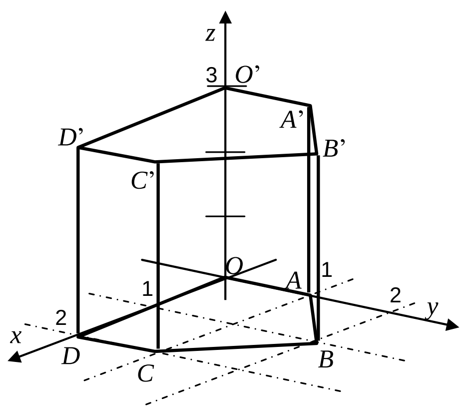
U.T.N. F.R.H. – **Examen final de Álgebra y Geometría Analítica** - Agosto 2009 – T2

Alumno: .... **Especialidad:** ....

Profesor con quien cursó:.................................. **Mes y año de firma TP:** ....

Ejercicio / Corrector	1 (a b c)	2 (a b)	3	4 (a b)	Calificación

Calificación Final:..



Ejercicio 1. El pentágono definido por los puntos *OABCD* se traslada paralelo a si mismo 3 unidades en la dirección del semieje positivo de *z*, ubicando el pentágono *O'A'B'C'D'*. A partir de allí se define el prisma recto de base pentagonal representado en la figura.

a) Calcular la distancia entre la recta que contiene a la arista *O'D'*, y la recta que contiene a los vértices *B* y *C'*.

b) Hallar el volumen del prisma.

c) La transformación lineal $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ provoca un giro alrededor del eje *z*, y al aplicarla al prisma, la arista *BB'* queda contenida en el plano coordenado *yz*. Indicar la forma explicita y la matriz asociada a *f*.

Ejercicio 2. Analizar si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera, demostrarla mencionando todas las propiedades usadas; en caso de ser falsa dar un contraejemplo.

a) Si $M = \{\vec{a};\vec{b}\}$ es un conjunto de vectores ortonormales de $\mathbf{R}^3$, el conjunto *L* constituye una base de $\mathbf{R}^3$ donde $L = \{\vec{a};\vec{b};\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})\}$.

b) Si $M = \{\vec{a};\vec{b}\}$ es un conjunto de vectores ortonormales de $\mathbf{R}^3$, el conjunto *C* constituye un sistema de generadores de $\mathbf{R}^3$ donde $C = \{\vec{a};\vec{b};\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b});(\vec{a}\times\vec{a})\times\vec{b};\vec{a}\times\vec{b}\}$.

Ejercicio 3. Sea $X^T = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)$ con x_1, x_2, x_3 escalares reales arbitrarios. Sea *Y* una matriz de orden 3 tal que su primera columna es idéntica a *X*, su segunda columna es el doble de su primera columna, y su tercera columna es la opuesta de la primera. Sea *Z* una matriz de orden 3 tal que su primera fila es idéntica a X^T, su segunda fila es el doble de su primera fila y su tercera fila es la opuesta de la primera. Hallar, en caso de ser posible, matrices *A*, *B*, *C* y *D* que verifican las siguientes ecuaciones con toda *X*. En caso de no existir alguna de ellas, justificar la respuesta.

$$X \cdot A = Y; \quad B \cdot X = Y; \quad X \cdot C = Z; \quad D \cdot X = Z$$

Ejercicio 4. Sea $S \subset \mathbf{R}^3$ el subespacio vectorial generado por el vector $\{\vec{u} = (1,2,-2)\}$ y sea f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la transformación lineal correspondiente a la proyección ortogonal sobre el subespacio $S^\perp$ (complemento ortogonal de *S*).

a) Hallar la forma explícita de *f* y su matriz asociada.

b) Hallar los autovalores y autovectores de *f*. Dar una interpretación geométrica de los mismos y mencionar que vínculo existe entre los subespacios de autovectores de *f* y el núcleo y la imagen de *f*.

U.T.N. F.R.H. – **Examen final de Álgebra y Geometría Analítica** - Agosto 2009 – T1

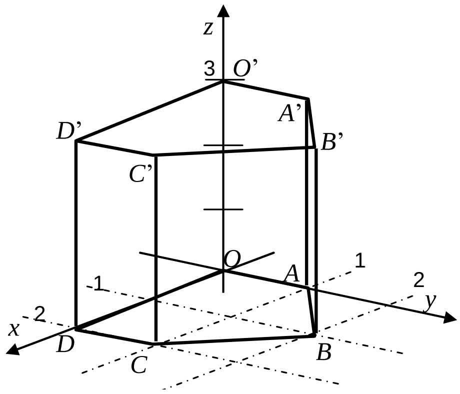
Alumno: .... **Especialidad:** ....

Profesor con quien cursó:................................... **Mes y año de firma TP:** ....

Ejercicio	1	2	3	4	Calificación
Corrector	a b c		a b	a b	

Calificación Final:..

Ejercicio 1. El pentágono definido por los puntos *OABCD* se traslada paralelo a si mismo 3 unidades en la dirección del semieje positivo de *z*, ubicando el pentágono *O'A'B'C'D'*. A partir de allí se define el prisma recto de base pentagonal representado en la figura.



d) Hallar la intersección del plano que contiene a la cara *BCB'C'* con el plano coordenado *xz*. Representar ese lugar geométrico mediante una/s ecuación/es adecuada/s y graficarlo.

e) ¿Es posible hallar un subespacio de dimensión 2 que sea paralelo a la cara *ABA'B'*? En caso afirmativo, indicar la/las ecuación/es que lo identifican; en caso negativo, justificar la respuesta.

f) Estudiar la dependencia o independencia lineal del conjunto $\left\{\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{CB}; \overrightarrow{D'O'}\right\}$.

Ejercicio 2. Sean *A*, *B*, $X \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times n}}$ tales que $\exists B^{-1}$ y cumplen que

$$A^T - (2B)^{-1} \cdot X = [A \cdot (B^{-1})^T]^T \,.$$

Despejar *X* de la expresión anterior utilizando solamente propiedades de operaciones con matrices. Dar por resultado una expresión donde solo aparezcan combinaciones lineales entre A^T, B y productos de estas dos matrices. En caso de no ser posible, justificar la respuesta.

Ejercicio 3. Analizar si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera, demostrarla; en caso de ser falsa dar un contraejemplo.

a) $S\subset\mathbf{R}^3$ con dim(*S*)=2, es el subespacio generado por $\{\vec{a};\vec{b};\vec{c}\}$, vectores no nulos y no paralelos, entonces el subespacio generado por $\{\vec{a};\vec{b}\}$ también tiene dimensión 2.

b) Sean $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} a_1 & a_2+a_1 & -ka_4 & a_4-a_3 \\ b_1 & b_2+b_1 & -kb_4 & b_4-b_3 \\ c_1 & c_2+c_1 & -kc_4 & c_4-c_3 \\ d_1 & d_2+d_1 & -kd_4 & d_4-d_3 \end{pmatrix}$ matrices reales. Se verifica que $\det(Q) = -k\det(M)$.

Ejercicio 4. Sea $S\subset\mathbf{R}^2$ el subespacio vectorial generado por el vector $\left\{\vec{u} = \left(\sqrt{3},1\right)\right\}$ y sea *f*: $\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ la transformación lineal correspondiente a la reflexión especular con respecto a *S*.

c) Hallar la forma explícita de *f* y su matriz asociada.

d) Hallar los autovalores y autovectores de *f*. Dar una interpretación geométrica de los mismos y mencionar que vínculo existe entre los subespacios de autovectores de *f* y el núcleo y la imagen de *f*.

U.T.N. F.R.H. – **Examen final de Álgebra y Geometría Analítica** – Febrero-Marzo 2009 – T3

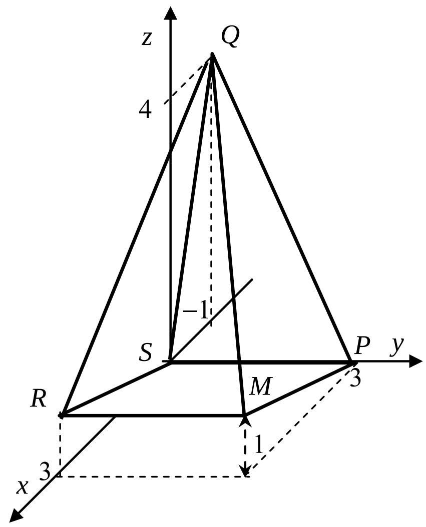
Alumno: .... **Especialidad:** ....

Profesor con quien cursó:.................................... **Mes y año de firma TP:** ....

Ejercicio / Corrector	1	2 (a b c)	3 (a b c)	4 (a b c d)	Calificación

Calificación Final:...

Ejercicio 1. Con la información dada en la figura, hallar vectorialmente las coordenadas de la proyección ortogonal del vértice de la pirámide, Q, sobre el plano que contiene su base. Marcarlas en la figura.



Ejercicio 2.

a) Decir para cada una de las siguientes proposiciones si es verdadera o falsa, justificando las verdaderas y dando un contraejemplo para las falsas según el caso:

a₁) Si AB y BA están definidas, entonces A y B deben ser cuadradas.

a₂) Si $AB = B$ entonces necesariamente debe ser $A = I$.

b) Demostrar que si Q_1 y Q_2 son matrices ortogonales, su producto Q_1Q_2 es también una matriz ortogonal.

c) Sin evaluar directamente el determinante, es decir aplicando solamente propiedades de la función determinante e indicando cuál aplica en cada caso, probar que det(A) es nulo, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & b+a \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3. Dado $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ y siendo $H = \{ \mathbf{v} \in \Re^3 / \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \}$:

a) Demostrar que H es un subespacio de $\Re^3$.

b) Encontrar dos vectores linealmente independientes de H, calcular su producto vectorial y demostrar que el vector resultado de ese producto vectorial y **u** son linealmente dependientes.

c) Dar una base de $\boldsymbol{H}^{\perp}$ e interpretar geométricamente el ejercicio.

Ejercicio 4. Considerar en $\Re^2$ la transformación T que refleja cualquier punto del plano respecto de la recta $y=-x$.

a) Determinar la matriz asociada a T en la base canónica.

b) Obtener los subespacios característicos de la transformación e interpretarlos gráficamente.

c) Si se aplica la transformación a la recta de ecuación $y = 2x$, ¿Qué lugar geométrico se obtiene?

d) Diagonalizar la matriz de la transformación T.

U.T.N. F.R.H. – **Examen final de Álgebra y Geometría Analítica** – Febrero-Marzo 2009 – T2

Alumno: .... **Especialidad:** ....

Profesor con quien cursó:.................................... **Mes y año de firma TP:** ....

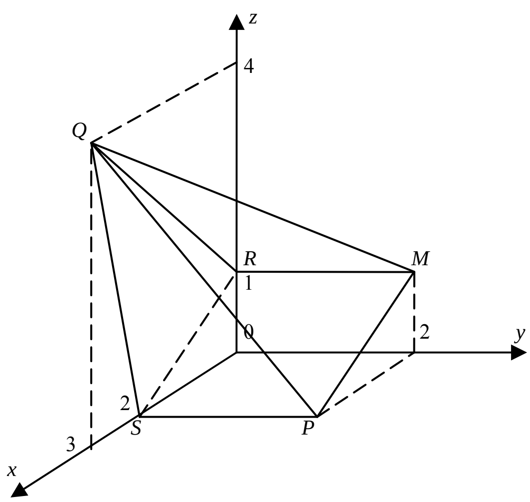
Ejercicio	1	2	3	4	Calificación
Corrector	a b	a b c	a b c	a b c d e	

Calificación Final:...

Ejercicio 1.

a) Con la información dada en la figura, hallar una ecuación general para el plano que contiene la base de la pirámide.

b) Proyectar ortogonalmente el vector definido por la arista *PQ* sobre el plano encontrado en a).



Ejercicio 2. Algunas cuestiones sobre matrices. Justificar siempre las respuestas o dar contraejemplos según el caso.

a) Verdadero o falso: A, B, C son matrices simétricas del mismo orden, entonces $(ABC)^T = CBA$.

b) Si $A \in \Re^{nx3}$, tiene sus vectores columnas ortogonales y de módulo 1,2 y 3 respectivamente, calcular $A^T A$.

c) ¿Es posible dar un ejemplo de una matriz M con sus vectores columnas ortonormales pero $MM^T \neq I$? En caso afirmativo dar un ejemplo, en caso negativo explicar por qué no se puede.

Ejercicio 3. Suponiendo que $A \in \Re^{3x3}$ tiene rango uno, sean los sistemas $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ($\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$) compatible y $A\,\mathbf{x} = \mathbf{o}$.

a) Explicar la relación que existe entre los conjuntos solución de uno y otro sistema.

b) Dar una interpretación geométrica a la conclusión de a).

c) ¿Ambos conjuntos solución son subespacios de $\Re^3$? Justificar.

Ejercicio 4. Considerar en $\Re^2$ la transformación T que refleja cualquier punto del plano respecto de la recta $y=x$ y la transformación S que refleja cualquier punto del plano respecto del eje y.

a) Determinar las matrices asociadas a las transformaciones (en la base canónica) T, S, $T^\circ S$, y $S^\circ T$.

b) Aplicar separadamente las cuatro transformaciones al vector $\mathbf{v}=(-1,-2)$ y representar gráficamente cada caso.

c) Justificando la respuesta, indicar cuáles de las matrices halladas en a) que no son diagonales, se pueden diagonalizar ortogonalmente.

d) Diagonalizar la matriz asociada a la transformación T.

e) ¿La transformación $S^\circ T$ causa el mismo efecto que la $T^\circ S$ sobre algún vector de $\Re^2$? Explicar.

U.T.N. F.R.H. – **Examen final de Álgebra y Geometría Analítica** – Febrero-Marzo 2009 – T1

Alumno: .... **Especialidad:** ....

Profesor con quien cursó:.................................. **Mes y año de firma TP:** ....

Ejercicio / Corrector	1 (a, b)	2 (a, b, c)	3	4	Calificación

Calificación Final:...

Ejercicio 1. La ecuación general de un plano es siempre de la forma $ax+by+cz+d=0$.

a) Determinar los valores de los parámetros *a*, *b*, *c*, y *d* para todos los planos que distan diez unidades de distancia del origen de coordenadas y que son perpendiculares a los planos de ecuaciones $y+z=0$ o $y-z=0$.

b) Dar las ecuaciones de las intersecciones de los planos hallados en el ítem **a)** con el plano *yz* y representarlas gráficamente.

Ejercicio 2.

a) Hallar una base para el subespacio de todas las matrices que pertenecen a $\Re^{2\times 3}$ y cuyos vectores columnas sumados dan el vector nulo.

b) Hallar una base para el subespacio de todas las matrices que pertenecen a $\Re^{2\times 3}$ y cuyos vectores filas sumados dan el vector nulo.

c) ¿Pueden ser ortogonales los subespacios señalados en **a)** y **b)**? Justificar la respuesta.

Ejercicio 3. Explicar qué es lo que está equivocado en el siguiente razonamiento:

"La matriz inversa de una matriz $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertible y perteneciente a $\Re^{2\times 2}$ siempre tiene determinante igual a uno porque en tal caso $\det A^{-1} = \det\left[\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right] = \frac{ad-bc}{ad-bc} = 1$".

¿Cuál es la expresión correcta para A^{-1} y su determinante en este caso?

Ejercicio 4. Los números de la sucesión de Fibonacci que aparecen en la naturaleza cuantificando numerosas formas de crecimiento y multiplicación de especies (también en la película "Código Da Vinci"), se forman a partir de la suma de los dos anteriores en la sucesión, siendo los dos primeros iguales a cero y uno respectivamente o sea que los diez primeros términos serían $0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,\cdots$. Supongamos que queremos calcular el número que ocupa la posición 100 en la sucesión, es decir F_{100} lo que nos daría una idea de cómo crecen los términos de la sucesión. Una forma sería emplear la fórmula de recurrencia $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ con $k \in \mathbf{N_0}$ todas las veces que fuera necesario, sin embargo es posible hacerlo con elementos de Álgebra Lineal observando que si $\bar{u}_k = \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix}$, la regla $\begin{cases} F_{k+2} = F_{k+1} + F_k \\ F_{k+1} = F_{k+1} \end{cases}$ se expresa matricialmente como $\bar{u}_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{u}_k$ (Verificarlo). De esta forma, $\bar{u}_{100} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{100} \bar{u}_0$ con $\bar{u}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\bar{u}_{100} = \begin{pmatrix} F_{101} \\ F_{100} \end{pmatrix}$ (Verificarlo). Llamando *A* a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, diagonalizar *A*, obtener A^{100}, calcular $\bar{u}_{100}$ y entonces obtener F_{100}.

U.T.N. F.R.H. – **Examen final de Álgebra y Geometría Analítica** - Diciembre 2008 – T3

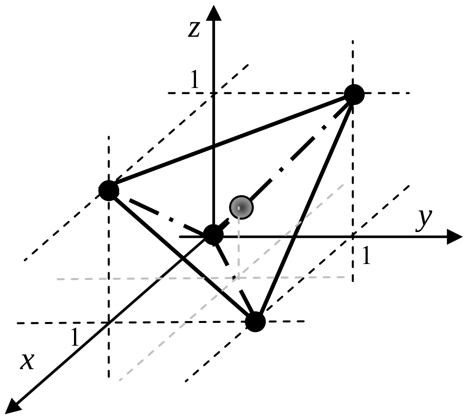
Alumno: .... **Especialidad:** ....

Profesor con quien cursó:.................................... **Mes y año de firma TP:** ....

Ejercicio	1	2	3	4	Calificación
Corrector	a b c		a b	a b c	

Calificación Final:..

Ejercicio 1. En una molécula de metano (CH_4), un átomo de carbono está rodeado de cuatro átomos de hidrógeno. Supongamos que los átomos de hidrógeno están en $O(0,0,0)$, $P(1,1,0)$, $Q(1,0,1)$, $R(0,1,1)$ y el átomo de carbono está en $C(1/2,1/2,1/2)$. Se dice que esta molécula tiene forma tetraédrica siendo los átomos de hidrógeno los vértices del tetraedro que definen, como se observa en la figura. El átomo de carbono se encuentra en una posición privilegiada equidistante de cada átomo de hidrógeno y equidistante de cada una de las caras del tetraedro.



a) Hallar la distancia entre el átomo de carbono y cualquiera de las caras del tetraedro que definen la molécula.
b) Calcular el ángulo vincular, es decir, el ángulo que forman los segmentos que conectan un átomo de hidrógeno al de carbono y éste a otro de hidrógeno.
c) Empleando como base de $\mathbf{R}^3$ los vectores posición de los átomos de hidrógeno que no están en el origen, hallar las coordenadas del vector posición del átomo de carbono en esta nueva base.

Ejercicio 2. Decidir si la siguiente afirmación es verdadera o es falsa. En caso que sea verdadera justificar la respuesta. En caso que sea falsa dar un contraejemplo.

Sea f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ una transformación lineal tal que su matriz asociada A es simétrica y sea λ un autovalor de f con subespacio de autovectores S_λ. Si $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son dos vectores independientes de S_λ, entonces $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son ortogonales.

Ejercicio 3. Se conocen las matrices $V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} a & 2a & -a \\ b & 2b & -b \\ c & 2c & -c \end{pmatrix}$.

a) ¿Por qué matriz hay que pre o post-multiplicar a V para obtener por resultado a M? Escribir el orden en que se efectúa el producto.
b) Hallar M^2 y demostrar que el conjunto $\{M^2; M\}$ es linealmente dependiente.

Ejercicio 4. Sean f y g transformaciones lineales de $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tales que f efectúa un giro del plano yz alrededor del eje x de 45º en sentido antihorario, y g proyecta ortogonalmente un vector cualquiera, sobre el plano xy.

a) Escribir la forma explícita y la matriz asociada a cada una de las transformaciones mencionadas.
b) Si a un vector $\vec{x}$ primero se le aplica f y luego g, $g(f(\vec{x})) = (g \circ f)(\vec{x})$, ¿da la misma imagen cuando se aplican las transformaciones en orden inverso, esto es $f(g(\vec{x})) = (f \circ g)(\vec{x})$? Justificar la respuesta.
c) Hallar el subespacio de vectores tales que $g(f(\vec{x})) = f(g(\vec{x}))$.

U.T.N. F.R.H. – **Examen final de Álgebra y Geometría Analítica** - Diciembre 2008 – T2

Alumno: .... **Especialidad:** ....

Profesor con quien cursó:.................................... **Mes y año de firma TP:** ....

Ejercicio / Corrector	1 (a b)	2 (a b)	3 (a b c)	4 (a b c d)	Calificación

Calificación Final:...

Ejercicio 1. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o es falsa. En caso que sea verdadera justificar la respuesta. En caso que sea falsa dar un contraejemplo.

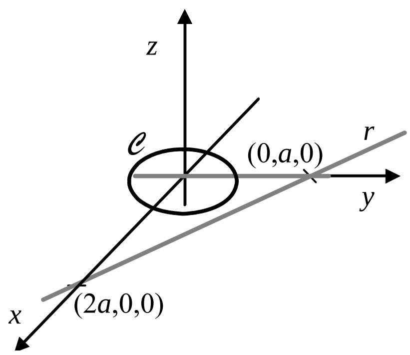
a) Si $A=\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}\subset \mathbf{R}^3$ es un sistema de generadores de un subespacio *S* de dimensión 2, entonces $B=\{\vec{u};\vec{v};\vec{u}\times\vec{v}\}$ genera el mismo subespacio *S*.

b) Sea f: $\mathbf{V}\rightarrow\mathbf{W}$ una transformación lineal entre los espacios vectoriales **V** y **W** de dimensión finita. Si $\mathrm{Nu}(f)=\mathbf{V}$, entonces $\mathrm{Im}(f)=\vec{0}_{\mathbf{W}}$.

Ejercicio 2. Sea la recta $r: \overrightarrow{OP}=(2a,0,0)+\lambda(2a,-a,0), \forall\lambda\in\mathbf{R}$ con $a\neq 0$. Se desea graficar una circunferencia $\mathcal{C}$ con el mayor radio posible, contenida en el plano coordenado *xy*, con centro en el origen de coordenadas, que no corte a la recta *r* ($\mathcal{C}$ y *r* resultarán tangentes).

a) ¿Cuál es el radio de dicha circunferencia?

b) ¿Cuál es el punto de tangencia de la circunferencia y la recta?



Ejercicio 3. Sea $M=((m_{i,j}))\in\mathbf{R}^{3\times3}$ con $m_{i,j}=(-1)^{i+j}\ \forall(i,j)$.

a) Deducir una expresión general para las potencias naturales de *M*, esto es para M^n con $n\in\mathbf{N}$.

b) Hallar los autovalores de *M* e indicar si dicha matriz es diagonalizable. Justificar la respuesta.

c) Dar un conjunto ortonormal de vectores que contenga la mayor cantidad posible de autovectores de *M*.

Ejercicio 4. Sea $f:\mathbf{R}^3\rightarrow\mathbf{R}^3$ la transformación lineal que a cada vector de $\mathbf{R}^3$ le asigna su imagen especular con respecto al plano *yz* y luego duplica su componente en *z*.

a) Dar la forma explícita de *f* y la matriz asociada a la transformación según la base canónica.

b) Hallar el conjunto de vectores $\vec{v}$ que siendo ortogonales a $\vec{u}=(1,1,1)$, cumplen también que sus transformados, $f(\vec{v})$, son ortogonales a $f(\vec{u})$.

c) ¿Es el conjunto obtenido en el ítem b) un subespacio lineal? Justificar la respuesta.

d) Dos de los vértices de un triángulo están ubicados en *O*(0,0,0) y *P*(1,0,1). ¿Es posible hallar como tercer vértice un punto *Q* de tal forma que cuando se aplique la transformación *f* al $\overset{\Delta}{OPQ}$, el triángulo $\overset{\Delta}{O'P'Q'}$ que forman los transformados tenga área doble de la que tiene el triángulo $\overset{\Delta}{OPQ}$? En caso de ser posible, dar <u>una</u> respuesta numérica; si no es posible, justificar la respuesta en forma clara. Graficar.

U.T.N. F.R.H. – **Examen final de Álgebra y Geometría Analítica** - Diciembre 2008 – T1

Alumno: .... **Especialidad:** ....

Profesor con quien cursó:.................................... **Mes y año de firma TP:** ....

Ejercicio	1	2	3	4	Calificación
Corrector	**a b**	**a b**		**a1 a2 a3 b c**	

Calificación Final:...

Ejercicio 1. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o es falsa. En caso que sea verdadera justificar la respuesta. En caso que sea falsa dar un contraejemplo.

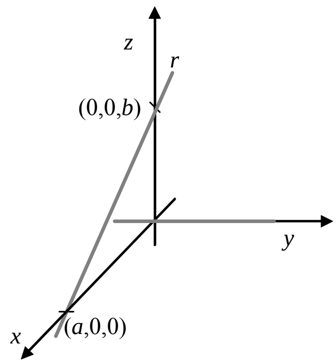
a) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores no nulo de $\mathbf{R}^3$ tales que $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{0}$, entonces el conjunto $\{\vec{u};\vec{v}\}$ es un sistema de generadores de un subespacio de dimensión 1.

b) f: $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ es una transformación lineal con matriz asociada $A \in \mathbf{R}^{3\times 3}$. Si se conoce que $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son dos vectores ortonormales del núcleo de f, entonces se sabe que el det(A)=0.

Ejercicio 2. Sean la recta $r:\overrightarrow{OP}=(a,0,0)+\lambda(a,0,-b), \forall\lambda\in\mathbf{R}$ con $a\neq 0$ y $b\neq 0$, y el eje y.

a) Hallar la distancia entre r y el eje y.

b) Hallar las coordenadas de los dos puntos, uno perteneciente a r y el otro al eje y, que se encuentran más cercanos uno del otro.



Ejercicio 3. La matriz $A_n=((a_{i,j}))\in\mathbf{R}^{\mathbf{n\times n}}$ está definida por

$$a_{i,j}=\begin{cases} a & \text{si } i-j=-1 \\ b & \text{si } i-j=1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{con } i,j=1,...,n.$$

Comprobar desde n=1 hasta n=4 que:

con n=2k–1 (impar), $\det(A_{2k-1})=0$ y con n=2k (par), $\det(A_{2k})=(-ab)^k, k\in\mathbf{N}$.

Ejercicio 4. El producto vectorial $\vec{a}\times\vec{x}$ se puede asociar con una transformación lineal f: $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, $f(\vec{x})=\vec{a}\times\vec{x}$, cuya matriz asociada A tal que $f(X)=AX$ donde $X\in\mathbf{R}^{3\times 1}$ es

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

a) Hallar el núcleo y la imagen de la transformación lineal f, dar una base de dichos subespacios y dar una interpretación geométrica a los resultados obtenidos para los siguientes tres casos:

i) $\vec{a}$ no nulo paralelo al eje z; ii) $\vec{a}=\vec{0}$; iii) $\vec{a}$ no nulo paralelo al plano xz y no paralelo a ninguno de los ejes.

b) Si $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ es un vector arbitrario de $\mathbf{R}^3$ tal que ninguna de sus componentes es nula, analizar la existencia de autovalores y autovectores de f a partir de una interpretación geométrica de la transformación.

c) Si $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ y $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ son vectores cualesquiera de $\mathbf{R}^3$, ¿se puede asociar el producto mixto $\vec{b}\cdot\vec{a}\times\vec{x}$ con una transformación lineal g: $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $g(\vec{x})=\vec{b}\cdot\vec{a}\times\vec{x}$? En caso de ser posible, dar la matriz asociada. En caso de no ser posible, justificar la respuesta en forma clara.

U.T.N. F.R.H. – **Examen final de Álgebra y Geometría Analítica** – 6/3/2008

Alumno: .... **Especialidad:** ....

Profesor con quien cursó:................................... **Mes y año de firma TP:** ....

Ejercicio / Corrector	1 (a b)	2 (a b)	3	4	5 (a b)	Calificación

Calificación Final:..

Ejercicio 1.

a) Sabiendo que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=-2$, calcular:

$(\vec{u}\times\vec{w})\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=$

$(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{w}\times\vec{v})=$

b) A partir de un gráfico apropiado, deducir una fórmula que permita calcular la distancia entre el plano $\pi: ax+by+cz+d=0$ y el punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$.

Ejercicio 2.

a) Probar que si A, B y C son matrices tales que $A\in\mathbf{R}^{\mathbf{n\times n}}$ es simétrica y ortogonal, $B\in\mathbf{R}^{\mathbf{n\times 1}}$, $C\in\mathbf{R}^{\mathbf{n\times 1}}$ y $A\cdot B=C$ entonces $A\cdot C=B$.

b) Probar que si $A\in\mathbf{R}^{\mathbf{n\times n}}$ es una matriz ortogonal y simétrica, entonces $A^2=I$, siendo I la matriz identidad de orden n.

Ejercicio 3. Sean $\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^{\mathbf{m\times 1}}$ y $\boldsymbol{v}\in\mathbf{R}^{\mathbf{m\times 1}}$ dos soluciones del sistema lineal homogéneo $A\cdot X=O$ donde $A\in\mathbf{R}^{\mathbf{n\times m}}$, $X\in\mathbf{R}^{\mathbf{m\times 1}}$ y $O\in\mathbf{R}^{\mathbf{n\times 1}}$ es la matriz nula. Demostrar que cualesquiera sean los escalares α y β, $W=\alpha\,\boldsymbol{u}+\beta\,\boldsymbol{v}$ también es solución del sistema. Mencionar todas las propiedades utilizadas.

Ejercicio 4. El conjunto $A=\{\vec{v}_1;\vec{v}_2\}\subset\mathbf{R}^3$ es una base ortogonal de un subespacio S. El vector $\vec{v}_3\in\mathbf{R}^3$, no nulo, pertenece al subespacio ortogonal de S, (es decir que pertenece a $S^{\perp}$). Analizar, justificando la respuesta, la dimensión de cada uno de los siguientes subespacios.

a) S_1 generado por el conjunto $C=\{\vec{v}_1;\vec{v}_1+\vec{v}_2;\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3\}$.

b) $S_2=\{\vec{x}\in\mathbf{R}^3 / \vec{x}=\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\lambda_3<\vec{v}_1;\vec{v}_3>\vec{v}_3;\forall\lambda_i\in\mathbf{R},\ i=1,2,3\}$.

Notación: $<\vec{v}_1;\vec{v}_3>$ producto interior entre ambos vectores.

Ejercicio 5.

a) Sea f: $\mathbf{R}^\mathbf{n}\to\mathbf{R}^\mathbf{n}$ una transformación lineal tal que $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ son autovectores de f con autovalores asociados λ_1 y λ_2, respectivamente. Demostrar que si $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ son ortogonales, entonces las imágenes correspondientes, $f(\bar{u}_1)$ y $f(\bar{u}_2)$, también lo son. Mencionar cada una de las propiedades utilizadas.

b) Sea el siguiente conjunto de matrices

$$S=\left\{M=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathrm{R}^{2\times 2} / a+c=0,\ b+d=0,\ M\neq O\right\}.$$

Hallar todas las matrices $M\in S$ que sean diagonalizables. Considerar en el análisis de la respuesta las siguientes situaciones: i) $a\neq b$; ii) $a=b$ con $a\neq 0$.

U.T.N. F.R.H. – **Examen final de Álgebra y Geometría Analítica** - Febrero 2008 – T2

Alumno: .... **Especialidad:** ....

Profesor con quien cursó:.................................... **Mes y año de firma TP:** ....

Ejercicio	1	2	3	4	5	Calificación
Corrector	a b c		a b		a b	

Calificación Final:..

Ejercicio 1. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o es falsa. En caso que sea verdadera justificar la respuesta. En caso que sea falsa dar un contraejemplo.

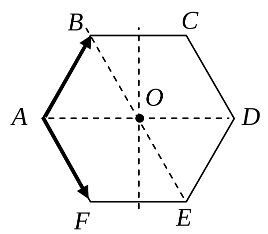
a) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de $\mathbf{R}^3$ (no nulos y no paralelos) definen un triángulo cuya área tiene el valor $a \in \mathbf{R}_{>0}$, entonces los vectores $\frac{1}{2}\vec{u}$ y $\frac{1}{2}\vec{v}$ definen un paralelogramo cuya área tiene el valor $\frac{1}{2}a$.

b) Sea $S \subset \mathbf{R}^3$ el subespacio generado por los vectores $\{\vec{a};\vec{b};\vec{c}\}$ donde $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, entonces la dimensión de S es 2.

c) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores no nulos ortogonales en el espacio vectorial **V**, entonces $\{\vec{u};\vec{v}\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente.

Ejercicio 2. E y B son matrices reales de 3×3 tales que $EA = B$ .La fila uno de B es igual a fila tres de A; la fila dos de B es la opuesta a la fila dos de A; y la fila tres de B es igual la fila uno de A. Hallar la matriz E, demostrar que es inversible y que satisface que $E^{-1} = E$.

Ejercicio 3. Los lados del hexágono regular $ABCDEF$ tienen longitud uno. El punto O corresponde a su centro de simetría (ver figura). Observación: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AF}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{DE}| = |\overrightarrow{EF}| = 1$.



a) Hallar la distancia entre A y O. Justificar la respuesta.

b) Escribir el vector $\overrightarrow{AD}$ como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AF}$, esto es hallar los escalares reales α y β tales que $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AF}$. Justificar la respuesta.

Ejercicio 4. Sea la transformación lineal $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ cuya matriz asociada es $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Determinar una ecuación que relacione a, b y c de modo que siempre se pueda calcular los valores de x, y y z para los que

$$f(x, y, z) = (a, b, c).$$

Ejercicio 5. Sea f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ una transformación lineal y se define la transformación lineal $g = f \circ f$ de modo que $g(\vec{x}) = f(f(\vec{x}))$ con $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$. Demostrar las siguientes afirmaciones, mencionando las propiedades usadas.

a) Todo vector $\vec{v}$ que pertenezca al núcleo de f, también pertenece al núcleo de g.

b) Si $\vec{u}$ es autovector de f con autovalor asociado λ, $\vec{u}$ también es autovector de g. Indicar cual es el autovalor asociado de $\vec{u}$ mediante la transformación g.

U.T.N. F.R.H. – **Examen final de Álgebra y Geometría Analítica** - Febrero 2008 – T1

Alumno: .... **Especialidad:** ....

Profesor con quien cursó:.................................... **Mes y año de firma TP:** ....

Ejercicio / Corrector	1 (a b)	2	3 (a b)	4 (a b)	5	Calificación

Calificación Final:..

Ejercicio 1. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o es falsa. En caso que sea verdadera justificar la respuesta. En caso que sea falsa dar un contraejemplo.

a) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores no nulo de $\mathbf{R}^3$ tales que $\vec{u}\times\vec{v}\neq\vec{0}$, entonces el conjunto $\{\vec{u};\vec{v}\}$ es un sistema de generadores de un subespacio de dimensión 2.

b) Si $A=\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}\subset\mathbf{R}^3$ es un conjunto de vectores linealmente independiente, entonces $B=\{\vec{u}+\vec{v};\vec{v}+\vec{w};(k-1)\vec{u}+\vec{w}\}\subset\mathbf{R}^3$ es un conjunto linealmente independiente $\forall k\in\mathbf{R}$.

c) Si $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son dos vectores ortonormales de un espacio vectorial **V**, y α, $\beta\in\mathbf{R}$ tales que $\vec{x}=\alpha\vec{v}_1+\beta\vec{v}_2\Rightarrow\alpha=<\vec{x};\vec{v}_1>$ y $\beta=<\vec{x};\vec{v}_2>$.

d) $f:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ es una transformación lineal entre los espacios vectoriales **V** y **W**. Si dim(**V**)=5 y dim(**W**)=3, entonces siempre será la dim(Nu(f))=2.

Ejercicio 2. En $\mathbf{R}^3$, las rectas r_1 y r_2 son paralelas y no coincidentes; el vector $\vec{\mathbf{u}}=(u_1,u_2,u_3)\neq\vec{\mathbf{0}}$ define la dirección común; el punto $A(a_x,a_y,a_z)\in r_1$ y el punto $B(b_x,b_y,b_z)\in r_2$. Demostrar que la distancia entre r_1 y r_2 está dada por

$$d(r_1,r_2)=\frac{\left|\vec{u}\times\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\vec{u}\right|}.$$

Ejercicio 3. Una matriz $A\in\mathbf{R}^{\mathbf{n\times n}}$ es una "raíz cuadrada" de la matriz B si $A^2=B$.

a) Determinar todas las "raíces cuadradas" de $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

b) Demostrar que no existe una raíz cuadrada de $C=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

Ejercicio 4. Sea S el conjunto de vectores definido por

$$S=\left\{\vec{\mathbf{x}}=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbf{R}^4/\left\langle\vec{\mathbf{x}};\vec{\mathbf{u}}\right\rangle=0\,\text{con}\,\vec{u}=(u_1,u_2,u_3,u_4)\neq\vec{\mathbf{0}}\right\},$$

donde $\langle\ ;\ \rangle$ identifica al producto interior y $\vec{\mathbf{0}}$ el vector nulo.

a) Demostrar que S es un subespacio. Mencionar las propiedades utilizadas.

b) ¿Cuál es la dimensión de S? Justificar la respuesta.

Ejercicio 5. A y B son dos matrices inversibles de $\mathbf{R}^{\mathbf{n\times n}}$. Si $\mathbf{X}\in\mathbf{R}^{\mathbf{n\times 1}}$ es autovector de $A\cdot B^{-1}$ con autovalor $\lambda\neq0$, demostrar que $\mathbf{X}$ también es autovector de $B\cdot A^{-1}$ pero con autovalor λ^{-1}.

U.T.N. F.R.H. – **Examen final de Álgebra y Geometría Analítica** - Diciembre 2007 – T3

Alumno: .... **Especialidad:** ....

Profesor con quien cursó:.................................... **Mes y año de firma TP:** ....

Ejercicio / Corrector	1 a b c d	2 a b	3	4	5 a b	Calificación

Calificación Final:..

Ejercicio 1. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o es falsa. En caso que sea verdadera justificar la respuesta. En caso que sea falsa dar un contraejemplo.

a) La longitud de las diagonales de un cuadrado de lado a es $\sqrt{3}a$.

b) Si $A=((a_{i,j}))$ es una matriz de orden 3×1 y $B=((b_{i,j}))$ es una matriz de orden 1×3 entonces el rango de la matriz $A\cdot B$ es, a lo sumo, 1.

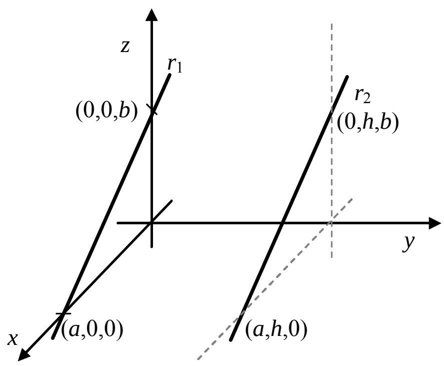
c) Si $A=\{\vec{u};\vec{v}\}\subset \mathbf{R}^3$ es un conjunto de vectores linealmente independiente, entonces $B=\{\vec{u};\vec{v};\vec{u}\times(\vec{u}\times\vec{v})\}\subset \mathbf{R}^3$ es un conjunto linealmente independiente.

d) $f:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ es una transformación lineal en el espacio vectorial **V**. La suma de dos autovectores de f es siempre un autovector de f.

Ejercicio 2. Las rectas de $\mathbf{R}^3$ r_1 y r_2 están definidas por

$$r_1: \overrightarrow{OP}=(a,0,0)+\lambda(a,0,-b), \forall\lambda\in\mathbf{R},$$

$$r_2: \overrightarrow{OP}=(a,h,0)+\mu(a,0,-b), \forall\mu\in\mathbf{R}\,;\ a,b,h\in\mathbf{R}_{>0}.$$



a) Hallar la ecuación de la recta r_3 paralela a ambas y equidistante de ellas.

b) Hallar el lugar geométrico de todos los puntos del espacio equidistantes a ambas rectas. Dar la/s ecuación/es que definen este conjunto.

Ejercicio 3. Una matriz cuadrada $A\in\mathbf{R}^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ es ortogonalmente diagonalizable si existe una matriz ortogonal C tal que $C^{-1}AC=D$ siendo D una matriz diagonal. Probar que si A es diagonalizable ortogonalmente entonces A es una matriz simétrica. Mencionar todas las propiedades usadas.
Recordatorio: C es una matriz ortogonal si $C^{-1}=C^T$. A es una matriz simétrica si $A^T=A$.

Ejercicio 4. El conjunto $A=\{\vec{v}_1;\vec{v}_2;\vec{v}_3\}\subset\mathbf{R}^3$ constituye una base del espacio. Construir a partir de los elementos de A una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$.

Ejercicio 5. Sea la transformación lineal f: $\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ que consiste en dos aplicaciones sucesivas. Primero proyecta cada vector del espacio sobre el plano coordenado (yz), y luego, al vector imagen obtenido lo gira un ángulo $\theta=\pi$ en sentido antihorario sobre el mencionado plano.

a) Presentar la forma explícita de f e identificar geométricamente el núcleo y la imagen.

b) Determinar si la matriz asociada es diagonalizable e identificar geométricamente los subespacios asociados a cada autovalor. Justificar la respuesta.

U.T.N. F.R.H. – **Examen final de Álgebra y Geometría Analítica** - Diciembre 2007 – T2

Alumno: .... **Especialidad:** ....

Profesor con quien cursó:.................................... **Mes y año de firma TP:** ....

Ejercicio	1	2	3	4	5	Calificación
Corrector	a b c		a b		a b	

Calificación Final:..

Ejercicio 1. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o es falsa. En caso que sea verdadera justificar la respuesta. En caso que sea falsa dar un contraejemplo.

a) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores no nulo de $\mathbf{R}^3$ tales que $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, entonces el conjunto $\{\vec{u};\vec{v}\}$ es un sistema de generadores de un subespacio de dimensión 2.

b) Las matrices $A\in\mathbf{R}^{3\times3}$ y $E\in\mathbf{R}^{3\times3}$ son tales que $EA=B$ donde B es una matriz de orden 3 que tiene su fila 1 formada por la suma de las filas 1 y 3 de la matriz A, la fila dos de B es idéntica a la fila 2 de A, la fila 3 de B es idéntica a la fila 3 de A. Cuando se efectúa el producto $AE=C$ resulta que la columna 1 de C está formada por la suma de las columnas 1 y 3 de la matriz A, la columna dos de C es idéntica a la columna 2 de A, la columna 3 de C es idéntica a la columna 3 de A.

c) $f:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ es una transformación lineal entre los espacios vectoriales **V** y **W**. Si dim(**V**)=5, dim(**W**)=3, y $\lambda=0$ es autovalor de f con un subespacio de autovectores de dimensión 2, entonces siempre será la dim(Im(f))=3.

Ejercicio 2. Sean en $\mathbf{R}^3$, el punto arbitrario $P_0(x_0,y_0,z_0)$ y r la recta determinada por los puntos $A(a_x,a_y,a_z)$ y $B(b_x,b_y,b_z)$ con $A\neq B$. Demostrar que la distancia entre r y P_0 está dada por

$$d(P_0,r)=\frac{\left|\overrightarrow{AP_0}\times\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}.$$

Ejercicio 3. Dadas $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ y $B\in\mathbf{R}^{n\times n}$ tales que $A^2+A\cdot B=I$ donde I es la matriz identidad de orden n. Responder a las siguientes cuestiones mencionando las propiedades usadas.

a) Demostrar que A es inversible, esto es $\exists A^{-1}$.

b) Deducir el valor de los escalares α y β que satisfacen la igualdad $A^{-1}=\alpha A+\beta B$.

Ejercicio 4. Sea el espacio vectorial $\mathbf{R}^n$ con producto interior euclídeo. Demostrar que si $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son dos versores ortogonales en $\mathbf{R}^n$, entonces $\|\vec{u}-\vec{v}\|=\sqrt{2}$. Mencionar todas las propiedades usadas.

Notación: Con $\bar{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$, $\bar{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)\in\mathbf{R}^n$, el producto interior euclídeo se define por $<\bar{u};\bar{v}>=\sum_{i=1}^{n}u_iv_i$ y la norma de un vector es $\|\bar{u}\|=+\sqrt{<\bar{u};\bar{u}>}$.

Ejercicio 5. La transformación lineal $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ es tal que a cada vector del espacio le hace corresponder su proyección ortogonal sobre la recta definida por $x=y=z$.

a) Hallar la expresión explícita de f.

b) Describir geométricamente cuáles son los autovectores y autovalores de f, indicar los valores posibles de los autovalores y el subespacio asociado a los autovectores para cada uno de ellos.

c)

U.T.N. F.R.H. – **Examen final de Álgebra y Geometría Analítica -** Diciembre 2007 – T1

Alumno: .... **Especialidad:** ....

Profesor con quien cursó:.................................. **Mes y año de firma TP:** ....

Ejercicio	1	2	3	4	5	Calificación
Corrector	a b c d					

Calificación Final:..

Ejercicio 1. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o es falsa. En caso que sea verdadera justificar la respuesta. En caso que sea falsa dar un contraejemplo.

a) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores no nulo de $\mathbf{R^3}$ tales que $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, entonces el conjunto $\{\vec{u};\vec{v}\}$ es un sistema de generadores de un subespacio de dimensión 1.

b) Si $A = \{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\} \subset \mathbf{R^3}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente, entonces $B = \{\vec{u}+\vec{v};\vec{v}+\vec{w};(k-1)\vec{u}+\vec{w}\} \subset \mathbf{R^3}$ es un conjunto linealmente independiente $\forall k \in \mathbf{R}$.

c) Si $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son dos vectores ortonormales de un espacio vectorial **V**, y α, β ∈ **R** tales que $\vec{x} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \Rightarrow \alpha = <\vec{x};\vec{v}_1>$ y $\beta = <\vec{x};\vec{v}_2>$.

d) $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ es una transformación lineal entre los espacios vectoriales **V** y **W**. Si dim(**V**)=5 y dim(**W**)=3, entonces siempre será la dim(Nu(*f*))=2.

Ejercicio 2. La ecuación general del plano π es $ax + by + cz = abc$ donde *a*, *b*, *c* son números reales positivos. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección de π con cada uno de los ejes coordenados.

Ejercicio 3. *E* y *B* son matrices reales de 3×3 tales que $EA = B$ .Además, la fila uno de *B* es igual a fila tres de *A*; la fila dos de *B* es igual a la suma de la fila dos de *A* con la fila tres de *A*; y la fila tres de *B* es igual la fila uno de *A*. Si $C = AE^T$, comparar las filas o columnas de *C* con las filas o columnas de *A*.

Ejercicio 4. *A* es una matriz real de $n \times n$ tal que $A^2 = I$ donde *I* es una matriz identidad (las matrices *A* de este tipo se llaman involutivas de índice 2), y *X* es una matriz del tipo $X = \alpha I$ con α real (es decir, *X* es una matriz escalar). Hallar el valor de

$$\det[(X - A)(X + A)]$$

considerando que los órdenes de las matrices son compatibles para las operaciones propuestas; indicar todas las propiedades usadas.

Ejercicio 5. Sea el subespacio $S = \{\vec{v} \in \Re^3 / \vec{v} = \alpha\,(1,1,0) + \beta(0,0,1), \forall\alpha, \forall\beta \in \mathbf{R}\}$. Hallar el subespacio $S^\perp$ y luego definir una transformación lineal $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ de forma tal que *S* sea el subespacio de los autovectores asociado con un autovalor λ=2 y que $Nu(f) = S^\perp$.