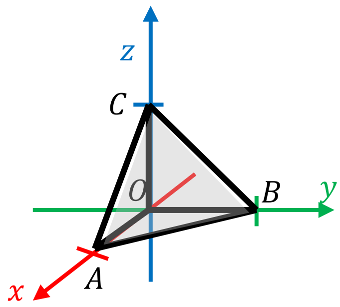
U.T.N. F.R.H. – Examen final de Álgebra y Geometría Analítica – Fecha: …………..

Estudiante: ……………………………………………………………… Especialidad: …………………….

Docente con quien cursó la asignatura: …………………… Ciclo lectivo de cursado: ………………

Ejercicio / Corrector	1			2				3		Calificación propuesta
	1	2	3i 3ii	1	2	3	4	1	2	

Calificación Final: ………………………



Ejercicio 1. Sea cuerpo tetraédrico con vértices en $O(0{,}0{,}0)$, $A(2{,}0{,}0)$, $B(0{,}2{,}0)$, $C(0{,}0{,}2)$, que se muestra en la figura, sea M el punto medio entre A y B, y sean las dos transformaciones lineales de $\mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ correspondientes a:

f: rotación alrededor del eje z en sentido antihorario de $\pi/4$.

g: proyección ortogonal sobre el plano xz.

1.1) Hallar todas las rectas r contenidas en el plano xy que estén a una distancia $\sqrt{2}$ de la recta que contiene a la arista AB. Justificar la respuesta con un planteo o razonamiento adecuado.

1.2) Dar una base ortogonal de $\mathbf{R^3}$ tal que dos de sus vectores sean paralelos al plano que contiene a la cara ABC.

1.3) **i.** Al cuerpo se le aplica primero f. Indicar la ubicación de los transformados de cada vértice y del punto M. ¿Qué forma tiene el cuerpo transformado?

ii. Luego, en forma sucesiva, se le aplica la transformación g. ¿Qué forma tiene la imagen final del cuerpo transformado? ¿Cuál es la ubicación de los transformados finales de cada vértice y del punto M?

Ejercicio 2. De una transformación lineal $f: \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ se conoce que:

$$(c, 0{,}0) \in Nu(f) \;\; \forall c \in \mathbf{R},$$
$$(1{,}1{,}0) \text{ es invariante frente a } f,$$
$$f(0{,}0{,}1) = (0, -d, d).$$

2.1) Escribir la matriz A de la transformación lineal en la base canónica y la forma explícita de f. Explicar el planteo usado.

2.2) Analizar para los distintos valores reales de d la dimensión de los subespacios núcleo e imagen de f. Justificar la respuesta.

2.3) Analizar si para $d = 1$, si la matriz es diagonalizable. Justificar la respuesta.

2.4) ¿Verdadero o Falso? Para $d = 3$, se verifica que:

$$Im(f) = \{(x, y, z)\mathbf{R^3} / \ x - y + z = 0\} \wedge [\, Im(f)]^{\perp} = \{(x, y, z)\mathbf{R^3} / \ x = y = z\}.$$

Ejercicio 3. Analizar si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera, demostrarla. Si es falsa, dar un contraejemplo o una clara explicación.

3.1) Sean $A, B, C, M \in \mathbf{R^{n\times n}}$ tales que A es antisimétrica, B es ortogonal y $M = B \cdot (A \cdot C \cdot B)^T$, entonces $M^T = -(A^T \cdot C)$.

3.2) $\forall \vec{a} \in \mathbf{R^3} - \{\vec{0}\}, \forall \vec{b} \in \mathbf{R^3} - \{\vec{0}\}$ tales que $\vec{a} \perp \vec{b}$, se verifica que:

$$proy_{\vec{b}}\left(-3\vec{a} + \vec{b} - \vec{a} \times 3\vec{b}\right) = \vec{b}.$$

U.T.N. F.R.H. – Examen final de Álgebra y Geometría Analítica – 25 de Julio 2024

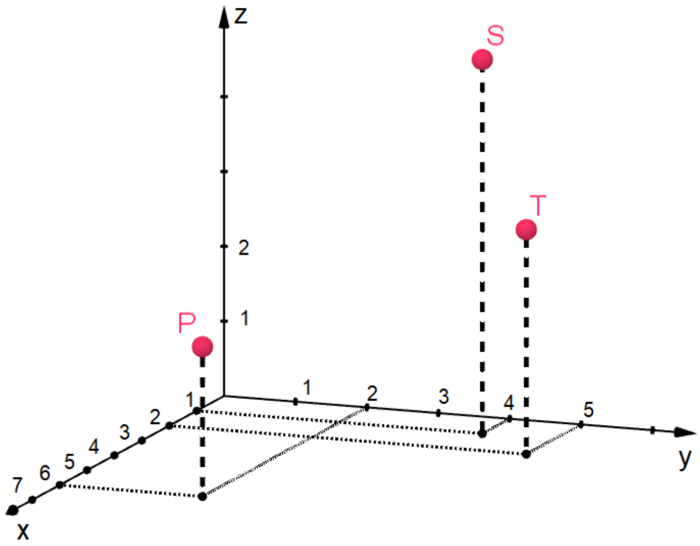
Alumno: ……………………………………………….. Especialidad: ……………………

Profesor con quien cursó la asignatura: …………………………… Año de cursado: ....

Ejercicio / Corrector	1	2	3	Calificación propuesta
		a b c d	a b c	

Calificación Final: ………………………

Ejercicio 1: Tres antenas P, S y T están ubicadas a alturas de 2, 5 y 3 unidades respectivamente respecto del plano coordenado xy. De la figura se puede observar las coordenadas de los puntos que las identifican.
Las tres antenas identificadas con los puntos P, S y T definen un plano de acción que llamaremos plano π.
Captan las señales en un radio de 3 unidades de distancia a su alrededor en el plano π que definen.
Un móvil se desliza siguiendo una trayectoria definida por las ecuaciones $\begin{cases} 2x-2y-z+6=0 \\ 2y-z=8 \end{cases}$
¿Qué antena capta cuando el móvil ingresa al plano π de acción?



Ejercicio 2: Sean las transformaciones lineales
$f: R^3 \to R^3$ que provoca una rotación en sentido antihorario alrededor del eje z en un ángulo $\varphi = 45°$ y luego le aplica una simetría respecto al plano coordenado xz.
$g: R^3 \to R^3 / g(x,y,z) = (x+2z, y, z)$

- **a)** Explicitar las matrices asociadas a las transformaciones lineales f y g.
- **b)** ¿Existe f^{-1}? ¿por qué?
- **c)** Si A_g es la matriz asociada la transformación lineal g, inducir una hipótesis para $(A_g)^n$, $\forall\, n \in N$
- **d)** Sean los vectores $\vec{a} = f(\hat{\imath})$; $\vec{b} = f(\hat{\jmath})$; $\vec{c} = f(\hat{k})$; $\vec{u} = g(\hat{\imath})$; $\vec{w} = g(\hat{\jmath})$ y $\vec{w} = g(\hat{k})$. Verificar que el volumen del cuerpo paralelepípedo cuyas aristas son los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ es igual al volumen del paralelepípedo de aristas $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$.

Ejercicio 3: Indicar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. En caso de no serlo proponer un contraejemplo:

- **a)** Si $C = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ constituye una base ortonormal de R^3 y S es un subespacio generado por $\{\vec{b}, \vec{c}\}$, entonces $Proy_S \vec{a} = \vec{O}$
- **b)** La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ h & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es diagonalizable para todos los valores reales de h.
- c) El conjunto A=$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & \lambda \end{pmatrix}\right\}$ es linealmente independiente para cualquier valor real de λ

U.T.N. F.R.H. – Examen final de Álgebra y Geometría Analítica – 1 de agosto 2024

Alumno: ……………………………………………………………Especialidad: ……………………

Profesor con quien cursó la asignatura: …………………………Año de cursado: ....

Ejercicio / Corrector	1	2 (a b c d)	3	4 (a b c)	Calificación propuesta

Calificación Final: ………………………

Ejercicio 1: La recta r contiene al punto $P(0,1,-1)$ y es perpendicular al plano $\pi: x+y-2z-1=0$.

La recta s pasa por el origen de coordenadas y es paralela al plano π y es perpendicular al eje y.

Calcular la distancia entre las rectas r y s.

Ejercicio 2: Analizar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera a falsa. En caso de ser verdadera, demostrarla o dar una explicación clara; de ser falsa, dar un contraejemplo.

a) Sean $A \in R^{3\times1} \wedge B \in R^{1\times3}$, donde A y B son matrices no nulas entonces $M = A.B$ es una matriz inversible.

b) No es posible que el núcleo de una transformación lineal $g: R^3 \to R^2$ contenga solamente al vector nulo.

c) Sea $f: R^3 \to R^3$ la transformación lineal tal que $f(1,1,1) = (1,0,0); f(1,1,0) = (0,-2,1)$ y $f(1,0,0) = (0,4,-2)$ entonces $f(2,1,2) = (2,6,-3)$.

d) La ecuación característica de la matriz $A \in R^{2\times2}$ es $\lambda^2 + 2\lambda = 0$ entonces A es diagonalizable.

Ejercicio 3: Sea el subespacio $S = \{(x,y,z,t) \in R^4 / z+2x=0 \wedge x+y-t=0\}$ y el conjunto de vectores

$$A = \left\{\vec{a} = (1,-k,1,k^2), \vec{b} = (1,-1,0,0)\right\}$$

Hallar el valor de k, tal que el conjunto $B = \left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{v_1}, \vec{v_2}\right\}$, sea una base de R^4 si los vectores $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ pertenecen al subespacio complemento ortogonal de S, $\vec{v_1} \in S^\perp$, $\vec{v_2} \in S^\perp$

Ejercicio 4:

La placa ABCD es un cuadrado de 2 unidades de lado tal que su centro es el punto $M(1,0,0)$.

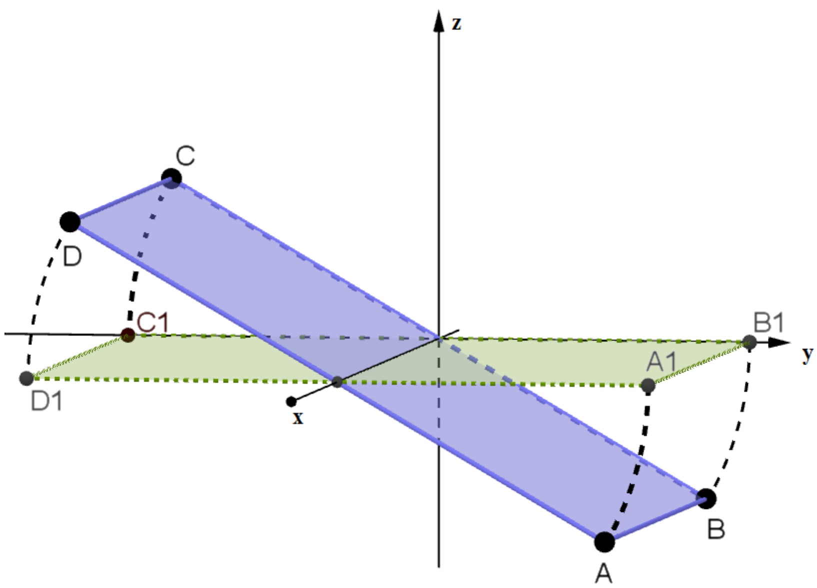
$g: R^3 \to R^3$ es una transformación lineal que le provoca una rotación alrededor del eje x en sentido antihorario en un ángulo $\varphi = \frac{\pi}{6}$

El cuadrado ABCD se transforma mediante g en el cuadrado $A_1B_1C_1D_1$

a) Expresar la matriz asociada a la transformación lineal g.

b) Dar las coordenadas de los vértices de los cuadrados ABCD y $A_1B_1C_1D_1$.

c) Al cuadrado ABCD se le aplica la transformación lineal $h(\vec{x}) = f \circ g(\vec{x})$ y se logra que el cuadrado quede contenido en el plano xz, donde el vértice A se transforma en $A_2(2,0,1)$. Dar la forma explícita y la matriz asociada de las transformaciones f y h.



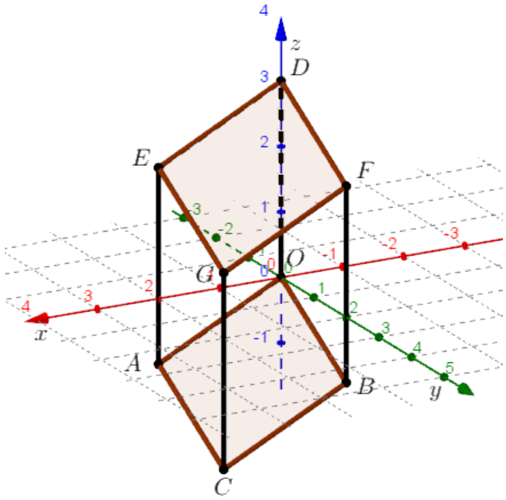
U.T.N. F.R.H. – Examen final de Álgebra y Geometría Analítica – 8 de Agosto 2024

Estudiante: ……………………………………………….. Especialidad: ……………………..

Profesor con quien cursó la asignatura: …………………………… Año de cursado: ………………

Ejercicio / Corrector	1				2			3		Calificación propuesta
	a	b	c	d	a	b	c	a	b	

Calificación Final: ………………………



Ejercicio 1. La unidad de medida en este ejercicio es el metro. Dos placas de vidrio idénticas se utilizarán como base y tapa, respectivamente, de un acuario transparente. Ambas se colocan superpuestas en la posición donde quedará la base. Los vértices de las placas coinciden allí con los puntos de la figura $O(0,0,0)$, $A(2,0,-1)$, $B(0,2,-1)$ y $C(2,2,-2)$. La placa que se usará como tapa se traslada paralela a la base 3 metros sobre la vertical (eje z). Se colocan varillas delgadas para sostenerla, y queda fija en los puntos D, E, F y G. Luego se completan las caras laterales con otras placas de vidrio. Responder las siguientes cuestiones en forma justificada.

1.a) ¿Cuál es el volumen máximo de agua (medido en metros cúbicos) que puede contener el acuario?

1.b) ¿La base es cuadrada?

1.c) Se colocará una varilla delgada hueca larga dentro del acuario como tubo de ventilación desde el punto O en forma perpendicular a la base. Para que la varilla salga al exterior, ¿será necesario realizar un agujero en la tapa del acuario o en alguna de las paredes laterales? Indicar las coordenadas del punto de salida usando el sistema de referencia de la figura.

1.d) La estructura se rotará alrededor del eje y de manera que el lado $\overline{OA}$ quede contenido en el semieje positivo de las x. ¿Qué ángulo deberá girarse? ¿Horario o antihorario? Escribir la matriz de la rotación.

Ejercicio 2. Sean las transformaciones lineales:

$f: \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ que provoca una simetría respecto al plano coordenado yz y luego una proyección sobre el plano xz;

$g: \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3} / g(x,y,z) = (x, -2y, x+z)$.

2.a) Explicitar las matrices asociadas a las transformaciones lineales f y g.

2.b) Si A_g es la matriz asociada la transformación lineal g, inducir una hipótesis para $(A_g)^n, \forall\, n \in \mathbf{N}$.

2.c) Sea $Nu(f)$ el núcleo de la transformación lineal f. ¿Son los vectores del $Nu(f)$ autovectores de g? Justificar. Si la respuesta es afirmativa, ¿cuál es el autovalor correspondiente?

Ejercicio 3. Analizar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera, demostrarla o justificarlo claramente. De ser falsa, dar un contraejemplo o una clara justificación.

3.a) Sea $T = \{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}; \vec{d}\}$ una base ortonormal de $\mathbf{R^4}$. Sea $F \in \mathbf{R^{2\times4}}$ tal que su primera fila son las coordenadas de $\vec{a}$ y la segunda fila son las coordenadas de $\vec{b}$. Sea $G \in \mathbf{R^{4\times2}}$ tal que su primera columna son las coordenadas de $\vec{c}$ y la segunda columna son las coordenadas de $\vec{d}$. Entonces, cualquiera sea la base ortonormal T, la matriz $M = F \cdot G$ no tiene inversa.

3.b) La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ h & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es diagonalizable para un único valor real de h.

U.T.N. F.R.H. – Examen final de Álgebra y Geometría Analítica – 5 de Diciembre 2024

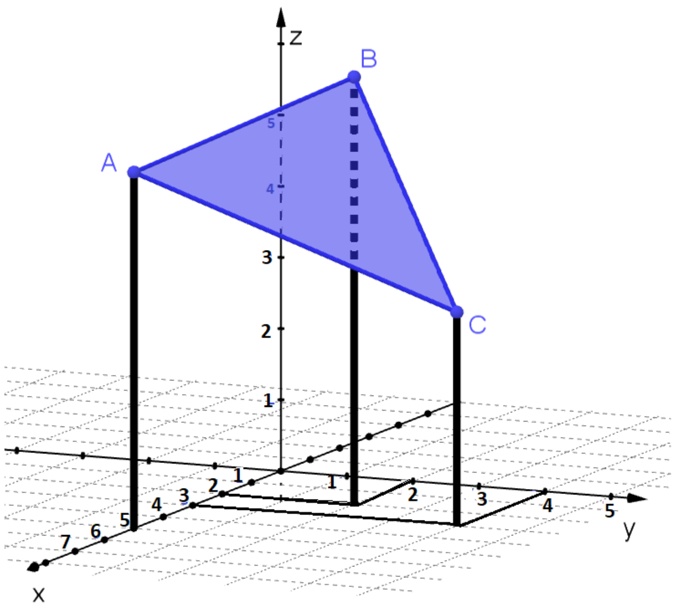
Alumno: ……………………………………………….. Especialidad: ……………………

Profesor con quien cursó la asignatura: …………………………… Año de cursado: ....

Ejercicio / Corrector	1 (a b c)	2 (a b c)	3 (a b c)	Calificación propuesta

Calificación Final: ………………………

Ejercicio 1: Se pretende construir un techo para un stand de un evento para el cual se dispone de columnas y de tela para toldos. La columna del punto A tiene 5 metros de altura, la columna del punto B tiene 6 metros y la del punto C tiene 3 metros. Se colocan las columnas según disposición de la figura anexa.



a) Si el techo tiene la forma del triángulo ABC, ¿Cuántos metros cuadrados de toldo se necesitan como mínimo para construir el techo?

b) Si se quiere construir otro techo, simétrico al apoyado en los puntos A, B y C, respecto al plano coordenado xz. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos de apoyo llamados A', B'y C´?

c) Si los puntos A, B y C definen al plano α y los puntos A', B'y C', definen al plano β, hallar la intersección entre los planos α y β.

Ejercicio 2: Indicar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar con claridad y con los cálculos pertinentes la opción elegida.

a) La matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & h & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, es diagonalizable para cualquier valor de $h \in$ R.

b) Sean las transformaciones lineales $f: R^3 \to R^3$ que provoca una rotación en sentido horario alrededor del eje z en un ángulo $\varphi = 90°$ y $g: R^3 \to R^3 / g(x, y, z) = (x + 2z, y, z)$ entonces $(g \circ f)(\vec{x}) = (f \circ g)(\vec{x})$.

c) Si A, B y C son matrices cuadradas de orden n tales que: A es simétrica, B es antisimétrica, C es ortogonal entonces $((A^T)^T . B . C^{-1})^T = -C . B . A$

Ejercicio 3: Sean los subespacios de R^4, $S = \{(a, -b, a, b) \forall a \in R, \forall b \in R\}$

$$T = \left\{ (x, y, z, t) \in R^4 \ / \left\{ \begin{array}{c} x + y - z + 2t = 0 \\ -y + 2t = 0 \\ x - z + (k+2)t = 0 \end{array} \right. \right\}$$

y el conjunto $B = \{\vec{v}_1 = (1, h, -1, 2 - h), \vec{v}_2 = (h, h^2 + 1, -1, 2)\}$ una base del subespacio W.

a) Hallar, si existe, el valor de h tal que el conjunto B sea una base del subespacio complemento ortogonal de S, $S^{\perp}$.

b) Si $f: R^4 \to R^4$ es la transformación lineal que proyecta ortogonalmente sobre el subespacio S, analizar si el vector $\vec{c} = (3, 1, -3, 1)$pertenece al núcleo de la transformación f, o a la imagen de f o a ninguno de los dos subespacios.

c) ¿Existe un valor real de k tal que el subespacio T tenga dimensión igual a 2? En caso de que la respuesta sea afirmativa defina un vector genérico del subespacio T y proponga una base de T.

U.T.N. F.R.H. – Examen final de Álgebra y Geometría Analítica – 12 de Diciembre 2024

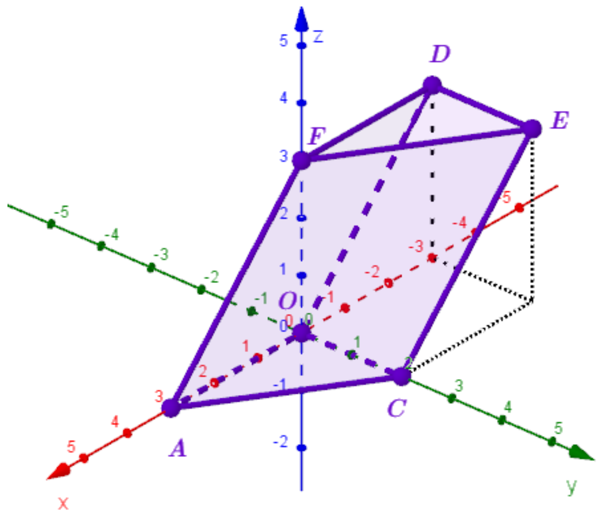
Estudiante: ……………………………………………….. **Especialidad: ……………………**

Docente con quien cursó la asignatura: …………………………… **Año de cursado: ………………**

Ejercicio / Corrector	1				2				3			Calificación propuesta
	a	b	ci	cii	a	b	c	d	a	b	c	

Calificación Final: ………………………

Ejercicio 1. Sea el cuerpo hueco en forma de prisma de base triangular que muestra la figura.



a) ¿Cuál es la cantidad máxima de líquido que puede contener el cuerpo? Proponer un planteo adecuado y resolver.

b) Se coloca una varilla delgada que va desde el vértice O hasta el punto donde se cortan las mediatrices de las aristas DE y DF. ¿Cuál es el largo de la varilla?
Nota: Mediatriz de un segmento es la línea recta perpendicular a dicho segmento trazada por el puno medio.

c) El cuerpo, vacío, se rota alrededor del eje y de forma que la cara $OCED$ se apoya (por el camino más corto) sobre el plano horizontal xy.

i. Escribir la forma explícita y matricial de la transformación lineal que se aplicó.

ii. Hallar la altura del cuerpo en esa nueva posición. Justificar el planteo.

Ejercicio 2. Sea $S_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 / \ x - y + z = 0\}$ y sea S_2 el subespacio generado por el vector $\vec{u} = (h + 1, h - 1, 2h + 1, 0)$ con $h \in \mathbf{R}$.

a) Dar una base ortogonal para S_1, hallar el subespacio complemento ortogonal de S_1, $S_1^{\perp}$, y dar una base ortogonal para dicho subespacio.

b) Con $h = 0$, encontrar la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre S_1.

c) Hallar h para que $S_2 \subset S_1$. Justificar el planteo.

d) Sea la transformación lineal $g: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ definida por $g(x, y, z, t) = (-2x, 3x - 2z, -2z, t)$. ¿Existe algún valor $h \in \mathbf{R}$ para que $\vec{u}$ resulte autovector de g con autovalor asociado $\lambda = -2$. Justificar la respuesta. En caso de existir, dar todas las respuestas posibles.

Ejercicio 3. Analizar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar la respuesta en forma clara. En caso de ser verdadera, demostrarla. Si es falsa, presentar un contraejemplo.

a) Sea $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la transformación que provoca una rotación alrededor del eje z en sentido antihorario en $\pi/3$, entonces todo vector no nulo $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ es autovector de $g = f \circ f \circ f$ de autovalor asociado $\lambda = -1$.

b) Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbf{R}^3$ son tales que $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$, entonces $\vec{v}_1 \times \vec{v}_3 - \vec{v}_3 \times \vec{v}_2 = \vec{0}$.

c) Sean A, B, C y M matrices cuadradas de orden n tales que A es ortogonal, B es antisimétrica, C es simétrica y $M = A \cdot (B \cdot C \cdot A)^T$, entonces $M^T = -(C \cdot B)^T$.

U.T.N. F.R.H. – Examen final de Álgebra y Geometría Analítica – 20 de Febrero 2025

Alumno: …………………………………………………………. **Especialidad: …………….**

Profesor con quien cursó la asignatura: …………………………… **Año de cursado: ....**

Ejercicio / Corrector	1 (a b)	2 (a b)	3 (a b)	4 (a b)	Calificación propuesta

Calificación Final: ………………………

Ejercicio 1: La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es la matriz asociada a la transformación lineal $f: R^4 \to R^2$.

El subespacio S es el núcleo de la transformación lineal f y subespacio W que es el complemento ortogonal de S

- **a)** Hallar para que valor o valores de k el vector $\vec{u} = (k, k^2 - 1, 2, 1 - k)$ pertenece al subespacio W.
- **b)** Si $g: R^2 \to R^4 /\ g(x, y) = (y, x + y, -4x, 3x)$ y $h(\vec{x}) = f \circ g\ (\vec{x})$ comprobar que cualquier vector no nulo de R^2 es un autovector de la transformación lineal h.

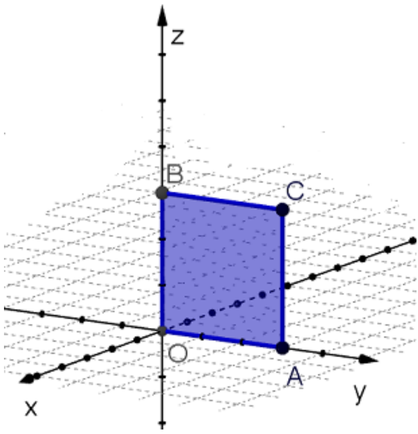
Ejercicio 2: Las rectas $r: \begin{cases} x + 3y = 8 \\ 4y + z = 7 \end{cases}$ y $s: (x, y, z) = (2h + 1, -1,8) + \lambda(1,0,2) \quad \forall\lambda \in R$ son alabeadas y se encuentran a 3 unidades de distancia una de la otra. A partir de estos datos se pide:

- **a)** Calcular el valor de h.
- **b)** Sean los planos π y β, paralelos, tal que π contiene a la recta r y β a la recta s. ¿La información brindada es suficiente para definir la ecuación del plano π? Si responde afirmativamente, dar la ecuación general del plano π. Si opta por la negativa, justificar su respuesta de por qué la información es insuficiente.

Ejercicio 3: Analizar si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa, justificando en cada caso la respuesta.

- **a)** Si $P \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ inversible, $Q \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ una matriz ortogonal y $P^{-1} \cdot ((X^T \cdot Q)^T + C) = I$ entonces $X = Q \cdot (P - C)$.
- **b)** Sea V un espacio vectorial real con producto interior. Sean $\vec{u}, \vec{v} \in V$ dos vectores ortonormales. Si los vectores $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ y $\alpha\vec{u} - \beta\vec{v}$ son ortogonales, entonces $|\alpha| = |\beta|$.

Ejercicio 4: Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a una transformación lineal $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ y el cuadrado OABC representado en la figura anexa. (A (0,3,0); B (0,0,3))



- **a)** Si sobre el cuadrado OABC se aplica la transformación $g(\vec{x}) = (f \circ f)(\vec{x})$ se obtiene la figura P. Representar P. ¿Qué tipo de figura es P? ¿Cuál es el vínculo entre el área de cuadrado OABC y el área de la figura P?
- **b)** Analizar si A^n es diagonalizable, con $n \in N_{>0}$. Justificar la respuesta.

U.T.N. F.R.H. – Examen final de Álgebra y Geometría Analítica – 27 de Febrero 2025

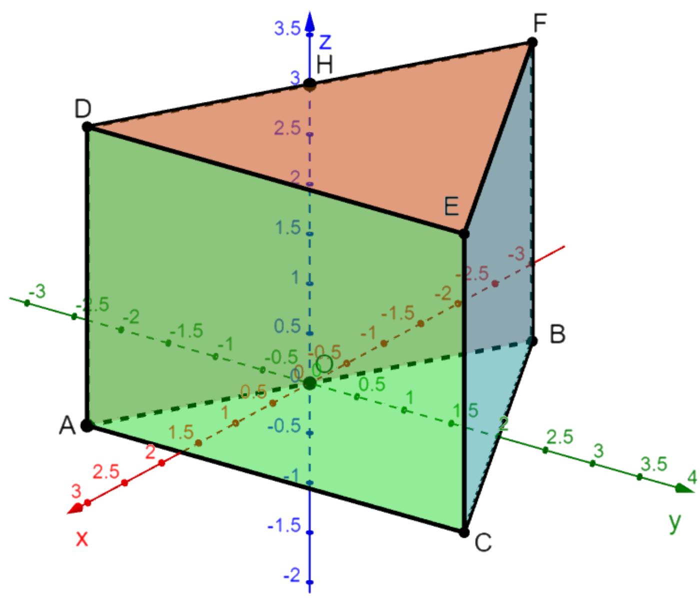
Estudiante: ………………………………………………………. Especialidad: ………………..

Docente con quien cursó la asignatura: …………………………… Año de cursado: ....

Ejercicio / Corrector	1 a	1 b	1 c	2 a	2 b	3 a	3 b	3 c	Calificación propuesta

Calificación Final: ………………………

Ejercicio 1. Sea el prisma triangular ABCDEF esquematizado en la figura. La base es un triángulo equilátero (tres lados de igual longitud) ABC contenido en el plano xy, tal que mide 4 cm de lado. El punto medio entre A y B coincide con el origen de coordenadas. La altura del prisma es 3 cm. La cara ACED es paralela al plano yz. Las terna que identifica la posición de A es $(\sqrt{3}, -1, 0)$.



a) Dar las coordenadas de los otros vértices y calcular el volumen del prisma.

b) Escribir la ecuación general de un plano (no paralelo al plano xy) que divida al prisma en dos partes de igual volumen.

c) Al cuerpo se le aplica una transformación lineal $f: \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ tal que, sin deformarlo, deja a la cara ABFD contenida en el plano xz. Proponer una transformación que produzca ese efecto, y dar su forma explícita y matricial. ¿Cuál es la posición final del vértice C?

Ejercicio 2. Sea $f: \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ la transformación lineal cuya matriz asociada es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Contestar cada una de las siguientes cuestiones en forma justificada.

a) ¿Existe algún valor real k para que $\lambda = 1$ sea autovalor de f y que, además, A resulte diagonalizable? En caso afirmativo, indicar el valor de k y proponer una matriz diagonal D con la que A sea equivalente y una matriz de pasaje P entre ambas. Si hay más de un valor de k que satisface lo pedido, indicarlos todos, pero sólo dar D y P para un caso.

b) Sea $g: \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ la transformación correspondiente a la proyección ortogonal sobre el plano xz. ¿Existe algún valor real k para que $\vec{v} = (1,0,-1)$ sea autovector de $h(\vec{x}) = (g \circ f)(\vec{x})$? En caso afirmativo, indicar el valor de k y cuál es el autovalor asociado a $\vec{v}$, y dar la forma explícita de $h(\vec{x})$.

Ejercicio 3. Analizar si cada una de las siguiente proposiciones es verdadera o falsa. Justificar cada respuesta en forma clara.

a) Si $A = \left((a_{i,j})\right) \in \mathbf{R^{n\times n}}$ tiene una fila o una columna de ceros, el conjunto solución del sistema homogéneo $A \cdot X = O$ con $X = \left((x_j)\right) \in \mathbf{R^{n\times 1}}$ y $O = \left((0)\right) \in \mathbf{R^{n\times 1}}$, es un subespacio S cuya dimensión satisface que $\dim(S) \geq 1$.

b) Sea $B = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2\} \in \mathbf{R^3}$ una base de un subespacio S, entonces la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre S es

$$proy_S \vec{v} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{v}_1 \rangle}{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle} \vec{v}_1 + \frac{\langle \vec{v}, \vec{v}_2 \rangle}{\langle \vec{v}_2, \vec{v}_2 \rangle} \vec{v}_2 \quad \forall \vec{v} \in \mathbf{R^3}.$$

c) Sean A, B, C y M matrices cuadradas de orden n tales que A es ortogonal, B es antisimétrica, C es simétrica y $M = A \cdot (B \cdot C \cdot A)^T$, entonces $M^T = -(B \cdot C)^T$.

U.T.N. F.R.H. – Examen final de Álgebra y Geometría Analítica – 6 de Marzo 2025

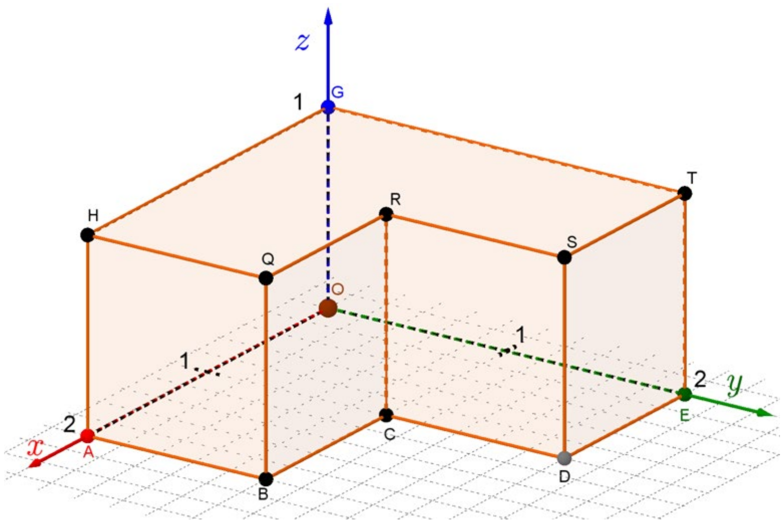
Estudiante: ……………………………………………………. Especialidad: ………………..

Docente con quien cursó la asignatura: …………………………… Año de cursado: …………

Ejercicio / Corrector	1	2	3	Calificación propuesta
	a b c	a bi bii	a b c d	

Calificación Final: ………………………

Ejercicio 1. En base al el cuerpo esquematizado en la figura, contestar las siguientes cuestiones en forma justificada.



a) Hallar la ecuación general del plano π que contiene a los vértices HTC. ¿Pertenece R a π?

b) Hallar el conjunto de puntos P que pertenezcan al plano xz de forma que el conjunto $\{\overrightarrow{RE}; \overrightarrow{OC}; \overrightarrow{AP}\}$ sea linealmente dependiente. Dar una interpretación geométrica del conjunto solución hallado.

c) Al cuerpo se le aplica una transformación lineal $f: \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ tal que, sin deformarlo, deja al paralelogramo OCRG contenido en el plano xz. Proponer una transformación que produzca ese efecto, y dar su forma explícita y matricial. ¿Cuál es la posición final del vértice C?

Ejercicio 2. Sea $O \in \mathbf{R^{2\times2}}$ la matriz nula y sea el subespacio S definido por:

$$S = \left\{A = \left(\left(a_{i,j}\right)\right) \in \mathbf{R^{2\times2}} / \left(a_{i,j} = 0 \; si \; i > j\right) \wedge \left(A - A^T = O\right)\right\}.$$

a) Hallar la dimensión y dar una base de S. La dada, ¿es una base ortogonal? Justificar.

b) Sea $f: \mathbf{R^{2\times2}} \to \mathbf{R^{2\times2}}$ una transformación lineal tal que $f(X) = X - X^T$, $\forall X \in \mathbf{R^{2\times2}}$. Analizar si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Justificar las respuesta:

i. $S \subset Nu(f)$

ii. $\forall X \in \mathbf{R^{2\times2}}$, $(f \circ f)(X) = 2f(X)$

Ejercicio 3. Sean las transformaciones lineales de $\mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ de las que se conoce que:

$$f(\hat{\imath}) = 2\hat{\imath} + h\hat{\jmath} + t\hat{k};\ f(\hat{\jmath}) = 2\hat{\jmath} + 3\hat{k};\ \hat{k} \text{ es autovector con autovalor asociado } \lambda = 3;$$

$$g\text{: proyección ortogonal sobre el subespacio } S = \{(a,b,b), \forall a, \forall b\} \subset \mathbf{R^3}$$

a) Escribir la forma explícita y matricial de f.

b) Analizar para qué valores reales de h y t, la matriz de la transformación f resulta diagonalizable. Justificar la respuesta.

c) Escribir la forma explícita y matricial de g.

d) Para $h = 1$ y $t = 0$, ¿es $\vec{v} = (0,1,-1)$ autovector de $f \circ g$? En caso afirmativo, ¿cuál es el autovalor asociado? Justificar la respuesta.