U.T.N. F.R.H. Examen final de Álgebra y Geometría Analítica Julio 2019

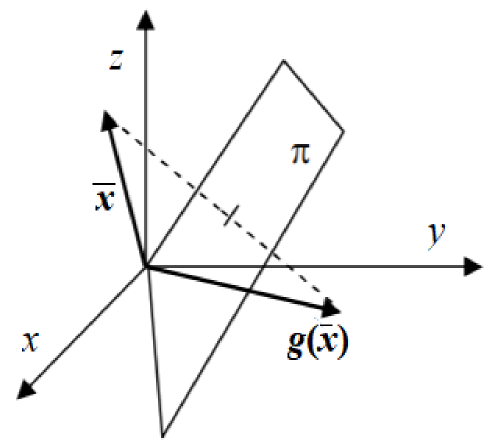
Alumno: .... Especialidad: ....

Profesor con quien cursó la asignatura: .... Año de cursado: ....

Ejercicio	**1**	**2**	**3**	**4**	**Calificación**
Corrector	**a b c d**	**a b c**	**a b**		**propuesta**

Calificación Final:...

Ejercicio 1. Sean los vectores $\vec{u}=(5,-2,4)$ y $\vec{v}=(-3,6,0)$ y sea la transformación lineal $g:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ que le asigna a cada vector de $\mathbf{R}^3$ su imagen especular con respecto al plano π. Se conoce que $g(\vec{u})=\vec{v}$.



- **a)** ¿La información dada es suficiente para definir el plano π? Justificar la respuesta y en caso de ser posible dar la ecuación de dicho plano.
- **b)** Identificar y definir mediante sus respectivas ecuaciones a los subespacios Imagen y Núcleo de *g*.
- **c)** Si *A* es la matriz asociada a la transformación g, ¿es *A* una matriz involutiva? ¿Es *A* una matriz idempotente? Justificar y en caso de responder afirmativamente, indicar el índice.
- **d)** Si $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ es la transformación lineal que proyecta ortogonalmente sobre el plano π, calcular $f(\vec{u})$.

Ejercicio 2. Decidir si cada una de las afirmaciones siguientes es verdadera o falsa. Si es verdadera demostrarla, si es falsa proponer un contraejemplo. Sean *A* y *B* dos matrices inversibles de $\mathbf{R}^{n\times n}$.

- **a)** Si $A^{-1}\cdot(C+X)\cdot B^{-1}=I$ entonces $X=A\cdot B-C$.
- **b)** Si $X\in\mathbf{R}^{n\times 1}$ es autovector de $A\cdot B^{-1}$ con autovalor $\lambda\neq 0$, entonces X es también autovector de $B\cdot A^{-1}$ pero con autovalor λ^{-1}.
- **c)** El rango de $M=A\cdot B$ es menor que *n*.

Ejercicio 3. Sea S el subespacio generado por el siguiente conjunto de vectores:

$$\left\{\vec{v}_1=(1,1,-1,2);\vec{v}_2=(-1,1,-1,1);\vec{v}_3=(\alpha,\alpha,\alpha^2,1)\right\}.$$

- **a)** Definir la dimensión de *S* para los valores posibles de α.
- **b)** Para $\alpha=1$ definir el subespacio complemento ortogonal de *S*, dar una base para dicho subespacio y la dimensión del mismo.

Ejercicio 4. La matriz $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ 0 & 2 & k\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$, ¿es diagonalizable para cualquier valor de $k\in\mathbf{R}$? Justificar la respuesta.

U.T.N. F.R.H. Examen final de Álgebra y Geometría Analítica Agosto 2019

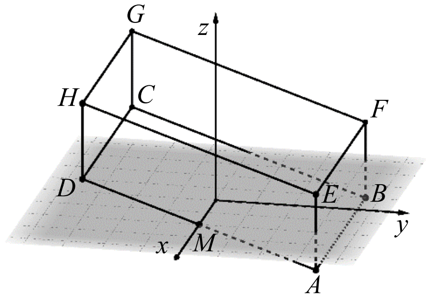
Alumno: .... Especialidad: ....

Profesor con quien cursó la asignatura: .... Año de cursado: ....

1				2		3		4			Calificación propuesta
a	b	c	d	a	b	a	b	a	b	c	

Calificación Final: ....

Ejercicio 1. El paralelepípedo *ABCDEFGH* tiene como vértice al punto $A(2,3,-1)$; $M(2,0,0)$ es punto medio de $\overline{AD}$; la arista $\overline{AE}$ es paralela al eje *z*; la arista $\overline{AB}$ es paralela al eje *x*; $\left|\overline{AE}\right|=2;\left|\overline{AB}\right|=6.$



a) Encontrar la posición relativa de la recta r_1 que pasa por los puntos *C* y *M*, y la recta r_2 determinada por *A* y *B*. En caso de existir hallar el punto donde se cortan, o bien calcular la distancia entre r_1 y r_2.

b) Hallar la intersección del plano π que contiene los puntos *A*, *D*, *H* y la recta $s\equiv\begin{cases} x=-1+2\mu \\ y=-1+\mu \ ,\forall\mu\in\mathbf{R}. \\ z=1 \end{cases}$

c) Hallar el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los planos que contienen las caras *ADHE* y el plano que contiene la *BCGF*. Justificar la respuesta con un cálculo o planteo adecuado.

d) El cuerpo se rota 180^0 alrededor del eje *x*, ¿dónde quedan ubicados los vértices *A*, *B* y *G* luego de dicha rotación?

Ejercicio 2. Dados los vectores $\vec{a}=(m,1-m,1)$, $\vec{b}=(2m,1,1)$ y $\vec{c}=(1,-1,-1)$:

a) Calcular para que valores de *m* los tres vectores son linealmente independientes.

b) Para $m=0$, dar la ecuación del subespacio *S* que generan y su dimensión. Dar una base del subespacio complemento ortogonal de *S*.

Ejercicio 3. Sea *A* la matriz asociada en la base canónica a una transformación lineal f: $\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ con

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular $(A+I)^2$ donde *I* es la matriz identidad. Identificar qué tipo de matriz cuadrada especial es *A*+*I*.

b) Hallar los autovalores de la matriz *A* y sus autovectores asociados. ¿Es diagonalizable la matriz *A*? Justificar la respuesta.

Ejercicio 4. Indicar el valor de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones. En caso de ser verdadera, demostrarla; si es falsa, dar un contraejemplo o una justificación clara.

a) Sea una transformación lineal de f: $V\to W$. Si dim(V) = 5 y la dim(W) = 3 entonces la dimensión del Núcleo de f es igual a 2.

b) Sea una transformación lineal de f: $V\to W$. Si *V* y *W* tienen dimensión finita y la dim(Nu(f)) = dim(V), entonces la dimensión de la Imagen de f es 0.

c) Sea $A=\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}\subset\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ un conjunto de vectores linealmente independientes, entonces el conjunto $B=\{2\vec{u}-\vec{v};\vec{v}+\vec{w};(k-1)\vec{u}+\vec{w}\}\subset\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ es linealmente independiente para $\forall k\in\mathbf{R}$.

U.T.N. F.R.H. – **Examen final de Álgebra y Geometría Analítica** - Diciembre 2019

Alumno: .... **Especialidad:** ....

Profesor con quien cursó:.. **Año de cursada:** ....

	1			2			3				Calificación propuesta
Corrector	a	b	c	a	b	c	a	b	c	d	

Calificación Final:..

1) **a)** Sean r_1: $(x; y; z) = (1; 1; 0) + \lambda\ (2; 1; 2)\ \forall\lambda\in\mathbf{R}$ y r_2: $(x; y; z) = (0; -1; -1) + \mu\ (2; 1; 2)\ \forall\mu\in\mathbf{R}$. Hallar la ecuación del plano π equidistante de ambas rectas y perpendicular al plano que las contiene.

b) Determinar el área de un cuadrado que tiene sus lados contenidos en las rectas r_1 y r_2.

c) Demostrar que si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son 3 vectores de $\mathbf{R^3}$ linealmente dependientes entonces $\vec{a}\times\vec{b}$ es paralelo a $\vec{a}\times\vec{c}$.

2) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de la transformación lineal f: $\mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ y sea el cuadrado de vértices $O(0;0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $C(0; 2; 0)$ y $D(2; 2; 0)$.

a) Hallar la transformación lineal g que resulta de aplicar a cualquier vector, n veces la transformación lineal f.

b) Analizar si A^n es diagonalizable con $n\in\mathbf{N}$. Justificar la respuesta.

c) Justificar por qué f es inversible y verificar que el área de las respectivas figuras que se obtienen al aplicarle f y f^{-1} al cuadrado $OBDC$ es la misma.

3) Sean f: $\mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ la simetría respecto del plano de ecuación $x + y + z = 0$ y g: $\mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ una rotación en sentido antihorario de 120° alrededor del eje z.

a) Encontrar las matrices A_f y A_g de las transformaciones f y g expresadas en las bases canónicas.

b) Determinar los autovalores de A_f y sus respectivos autovectores. Justificar la respuesta.

c) Hallar una base ortonormal de autovectores de A_f.

d) Verificar o justificar adecuadamente que la matriz $A = \left(A_g\right)^3 \cdot \left(A_f\right)^3$ es involutiva.

U.T.N. F.R.H. **Examen final de Álgebra y Geometría Analítica** **Diciembre 2019 T3**

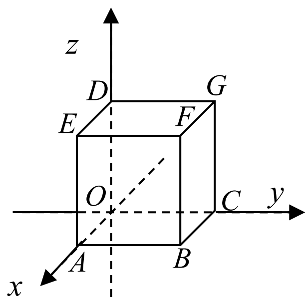
Alumno: ………………………………………………… **Especialidad:** …………………

Profesor con quien cursó la asignatura: ……………… **Año de cursado:** ....

Ejercicio Corrector	1 a b c d e f	2	3 a b c	Calificación propuesta

Calificación Final:..

Ejercicio 1. Sea el cubo *OABCDEFG* de lado 2 ubicado inicialmente como se muestra en la figura de la derecha. Sea *H* el punto medio entre *A* y *B*, *Q* es punto medio entre *E* y *D*, y *T* el centro de la cara *BCGF*.



Sean las siguientes transformaciones lineales:

$f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, rotación de $\pi/2$ en sentido antihorario con respecto al eje *y*,

$g: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, rotación de $\pi/2$ en sentido horario con respecto al eje *z*.

a) Hallar el área del triángulo de vértices *HQT*.

b) ¿Qué distancia mínima hay que desplazar al cubo para que el plano que contiene al triángulo de vértices *HQT* se transforme en un subespacio? Justificar la respuesta.

c) Analizar la dependencia o independencia lineal de $\left\{\overrightarrow{DG};\overrightarrow{FB};\overrightarrow{QT}\right\}$.

d) Al cubo en su posición original se le aplica primero *f* y luego *g*. Indicar cuál de las 8 posiciones de la figura anexa corresponde a la posición final luego de aplicar de ambas transformaciones. En la configuración elegida, ponerle el nombre a los vértices *OABCDEFG* respetando su posición final.

e) Dar la matriz asociada y la forma explícita de: f, g, $h = g \circ f$, $w = f \circ g$.

f) Verificar o justificar adecuadamente que la matriz asociada a *f* es involutiva. ¿De qué índice?

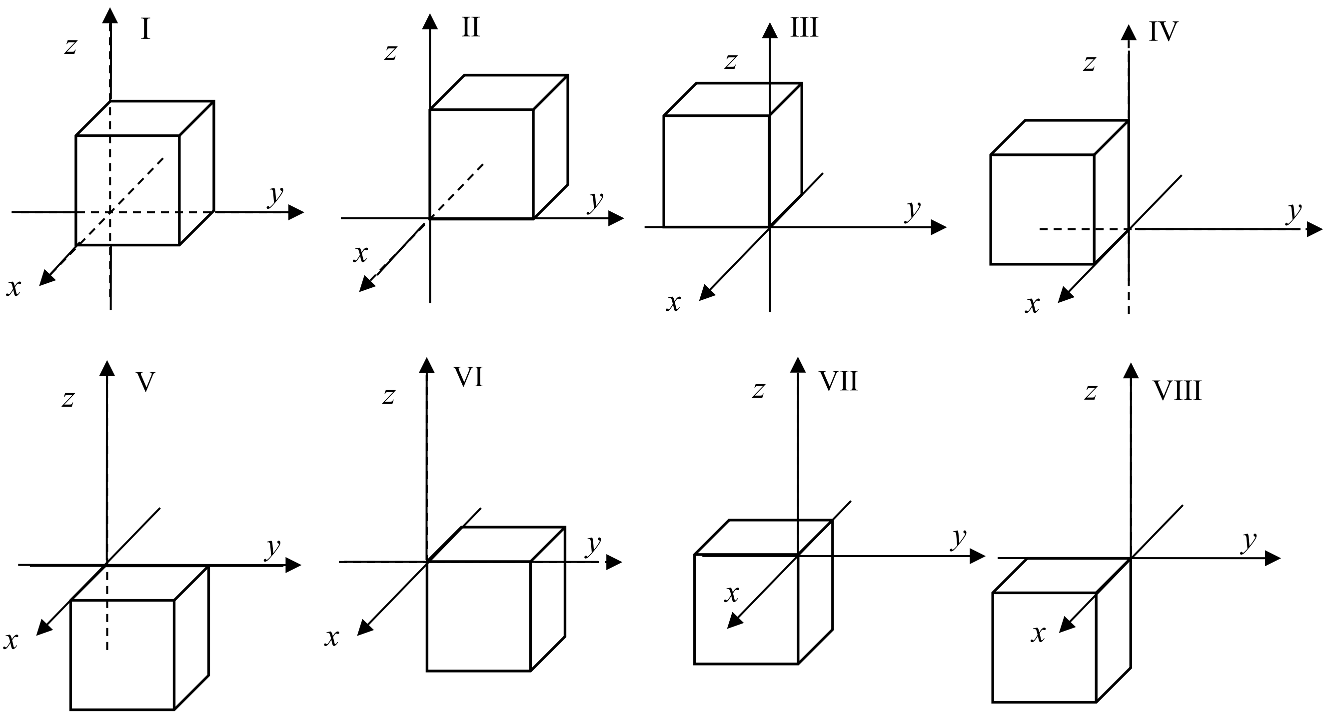
Ejercicio 2. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores no nulos de $\mathbf{R}^3$, y sea S el subespacio generado por $\vec{v}$. Demostrar que $\vec{w} = \vec{u} - proy_{\vec{v}}\vec{u}$ pertenece al subespacio $S^{\perp}$.

Ejercicio 3. Analizar si cada una de las afirmaciones siguientes es verdadera o falsa. Si es verdadera demostrarla, si es falsa proponer un contraejemplo.

a) En un sistema de ecuaciones lineales compatible indeterminado siempre se puede eliminar una ecuación y obtener un sistema equivalente al original.

b) Si $A \in \mathbf{R}^{5\times5}$ es la matriz asociada a una transformación lineal *f*, y se conoce que X_1 y X_2 son dos autovectores linealmente independientes con el mismo autovalor λ, entonces el rango de la matriz $(A - \lambda I)$, donde *I* es la matriz identidad de orden 5, no puede ser mayor a 3.

c) No existe valor de $k \in \mathbf{R}$ para que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ sea diagonalizable.


I
II
III
IV
V
VI
VII
VIII
x
y
z

U.T.N. F.R.H. – Examen final de Álgebra y Geometría Analítica – Febrero 2020 – T1

Alumno: …………………………………………………………………… **Especialidad: ………………………**

Profesor con quien cursó la asignatura: …………………………… **Año de cursado: ……………….**

Ejercicio / Corrector	1 a b c d e	2 a b c	3 a b c	Calificación propuesta

Calificación Final: ………………………

Ejercicio 1. Sean los planos $\pi_1: y=2$ y $\pi_2: z=6$.

a) Dar la ecuación vectorial paramétrica de $\pi_1 \cap \pi_2$. Dar su interpretación geométrica. Hacer un esquema gráfico con π_1, π_2, $\pi_1 \cap \pi_2$. ¿Es $\pi_1 \cap \pi_2$ un subespacio? Justificar la respuesta.

b) Hallar el lugar geométrico de todos los puntos cuya distancia a π_1 es 2 y, simultáneamente, su distancia a π_2 también es 2. Dar su interpretación geométrica. Describirlo, en caso de ser posible, con ecuaciones vectoriales paramétricas.

c) Encontrar un punto $Q \in \pi_1$ y un punto $T \in \pi_2$ de forma que al unirlos quede definido un versor paralelo a $\vec{u} = (2,2,-1)$. ¿Es el único par de puntos que satisface lo pedido? Justificar la respuesta y si la respuesta es negativa dar todas las soluciones posibles.

d) Escribir la forma matricial y la forma explícita a la transformación lineal $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ correspondiente a una rotación de ángulo θ en sentido antihorario alrededor del eje z.

e) Dar la ecuación general del plano que se obtiene al aplicarle a π_1 la transformación f con $\theta = 45°$.

Ejercicio 2. Sea A una matriz cuadrada de orden n tal que $(A-I)^2 = O$ donde I es la matriz identidad y O es la matriz nula, ambas de orden n.

a) Escribir A^2 como combinación lineal de A y de I. Inducir una ley para la expresión de A^h escrita como combinación lineal de A y de I cualquiera sea $h \in \mathbf{N}$.

b) ¿Se puede asegurar que $\det(A-I)=0$? ¿Se puede asegurar que $\det(A)=1$? Justificar ambas respuestas.

c) La matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, ¿verifica la condición dada en el enunciado?

Ejercicio 3. Dado el subespacio S definido por

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,/\, (x,y,z) = \lambda(2,-2,1) + \mu(-2,2,k) \ \ \forall \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R} \right\},$$

y sea $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la transformación lineal correspondiente a la proyección ortogonal sobre S.

a) Analizar la dimensión del núcleo y de la imagen de f para los distintos valores de k. Justificar en forma clara la respuesta.

b) Para $k=8$ dar la forma explícita y matricial de f. Indicar si f es diagonalizable en forma justificada. En caso de que lo sea, dar los autovalores y los subespacios de autovectores asociados a los mismos.

c) Completar los siguientes cuadrados con SI o NO de acuerdo a si la matriz asociada a f hallada en **b)**, cumple o no la propiedad mencionada a la derecha del cuadrado. Justificar la respuesta

☐ Simétrica ☐ Involutiva ☐ Idempotente

U.T.N. F.R.H. – Examen final de Álgebra y Geometría Analítica – Febrero 2020 – T2

Alumno: …………………………………………………………………… **Especialidad: ………………………**

Profesor con quien cursó la asignatura: …………………………… **Año de cursado: ………………**

Ejercicio / Corrector	1 a b c d e	2 a b	3	4	Propuesta Calificación

Calificación Final: ………………………

Ejercicio 1. Los puntos O, A, B y C son vértices de un cuadrado de lado 1. Se conoce que $O(0,0,0)$, A pertenece al semieje positivo del eje "x", B pertenece al plano coordenado $(x;z)$ y C pertenece al semieje positivo del eje "z".

El punto B' es simétrico del punto B, respecto del plano $\pi \equiv \ y-2=0$.

a) Escribir las coordenadas de los vértices del cuadrado, del punto B' y de M, siendo M el punto medio del lado $\overline{BC}$. Realizar un esquema gráfico.

b) Calcular el área del triángulo que tiene por vértices a los puntos: A, M y B' y escribir la ecuación del plano "α", que contiene a los vértices del triángulo.

c) Hallar la intersección de la recta "r", que pasa por los puntos A y B', con el plano π.

d) Expresar en forma explícita la transformación lineal, que hace girar al cuadrado inicial en el sentido antihorario, alrededor del eje "x", un ángulo $\hat{\theta} = \frac{\pi}{2}$ y dar las coordenadas de los vértices del cuadrado al aplicarle dicha transformación lineal.

e) Describir geométricamente los autovectores de la matriz asociada a la transformación lineal.

Ejercicio 2. Determinar el valor de verdad (**V** ó **F**) de cada una de las siguientes afirmaciones. Si resulta verdadera, demostrarla. Si es falsa, proponer un contraejemplo o justificarlo adecuadamente.

a) Si $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ es una base ortonormal para $\mathbf{R}^3$, entonces $A = \{\vec{a}+\vec{b}\,;\ (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c};\ \vec{c}\}$, es linealmente independiente.

b) Si el conjunto de vectores $M = \{\vec{a}\,;\ \vec{b}\,;\ \vec{c}\}$ es un conjunto de vectores no coplanares de $\mathbf{R}^3$, entonces el complemento ortogonal al subespacio $S = gen\,\{\vec{a}, \vec{b}\}$, es $S^{\perp} = gen\,\{\vec{c}\}$.
Notación. $gen\,\{\quad\}$: subespacio generado por el conjunto mencionado entre llaves.

Ejercicio 3. Sea la transformación lineal

$$f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 \,/\, f(x,y,z) = (x+y+az\,, -x+ay-az, x+y-bz).$$

Analizar las dimensiones del núcleo y de la imagen de f, para los diferentes valores reales de "a" y de "b".

Ejercicio 4. Sean las matrices A y B, reales de orden "n", inversibles. Si $X \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\,x\,1}}$ es autovector de $B \cdot A^{-1}$ con autovalor $\lambda \neq 0$, demostrar que X también es autovector de $A \cdot B^{-1}$ con autovalor λ^{-1}.

U.T.N. F.R.H.– Examen final de Álgebra y Geometría Analítica – Febrero 2020 – T3

Alumno: ………………………………………………….. **Especialidad: ……………………**

Profesor con quien cursó la asignatura: ………………….. **Año de cursado:..........................**

Ejercicio / Corrector	1 (a b c d e)	2 (a b)	3 (a b c)	4	Calificación propuesta

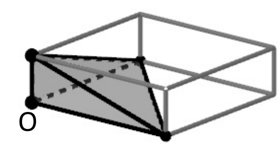
Calificación Final:………………………

Ejercicio 1. Los vértices consecutivos de un paralelogramo son A(1,1,1) y B(0,*h*,0), con $h \in \mathbf{R}_{\geq 0}$. El centro del paralelogramo es M(0,0,1). Se pide:

a) Hallar las coordenadas de los otros dos vértices C y D.

b) Dar la ecuación general del plano π que contiene al paralelogramo ABCD. ¿El conjunto de puntos del plano π constituyen un subespacio? Analizar para los distintos valores de *h*.

c) El plano π al intersecar a los ejes coordenados define tres puntos que determinan junto al origen de coordenadas O(0,0,0) un tetraedro T. Si se le aplica al tetraedro T la transformación lineal $f:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 \,/\, f(x,y,z)=(x,y+a\cdot z,z)$, demostrar que para cualquier valor de $a \in \mathbf{R}$ el volumen del tetraedro no varía. Nota: el volumen del tetraedro es la sexta parte del volumen del paralelepípedo asociado (ver figura).



d) Calcular *h* para que el área del paralelogramo ABCD sea $\sqrt{24}$.

e) Para *h* = 1, dar la coordenadas del punto O’ simétrico del origen O(0,0,0) respecto del plano π.

Ejercicio 2. Determinar el valor de verdad (**V** ó **F**) de cada una de las siguientes afirmaciones. Si resulta verdadera, demostrarla. Si es falsa, proponer un contraejemplo o justificarlo adecuadamente.

a) Sea $A \in \mathbf{R}^{2\times1}$ y $B \in \mathbf{R}^{1\times2}$ entonces $A \cdot B$ no tiene inversa.

b) Sea $A=\left\{\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right\}$ un conjunto de vectores de $\mathbf{R}^4$, S_A el subespacio generado por A y $\vec{d} \in \mathbf{R}^4$ con $\vec{d} \notin S_A$ entonces $B=\left\{\vec{a};\vec{b};\vec{c};\vec{d}\right\}$ es base de $\mathbf{R}^4$.

Ejercicio 3. De la transformación lineal $f:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ se conoce que el núcleo es el subespacio $W=\left\{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 \,/\, \left\langle \vec{x};(0,1,-3)\right\rangle = 0\right\}$ y que los vectores del subespacio $S=\left\{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 \,/\, \vec{x}\times(1,1,0)=\vec{0}\right\}$ permanecen invariantes al aplicarles *f*.

a) Indicar la dimensión de los subespacios S y W. Dar una base para cada uno.

b) Definir la forma explícita de la transformación *f*.

c) ¿La matriz A asociada a la transformación *f* es diagonalizable? En caso afirmativo definir la matriz diagonal D y la matriz de pasaje P.

Ejercicio 4. Demostrar que la matriz $A = I - 2U \cdot U^T$ es una matriz simétrica, donde I es la matriz identidad de orden n y $U \in \mathbf{R}^{n\times1}$. Mencionar las propiedades usadas en cada paso de la demostración.