

Estudiante: Especialidad:

Docente con quien cursó la asignatura: Año de cursado:

Ejercicio Corrector	1				2		3			4	Calificación propuesta
	a	b	c	d	a	b	a				

Calificación Final:

Ejercicio 1: Una placa se desliza de tal forma que uno de sus vértices está apoyado en la recta

$$r: \begin{cases} x - 2z + 1 = 0 \\ y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$$

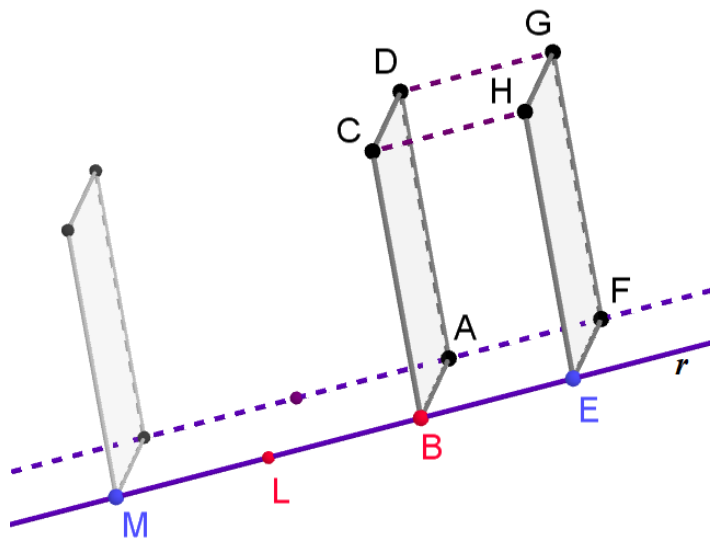
Inicia su movimiento en el punto M donde la recta interseca al plano coordenado xy .

Se detiene en el punto E(5,1,3). Los puntos L y B seccionan al segmento EM en tres partes iguales.

El punto C pertenece al eje z .

La recta r es perpendicular al plano que contiene a la placa.

- Dar las coordenadas del punto B.
- Definir la ecuación general del plano que contiene a la placa ABCD.
- Dar las coordenadas del punto C.
- Si el área de la placa ABCD es igual a 12, ¿cuál es la distancia entre la recta r y la recta paralela que pasa por los puntos A y F? Justificar claramente la respuesta.



Ejercicio 2: Sea $B_S = \{\vec{a} = (1, -1, 0, 1); \vec{b} = (0, 1, 2, 1)\}$ la base de un subespacio S y sean los subespacios $W = \{\vec{x} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + t = 0\}$ y $T = S^\perp \cap W$.

- Definir la dimensión y una base ortogonal de cada uno de los subespacios W y T .
- Sea $h: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 / h(\vec{x}) = \text{proy}_W \vec{x}$. ¿Existen vectores no nulos, $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$ tal que $h(\vec{v}) = \vec{v}$? ¿Existen vectores no nulos, $\vec{u} \in \mathbb{R}^4$ tal que $h(\vec{u}) = \vec{0}$? Para ambas preguntas, en caso de existir dar todas las respuestas posibles.

Ejercicio 3: La matriz $A_f = ((a_{ij})) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ con $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j - i = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$, es la matriz de la transformación lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

La transformación lineal $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es tal que todo vector $\vec{v} \in S$ verifica que $g(\vec{v}) = \vec{v}$ donde $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y\}$ y $g(\hat{i}) = -\hat{i} - 2\hat{k}$.

Analizar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar la respuesta.

- Si A_g es la matriz de la transformación lineal g , entonces A_g es diagonalizable.
- No existe ningún vector $\vec{a} \neq \vec{0}$ tal que $f(\vec{a}) = \vec{0}$.
- La matriz A_f es una matriz nilpotente de índice 2.

Ejercicio 4: Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, B \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ tales que el conjunto solución del sistema $A \cdot X = B$ es el conjunto $\{(1 + \lambda + \mu, 2 - \lambda + 2\mu, \mu) \mid \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\}$. Calcular de forma razonada el rango de la matriz de los coeficientes A y el rango de la matriz ampliada $A' = (A|B)$.

Estudiante: Especialidad:

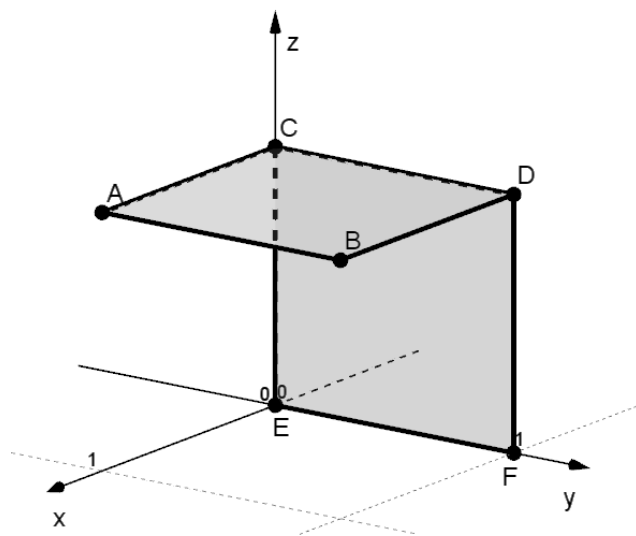
Docente con quien cursó la asignatura: Año de cursado:

Ejercicio Corrector	1					2			3		Calificación propuesta
	a	b	ci	cii	ciii	a	bi	bii	a	b	

Calificación Final:

Ejercicio 1. De una placa metálica delgada de 1 m de ancho y muy larga, se recortan dos cuadrados de 1 m de lado y se fusionan por una arista formando un ángulo recto. Queda la estructura sólida ABCDEF y se la coloca como indica la figura. Las unidades de longitud a continuación son todas en m .

- Dar la ecuación general del plano π que contiene a los vértices A, D y F.
- Se enciende una luz lejana que alumbra a la estructura en forma vertical desde arriba. ¿Qué sombra se proyecta sobre el plano xy ? Indicar la forma de la sombra y sus especificaciones.
- La estructura se rota alrededor de la arista EF de forma que, yendo por el camino angular más corto, la arista AB queda apoyada sobre el plano xy .
 - Indicar el ángulo que gira, el sentido y dar la forma explícita de la transformación efectuada y su matriz asociada.
 - ¿Qué sombra proyecta la estructura en esta posición sobre el plano xy ? Especificar.
 - Dar la ecuación de la recta r que contiene a la arista DF una vez que giró.



Ejercicio 2. Sea el subespacio S definido por:

$$S = \{\vec{x} = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 / x + z = 0 \wedge ay - bt = 0\}$$

- Analizar la dimensión de S para los distintos valores reales de a y b .
- Para $a = b = 1$, sea $g(\vec{x}) = \text{proy}_S(\vec{x})$ la proyección ortogonal de $\vec{x} \in \mathbf{R}^4$ sobre S .
 - Dar una base ortonormal de S y deducir la forma explícita de $g(\vec{x})$.
 - Analizar si la siguiente proposición es verdadera o falsa. Justificar. En caso de ser falsa, dar un contraejemplo.

$$\forall \vec{x} \in S, \text{ se verifica que } (g \circ g)(\vec{x}) = \vec{x}.$$

Ejercicio 3. De la transformación lineal $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ se conoce que:

$$f(0,0,a) = (0,-a,a) \text{ cualquier sea } a \in \mathbf{R},$$

$$(0,1,1) \text{ es invariante frente a } f,$$

$$(1,0,0) \text{ es autovector de autovalor asociado } 2.$$

- ¿Cuál es el transformado mediante f de cada vector del conjunto $\{\hat{i}; \hat{j}; \hat{k}\}$?
- Hallar la forma explícita de f , e indicar si la matriz A asociada a f es diagonalizable. Justificar la respuesta. Si fuera diagonalizable, dar la matriz de pasaje P y la matriz diagonal D con la que A es semejante.

Estudiante: Especialidad:

Docente con quien cursó la asignatura: Año de cursado:

Ejercicio Corrector	1					2			3		Calificación propuesta
	a	bi	bii	c	d	a	b	c	a	b	

Calificación Final:

Ejercicio 1. Para almacenar los motores de una pileta se desea construir un gabinete de hormigón de 2 m de largo ($\|\vec{OC}\| = 2$) y 1 m de ancho ($\|\vec{OA}\| = 1$), ver figura. La tapa será de chapa (cuadrilátero DEFG) y para proteger los motores de la lluvia, se le dará una buena caída. La parte más baja tendrá 1 m de altura ($\|\vec{OE}\| = 1$), mientras que la parte más alta tendrá 1,5 m ($\|\vec{CF}\| = 3/2$).

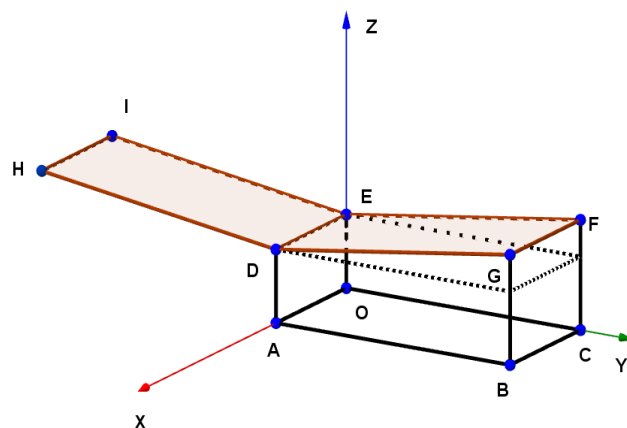
- ¿Cuánta chapa se necesita usar para cubrir la superficie de la tapa?
- Se quiere colocar una manija en la tapa DEFG con 2 tornillos.
 - Uno de ellos (P) está ubicado en la intersección de la recta t con el plano α que contiene a la tapa. Encontrar las coordenadas de P. Dato:

$$t: \begin{cases} -x + \frac{9}{4} = z - \frac{1}{4} \\ y = 1 \end{cases}$$

- El otro, está en $Q(h, 1, 5/4)$. Hallar $h \in \mathbf{R}_{>0}$,

sabiendo que la distancia de Q a la recta s que pasa por los puntos O y D es $3\sqrt{2}/4$.

- En su apertura máxima la tapa queda coincidente con la imagen especular de DEFG con respecto al plano que contiene a la cara DEOA. ¿Qué ángulo gira al pasar de su posición original a la de apertura máxima?
- En un momento del día, el sol proyecta ortogonalmente la sombra de la tapa totalmente abierta sobre el plano xy . Sea $g: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ la transformación lineal (TL) que modela la situación. ¿Permanece invariante $\vec{HI}$ al aplicarle la TL g ? Justificar.



Ejercicio 2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ k & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y el subespacio $S = \{X \in \mathbf{R}^{3 \times 1} / A \cdot X = 2B \cdot X\}$.

- Determinar, según los valores de $k \in \mathbf{R}$, la dimensión del subespacio S .
- Sea $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ la transformación línea cuya matriz asociada es $A + B$ cuando $k = -1$. Dar la forma explícita de f y hallar el subespacio imagen de f . Dar una base y la dimensión del subespacio hallado.
- ¿Es diagonalizable la matriz B cuando $k = 0$? Justificar la respuesta.

Ejercicio 3. Analizar si es verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones. Justificar.

- Si A es la matriz asociada a la transformación $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ que provoca una rotación alrededor del eje z en sentido antihorario en $\pi/2$, entonces A es involutiva de índice 2.
- Sea $A = \{\vec{a}, \vec{b}\} \subset \mathbf{R}^3$ un conjunto de vectores no nulos que genera un subespacio S de dimensión 1. Si $\vec{c} \in S^\perp$ entonces el conjunto $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ es base de $\mathbf{R}^3$.

Estudiante: Especialidad:

Docente con quien cursó la asignatura: Año de cursado:

Ejercicio Corrector	1					2		3			Calificación propuesta
	a	b	c	di	dii	a	b	a	b	c	

Calificación Final:

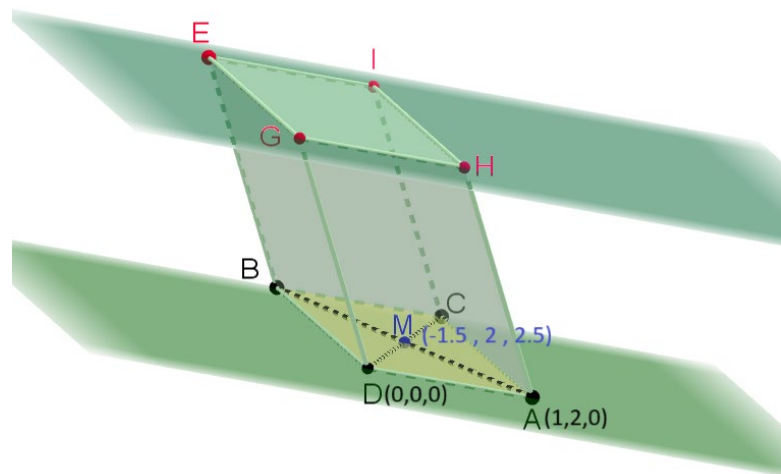
Ejercicio 1: Se construye un paralelogramo ABCD contenido en un plano π . El vértice D coincide con el origen de coordenadas, se conoce el vértice A(1,2,0) y $M(-3/2, 2, 5/2)$ es el punto medio de la diagonal AB.

A partir de ahí se busca construir un contenedor en forma de un paralelepípedo ABCDEGHI.

La tapa Eghi del paralelepípedo está contenido en un plano β que se encuentra a 3 unidades de distancia del plano π , en el semiespacio donde $z > 0$.

Se pide:

- Dar las ecuaciones generales de los planos π y β .
- El contenedor va asegurado con remaches que se colocan en los vértices A, B, C y D. Dar las coordenadas de los puntos B y C.
- Calcular el área de la base ABCD y el volumen del contenedor.
- Si se aplica una transformación lineal $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ que a cada vector de $\mathbf{R}^3$ le asigna su simétrico respecto del plano π . Definir la condición de pertenencia que cumplen en cada caso los vectores:
 - $\vec{v} \in \mathbf{R}^3 / f(\vec{v}) = \vec{v}$
 - $\vec{u} \in \mathbf{R}^3 / f(\vec{u}) = -\vec{u}$



Ejercicio 2: Sea el subespacio S definido por:

$$S = \left\{ A = \left((a_{i,j}) \right) \in \mathbf{R}^{3 \times 3} / -A = A^T \wedge a_{1,2} + a_{1,3} + a_{2,3} = 0 \right\}$$

- Dar la dimensión de S y una base de S . Indicar la dimensión y un vector genérico del subespacio complemento ortogonal de S , es decir $S^\perp$.
- Analizar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Justificar claramente la respuesta.
Si una matriz A no nula de S es la matriz asociada a una transformación lineal $g: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ entonces $\lambda = 0$ es autovalor de A .

Ejercicio 3: De la transformación lineal $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ se conoce que:

$$f(1,1,0) = (1,6,1),$$

$(0,1,0)$ es autovector de autovalor asociado 3,

$$f(0,0,1) = (a, -3, 2).$$

- Hallar la forma explícita de f .
- ¿Existe algún valor de a para que $\vec{u} = (-3, 3, 1)$ sea un autovector de f ?
- Para el valor hallado de a dar todos los autovalores y los subespacios característicos. Analizar si es diagonalizable.

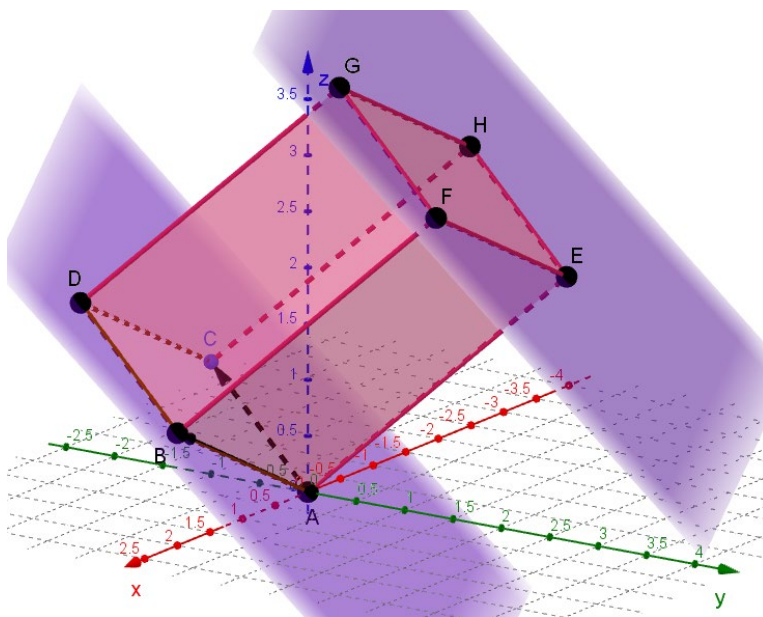
Estudiante: Especialidad:

Docente con quien cursó la asignatura: Año de cursado:

Ejercicio Corrector	1					2			3		Calificación propuesta
	a	b	c	d	e	a	b	c	a	b	

Calificación Final:

Ejercicio 1: La base ABCD de un recipiente hueco en forma de paralelepípedo recto se apoya sobre un estante inclinado. Se considera un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales con su origen coincidente con el vértice A. La orientación de los ejes es tal que se conocen las coordenadas de B(2, 0, 1) y de D(2, -1, 2). Todas las medidas están en decímetros (dm). Una vez anclado, el recipiente contendrá líquido y, para evitar derrames, se colocará a modo de tapa, otro estante apoyado sobre la cara EFGH opuesta a la base (ver figura). Los estantes distan entre sí 3 dm. Responder en forma justificada las siguientes cuestiones:



opuesta a la base (ver figura). Los estantes distan entre sí 3 dm. Responder en forma justificada las siguientes cuestiones:

- Dar la ecuación general de los planos α y β que contienen, respectivamente, a la base y a la tapa.
- La base del recipiente, ¿es cuadrada?
- El líquido ingresará por un tubo de diámetro pequeño incrustado en una cara lateral. El centro del orificio, Q, de inserción coincidirá con el punto medio de la cara CDGH. ¿Qué coordenadas tiene Q?
- Una vez sellado, ¿cuánto líquido contiene el recipiente?
- ¿Es posible realizar una rotación del recipiente alrededor del eje z en un ángulo π sin modificar la posición de los estantes? ¿Cuál sería la nueva posición del vértice D si se realizara?

Ejercicio 2. Sea el subespacio S definido por:

$$S = \left\{ A = \left((a_{ij}) \right) \in \mathbf{R}^{3 \times 3} / A = A^T \wedge a_{1,1} = a_{3,3} = a_{1,3} = 0 \right\}$$

- Dar la dimensión de S y una base de S . Indicar la dimensión y un vector genérico del subespacio complemento ortogonal de S , es decir $S^\perp$.
- Hallar la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre S , donde $\vec{v} \equiv V = \left((v_{ij}) \right) \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ con $v_{ij} = (-1)^{i+j}$.
- Analizar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Justificar claramente la respuesta.
Si una matriz A no nula de S es la matriz asociada a una transformación lineal $g: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ entonces $\lambda = 0$ es autovalor de A .

Ejercicio 3. De la transformación lineal $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ se conoce que:

$$\begin{aligned} f(1,1,0) &= (1,0,1), \\ (0,1,0) &\text{ es autovector de autovalor asociado } -2, \\ f(0,0,1) &= (a, -2, 3). \end{aligned}$$

- Analizar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Justificar claramente la respuesta.
No existe ningún valor de $a \in \mathbf{R}$ para el cual la dimensión del Núcleo de f sea 2.
- Sea $a = 0$, y sea $h: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ la proyección ortogonal sobre el plano yz. Sea el cuadrado de vértices $A(0,0,0); B(1,0,0); C(0,1,0); D(1,1,0)$. Se aplica sobre el cuadrado ABCD la transformación lineal $h \circ f$. La imagen final obtenida, ¿es plana? Si la respuesta es negativa, describir el cuerpo obtenido. Si la respuesta es afirmativa, indicar si es un segmento, un triángulo o un cuadrilátero. Si fuese un cuadrilátero, ¿es un paralelogramo?

Estudiante: Especialidad:

Docente con quien cursó la asignatura: Año de cursado:

Ejercicio Corrector	1				2		3		Calificación propuesta
	a	b	c	d	a	b	a	b	

Calificación Final:

Ejercicio 1: Se construye un depósito (en la figura el cuerpo $ABCDEFGHI$), apoyado sobre un terreno representado por el plano π .

En un sistema de referencia $Oxyz$, se conoce:

Las coordenadas de los puntos $A(4,2,1)$ y $B(2,6,3)$.

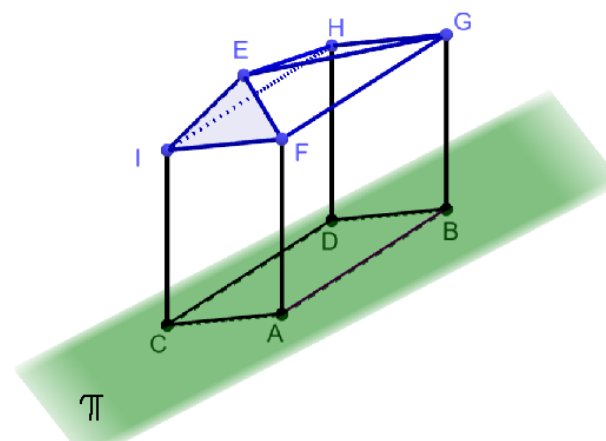
La base $ABCD$ es un rectángulo.

El cuerpo $ABCDGHI$ es un paralelepípedo.

C es un punto del eje x .

El segmento AF es paralelo al eje z y tiene una longitud igual a 4.

El plano π contiene al eje x .



- Dar las coordenadas de los vértices C y F .
- Se pretende almacenar cajas en este depósito, es necesario conocer el volumen. Calcular el volumen del cuerpo $ABCDGHI$.
- En la cara IEF se quiere pintar el logo de la empresa. Se sabe el vértice E está a igual distancia del vértice I y del F y que el punto E pertenece a la recta $r: \frac{-1-x}{4} = \frac{y-5}{7} = \frac{z-9}{6}$. Dar las coordenadas del punto E y el área de la cara IEF .
- Si $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 / f(x, y, z) = (x, -y, z)$ se aplica sobre el plano y el cuerpo de la figura, ¿qué provoca? Describir el efecto y detallar en que se transforma el rectángulo $ABCD$.

Ejercicio 2: Sean las transformaciones lineales $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 / f(X) = A \cdot X$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$g: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 / g(x, y, z) = (ax + 3y - z, -x + ay + (b+1)z, 3x + (b-3)y + z),$$

$$h: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 / h(X) = C \cdot X \text{ con } C = A - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Hallar los valores de a y b tal que $(f \circ g)(\vec{x}) = (g \circ f)(\vec{x})$.
- Inducir una hipótesis para generalizar la matriz asociada a la transformación lineal que implica aplicar n veces la transformación h . $\left(\overbrace{h \circ h \circ \dots \circ h}^n \right)$

Ejercicio 3: Sea el subespacio S generado por el conjunto A :

$$A = \{ \vec{a} = (1, 1, 1, -q), \vec{b} = (2, q, 1, -2), \vec{c} = (0, 1, 2 - q, 0) \}$$

- Analizar la dimensión de S para los distintos valores reales de q . Para el valor de q que verifica que la dimensión de S es igual a dos, definir S y proponer una base.
- Para $q = 1$, analizar si la siguiente proposición es verdadera o falsa. Justificar. En caso de ser falsa, dar un contraejemplo.

No existe valor real de h tal que $\text{proy}_S(3, h-1, -1, h+1) = \vec{0}$.

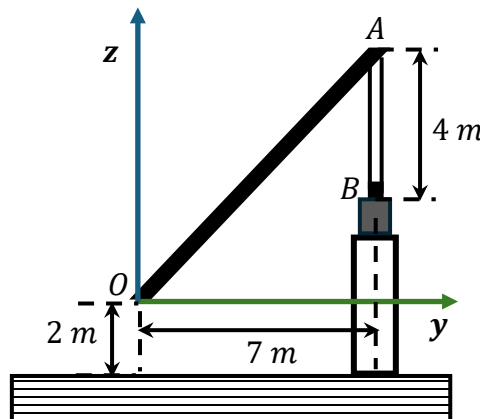
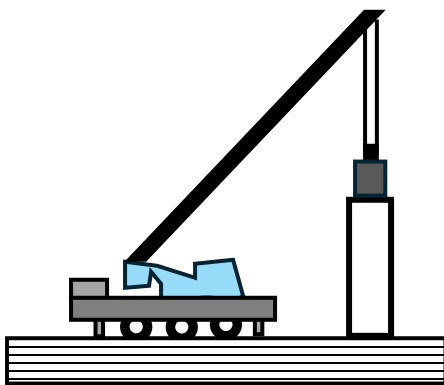
Estudiante: Especialidad:

Docente con quien cursó la asignatura: Año de cursado:

Ejercicio Corrector	1			2			3		Calificación propuesta
	a	b	c	a	b	c	a	b	

Calificación Final:

Ejercicio 1. Una grúa debe bajar un cuerpo desde una columna de 4 metros de alto hasta el piso. Las figuras modelan en forma esquemática la situación inicial y proponen un sistema de coordenadas asociado de forma que el eje de las x apunta hacia afuera del plano del papel completando la terna ortogonal derecha. El eje y pasa



por el punto medio del eje central de la columna. El cable que sostiene al cuerpo inicialmente tiene una longitud (incluido el gancho) de 4 metros. El punto A identifica el extremo final de la pluma. El cuerpo es un cubo de 1 metro de lado, sostenido desde el punto medio de la cara superior (punto B , unión entre el gancho y el cubo).

- Dar las ternas que corresponden a las coordenadas iniciales de A y de B y calcular la longitud de la pluma en la posición inicial. Luego la pluma se extiende al doble de su longitud, sin cambiar su inclinación, arrastrando al cubo (el cable siempre queda vertical). ¿Cuáles son las coordenadas de A y de B luego de dicha acción?
- A continuación, para bajar el cubo la pluma se gira 60° alrededor del eje z en sentido horario y luego se extiende la longitud del cable hasta que el cuerpo se apoya en el piso. ¿Cuáles son las nuevas coordenadas de los puntos A y B ?
- Dar las expresiones matricial y explícita de las transformaciones lineales que sufre la pluma (expansión en el plano yz y rotación, respectivamente). Calcular la matriz de la composición de las TL que tenga el mismo efecto que la sucesión de acciones aplicadas.

Ejercicio 2. Sea la transformación lineal $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ cuya matriz asociada es $A = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ -1 & -h & -1 \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix}$.

- Analizar para los distintos valores de h la dimensión del Núcleo de f .
- Para algún valor de h tal que la dimensión de la Imagen de f sea menor a 3, hallar los subespacios $Im(f)$ y $Nu(f)$. Para ambos subespacios, dar las condiciones de pertenencia, escribir un vector genérico y una base.
- ¿Cuánto vale h para que $\vec{x} = (2, 1, 1)$ sea autovector de f ?

Ejercicio 3. Analizar si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera, demostrarlo. En caso de ser falsa, dar una explicación clara y/o un contraejemplo.

- Sea $B(S) = \{\vec{a}; \vec{b}\}$ una base ortonormal de un subespacio $S \subset \mathbf{R}^3$, y $\vec{c} \in S^\perp$ con $\vec{c} \neq \vec{0}$. Entonces el conjunto $M = \{\vec{u} = \vec{a}; \vec{v} = \vec{a} - \vec{b}; \vec{w} = \text{proy}_S \vec{c}\}$ es linealmente dependiente.
- Se sabe que X_1 y X_2 son soluciones distintas del sistema inhomogéneo $A \cdot X = B$ (con $B \in \mathbf{R}^{m \times 1}$ no nula, $A \in \mathbf{R}^{m \times m}$, $X \in \mathbf{R}^{m \times 1}$) y X_3 es solución del sistema homogéneo asociado, $A \cdot X = 0$. Entonces $Y = \alpha X_3 + \beta(X_1 - X_2)$ es solución del sistema homogéneo $\forall \alpha, \forall \beta \in \mathbf{R}$.