorialmente: Si se unen los puntos medios de dos lados de un triangulo arbitrario, el segmento obtenido es paralelo al otro lado del triangulo y su longitud es igual a la mitad de la longitud de dicho lado.



$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,(1) \quad \overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\,(2)$$

Ejercicios de la Práctica

6.3.a. Demostrar vectorialmente: Si se unen los puntos medios de dos lados de un triangulo arbitrario, el segmento obtenido es paralelo al otro lado del triangulo y su longitud es igual a la mitad de la longitud de dicho lado.

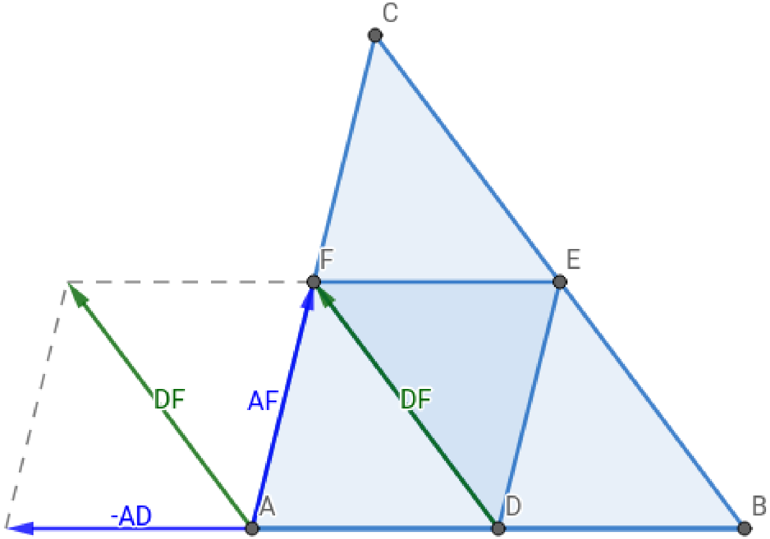


$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,(1)\quad \overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\,(2)$$

$$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}$$

Ejercicios de la Práctica

6.3.a. Demostrar vectorialmente: Si se unen los puntos medios de dos lados de un triangulo arbitrario, el segmento obtenido es paralelo al otro lado del triangulo y su longitud es igual a la mitad de la longitud de dicho lado.



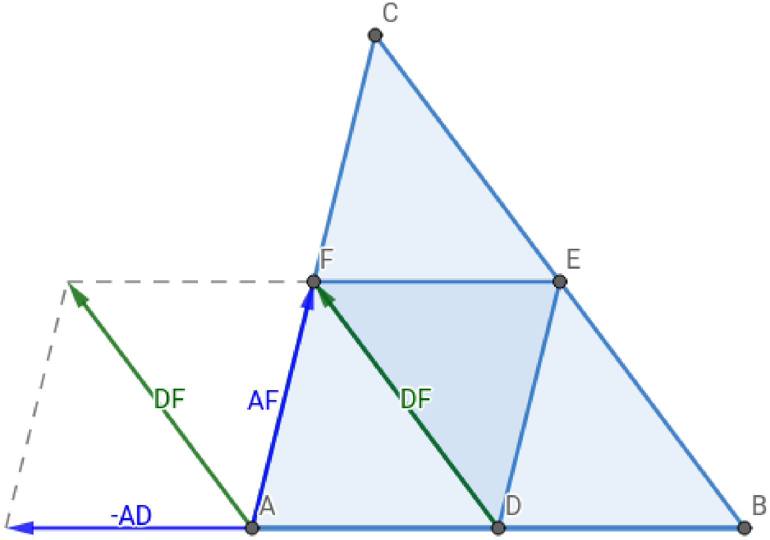
$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,(1)\quad \overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\,(2)$$

$$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

(Reemplazo por (1) y (2))

Ejercicios de la Práctica

6.3.a. Demostrar vectorialmente: Si se unen los puntos medios de dos lados de un triangulo arbitrario, el segmento obtenido es paralelo al otro lado del triangulo y su longitud es igual a la mitad de la longitud de dicho lado.



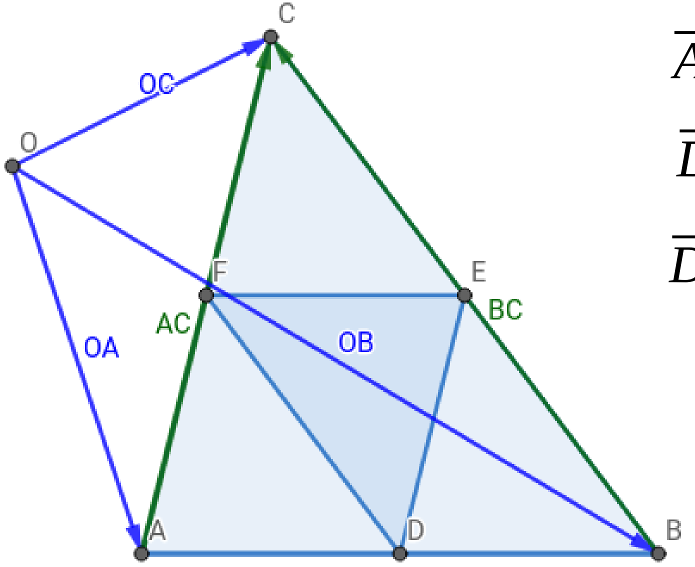
$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}(1) \quad \overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}(2)$$

$$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right]$$

Distributiva del producto de escalar respecto de la suma de vectores

Ejercicios de la Práctica

6.3.a. Demostrar vectorialmente: Si se unen los puntos medios de dos lados de un triangulo arbitrario, el segmento obtenido es paralelo al otro lado del triangulo y su longitud es igual a la mitad de la longitud de dicho lado.



$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}(1)\quad \overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}(2)$$

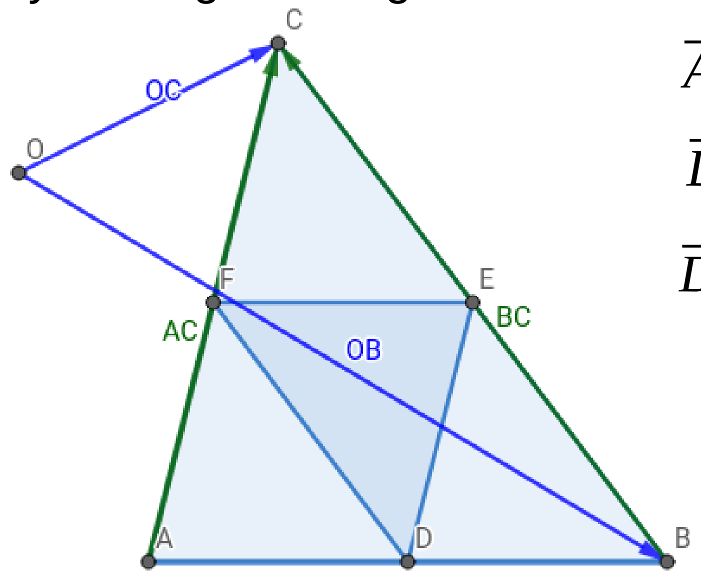
$$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right]$$

$$\overrightarrow{DF}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\right]$$

Cancelo

Ejercicios de la Práctica

6.3.a. Demostrar vectorialmente: Si se unen los puntos medios de dos lados de un triangulo arbitrario, el segmento obtenido es paralelo al otro lado del triangulo y su longitud es igual a la mitad de la longitud de dicho lado.



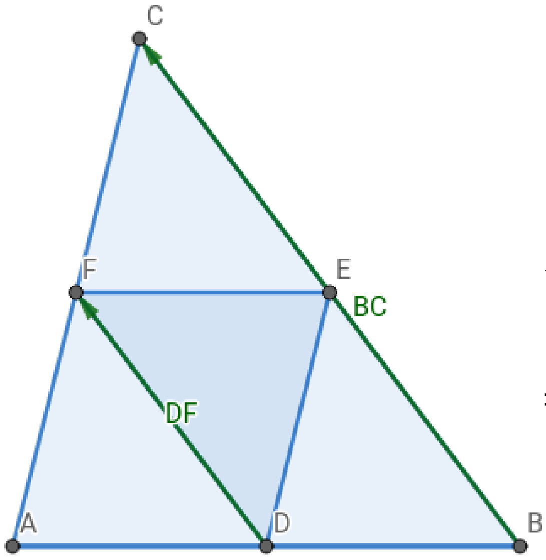
$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,(1)\quad \overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\,(2)$$

$$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right]$$

$$\overrightarrow{DF}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\right]=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right]$$

Ejercicios de la Práctica

6.3.a. Demostrar vectorialmente: Si se unen los puntos medios de dos lados de un triangulo arbitrario, el segmento obtenido es paralelo al otro lado del triangulo y su longitud es igual a la mitad de la longitud de dicho lado.



$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,(1)\quad \overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\,(2)$$

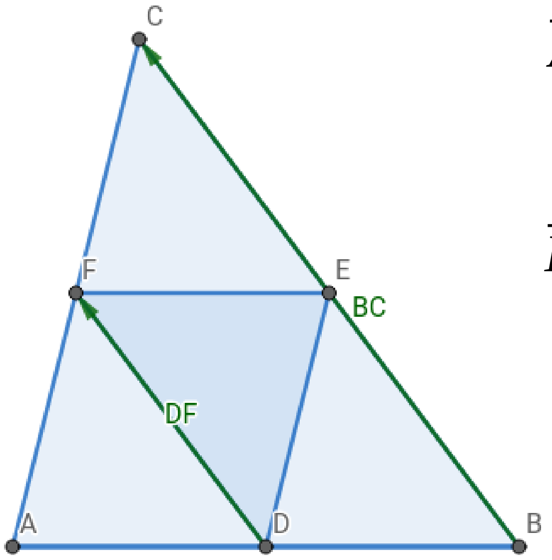
$$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right]$$

$$\overrightarrow{DF}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\right]=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right]$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{DF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

Ejercicios de la Práctica

6.3.a. Demostrar vectorialmente: Si se unen los puntos medios de dos lados de un triangulo arbitrario, el segmento obtenido es paralelo al otro lado del triangulo y su longitud es igual a la mitad de la longitud de dicho lado.



$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,(1)\quad \overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\,(2)$$

$$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right]$$

$$\overrightarrow{DF}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\right]=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right]$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{DF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\qquad \boxed{\Rightarrow \overrightarrow{DF}\,//\,\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{DF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$$