U.T.N. F.R.H. – Examen final de Álgebra y Geometría Analítica – Mayo 2023

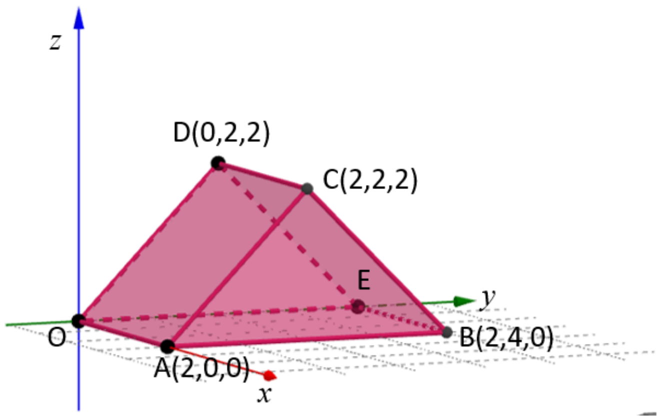
Estudiante: ……………………………………………………………………… Especialidad: ……………………

Docente con quien cursó la asignatura: ……………………………….. Ciclo lectivo de cursado: ……………..

Ejercicio / Corrector	1		2			3				4		Calificación propuesta
	a	b	a	b	c	a	bi	bii	biii	a	b	

Calificación Final: ………………………

Ejercicio 1



a) Si el punto M es el centro de la cara EBCD y el punto Q es el centro de la cara OABE entonces ¿la recta definida por los puntos M y Q es paralela a la recta definida por los puntos A y C? Justificar su respuesta.

b) Calcular la distancia de la recta definida por los puntos E y B con el plano que contiene a la cara OADC.

Ejercicio 2

Sea A una matriz simétrica asociada a una transformación lineal f: $R^2 \rightarrow R^2$. Se sabe que tiene traza igual a cero, tr(A)=0 (tr(A) $=a_{1,1} + a_{2,2}$) y que el subespacio $S = \left\{\begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}\right\}$ permanece invariante al aplicarle la transformación f.

a) Hallar la matriz A

b) Definir sus autovalores y los subespacios característicos asociados. ¿A es diagonalizable? ¿por qué?

c) Si es posible, definir la matriz P que diagonaliza a A. Definir la matriz diagonal D semejante a la matriz A.

Ejercicio 3 Sea el vector $\vec{u} = (1,0,1) \in R^3$, y las transformaciones lineales f y g de las que se conoce que:

- $f : R^3 \rightarrow R^3 / f(\vec{x}) = \frac{<\vec{x};u>}{<\vec{u};\vec{u}>}\, \vec{u}$, cuya matriz asociada es A_f.
- $g : R^3 \rightarrow R^3 / g(\vec{x}) = A_g \vec{x}$, con $A_g = 2A_f - I$, donde I es la matriz identidad.

a) Definir las matrices asociadas a las transformaciones lineales f y g según la base canónica.

b) Analizar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar su claramente su respuesta

i) $S = \left\{ \vec{x} \in \mathbf{R}^3 \,/\, \vec{x} \times (1,0,1) = \vec{0} \right\}$ es el subespacio Imagen de la transformación lineal f.

ii) No existe la inversa de la matriz A_g, asociada a la transformación lineal g.

iii) Los vectores de la forma $\vec{x} = (a, b, -a) \forall a \in R, \forall b \in R$ son autovectores de $h(\vec{x}) = g \circ f(\vec{x})$

Ejercicio 4: Sean los siguientes conjuntos contenidos en $V = R^{3\times3}$

$S = \left\{ A \in R^{3\times3} \,/\, A^T = A \wedge a_{i,j} = 1 \text{ si } i = j \right\}$ $\quad W = \left\{ B \in R^{3\times3} \,/\, B^T = -B \wedge b_{1,2} + b_{2,3} = 0 \right\}$

Analizar si alguno de los conjuntos NO define a un subespacio, en tal caso justificar por qué no lo es. Si alguno de los conjuntos define a un subespacio, expresar un elemento genérico del mismo, proponer una base y su dimensión.

U.T.N. F.R.H. – Examen final de Álgebra y Geometría Analítica – Julio 2023

Estudiante: ………………………………………………………………………. **Especialidad: …………………….**

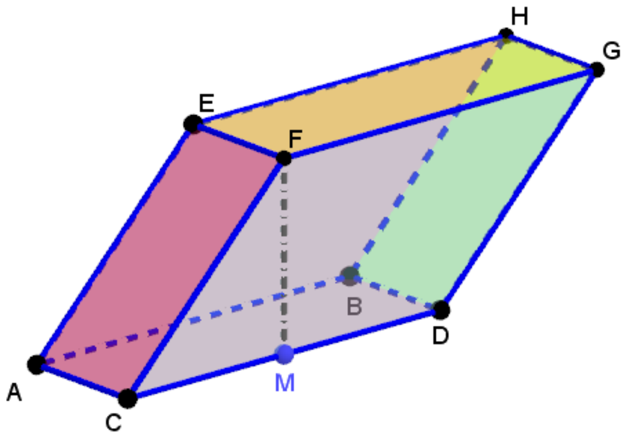
Docente con quien cursó la asignatura: ………………………………….. Ciclo lectivo de cursado: ....

Ejercicio / Corrector	1		2					3	Calificación propuesta
	a	b	a	b	c	d	e		

Calificación Final: ………………………

Ejercicio 1. Del paralelepípedo ABCDEFGH de la figura se conoce que:

El ángulo CAB es recto en A
La cara ABCD es perpendicular a la cara FGCD
La distancia entre F y la arista CD es 3
M es el punto medio entre C y D
La arista CD mide 6
La arista DB mide 2



Adosar al gráfico un sistema de coordenadas cartesiano ortogonal $(O; x, y, z)$.

a) Dar la ecuación de dos planos que dividan al cuerpo en tres partes de igual volumen entre sí.

b) Rotar el cuerpo alrededor de uno de los ejes coordenados un ángulo $\pi/2$ en sentido antihorario. Luego proyectar el cuerpo rotado sobre el plano coordenado perpendicular al eje sobre el cual rotó (esto es, si rota sobre el eje z, se proyecta sobre el plano xy). Indicar qué forma tiene la imagen final y dar las coordenadas de los vértices de dicha imagen.

Ejercicio 2. Presentar una base ortonormal $B = \{\hat{v}_1; \hat{v}_2; \hat{v}_3\}$ de $\mathbf{R}^3$ con la condición de que a lo sumo uno de los vectores tenga dos componentes nulas. Armar una matriz $A \in \mathbf{R}^{3\times3}$ donde aparezcan en columna las ternas que identifican a cada uno de los vectores: $\hat{v}_1$ en la columna 1, $\hat{v}_2$ en la 2 y $\hat{v}_3$ en la columna 3.

a) Escribir el vector $\vec{w} = (1, -2, 3)$ como combinación lineal de los elementos de la base B.

b) Identificar mediante una o más ecuaciones homogéneas al subespacio generado S por $\{\hat{v}_1; \hat{v}_2\}$.

c) Sean $X^T = (x\ y\ z)$ y $W^T = (a\ b\ c)$. ¿Para qué valores reales de a, b y c, el sistema de ecuaciones lineales $A \cdot X = W$ tiene solución única? Justificar.

d) ¿Es la matriz A ortogonal? Justificar.

e) Sea $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz asociada es A. Sea $g(\vec{x})$ la proyección ortogonal de $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ sobre $\hat{v}_3$. Sea S el subespacio hallado en **b)**. Analizar si la siguiente proposición es verdadera o falsa:

Todo vector de S pertenece al núcleo de la transformación lineal $(f \circ g)(\vec{x})$.

Ejercicio 3. De la transformación lineal $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ se conoce que:

$$f(a, 0, 0) = (a, -a, 0) \quad \forall a \in \mathbf{R}$$

$$(1,1,0) \text{ es invariante frente a } f$$

$$f(0,0,1) = (0, -d, d)$$

Analizar para los distintos valores $d \in \mathbf{R}$ si la matriz A asociada a f es diagonalizable. Justificar la respuesta.

U.T.N. F.R.H. – Examen final de Álgebra y Geometría Analítica – Agosto 2023

Estudiante: ……………………………………………………..………………… Especialidad: ……………………

Docente con quien cursó la asignatura: ……………………………….. Ciclo lectivo de cursado: ……………..

Ejercicio / Corrector	1 (a b c d)	2 (a b)	3 (a b)	4 (a b c)	Calificación propuesta

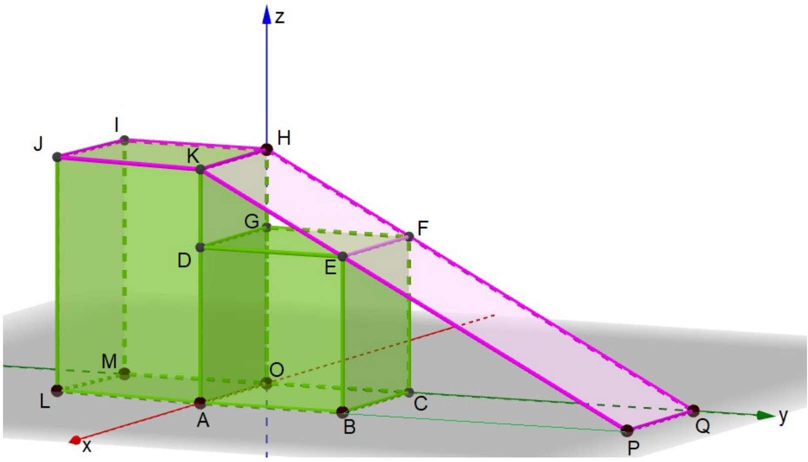
Calificación Final: ……………………..

Ejercicio 1:

El cubo OABCDEFG tiene 8 unidades de volumen. Su cara OABC está apoyada en el plano coordenado xy.

El prisma OALMHIJK tiene una base cuadrada de igual área que la base del cubo. Su altura es en una unidad mayor a la altura del cubo.

Se construye una rampa inclinada PQHK apoyada en el plano coordenado xy, en la arista EF del cubo y en la arista HK del prisma.



a) Se requiere que la rampa tenga una inclinación menor a 30°, ¿cumple los requerimientos?

b) Dar la ecuación del plano π que la contiene a la placa PQKH.

c) Se construye una baranda que queda contenida en la recta $r: \begin{cases} x = 0 \\ y = -2z + 8 \end{cases}$. ¿A qué distancia se encuentra la baranda de la rampa?

d) Considerando que el cubo y el prisma son de material sólido y que se quiere rellenar los espacios huecos, ¿qué volumen de material es necesario?

Ejercicio 2:

Sea el subespacio S formado por todos los vectores de $\mathbf{R}^4$ ortogonales al vector $\vec{v} = (1,0,0,1)$. Sea la transformación lineal $f: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ correspondiente a $f(\vec{x}) = proy_{\vec{v}}\vec{x}$.

Se pide:

a) Definir el núcleo y la imagen de la transformación lineal f. Dar una base y la dimensión de cada uno de los subespacios.

b) Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son autovectores de f asociados a autovalores distintos. Proponer un conjunto $C = \{\vec{u}, \vec{v}\}$. ¿Es C un conjunto ortogonal? Justificar la respuesta.

Ejercicio 3: Analizar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si es verdadera, demostrarla y si es falsa proponer un contraejemplo.

a) Si $D = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es un sistema generador de $\mathbf{R}^3$, la matriz A tiene como columnas a los vectores del conjunto D entonces el sistema de ecuaciones $A \cdot X = O$ admite soluciones no triviales.

b) Si A es involutiva de índice dos, B es ortogonal y $(X^{-1} \cdot B)^{-1} + A^2 \cdot X = B + X$ entonces $X = I$. Aclaración: Todas las matrices son de orden n; I es la matriz identidad.

Ejercicio 4: De la transformación lineal $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ se sabe que:

$$f(1,1,0) = (0,-2,3)\ ;\ f(0,1,0) = (3,-2,3) \text{ y } f(0,0,1) = (a+1, 0, -3).$$

a) Expresar la matriz A asociada a la transformación lineal f según la base canónica.

b) ¿Existe algún valor de a tal que $\vec{u} = (1,0,1)$ sea autovector de f ? ¿Cuál sería el autovalor asociado?

c) Para $a = -1$, ¿es diagonalizable A?

U.T.N. F.R.H. – Examen final de Álgebra y Geometría Analítica – 28 Septiembre 2023

Estudiante: ……………………………………………………………….Especialidad: …………………….

Docente con quien cursó la asignatura: …………………….. Ciclo lectivo de cursado: ………………

Ejercicio / Corrector	1 a	1 b	2 a	2 b	2 c	3 a	3 b	3 c	4	Calificación propuesta

Calificación Final: ……………………..

Ejercicio 1. En el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden tres se plantean dos subespacios. El subespacio S está formado por todas las matrices triangulares inferiores. El subespacio $W=\left\{A\in\mathbf{R}^{3\times 3}\ /\ A=A^T\right\}$, es el subespacio de las matrices simétricas de orden 3.

Analizar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar la respuesta.

a) El subespacio $S\cap W$ tiene igual dimensión que el subespacio complemento ortogonal de S, es decir $\dim(S\cap W)=\dim(S^{\perp})$.

b) Si M pertenece a S y P pertenece a W entonces el conjunto $\{M,P\}$ es linealmente independiente.

Ejercicio 2.

De la transformación lineal $f:R^3\to R^3$ se conoce que:

$$f(\hat{i})=\hat{i};\ f(\hat{j})=(\lambda,1,0);\ f(\hat{i}+\hat{k})=(1,0,1).$$

Y $g:R^3\to R^3/\ g\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+\alpha y\\ \alpha x-y+4z\\ -x+z\end{pmatrix}$

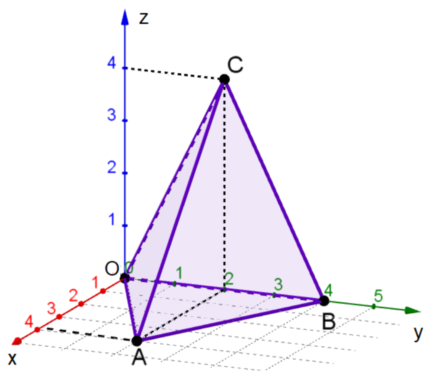
a) Expresar la matriz A asociada a la transformación lineal f y la matriz B asociada a la transformación lineal g

b) Inducir una hipótesis para A^n con $n\in\mathbf{N}$.

c) Analizar si existen un valores reales de α y de λ tal que el núcleo de cada una de las transformaciones lineales contenga vectores no nulos. Justificar su respuesta y en caso de ser posible definir el valor de α y de λ

Ejercicio 3: Sea el tetraedro de vértices OABC que muestra la figura.

Se pide:



a) Calcular la distancia entre la recta definida por los puntos O y C y la recta definida por los puntos A y B.

b) Hallar el valor de a tal que el plano que contiene a la cara OAC sea paralelo al plano

$$\pi:(x,y,z)=(-2,2,-2)+\lambda(-6,-2,2)+\mu(3,a,-a)\forall\lambda\in R,\forall\mu\in R$$

c) Proponer un punto del plano coordenado xy de modo que al agregarlo la figura sea una pirámide que tenga un paralelogramo de base.

Ejercicio 4: El conjunto $B=\left\{\vec{a},\vec{b}\right\}$ es una base ortonormal de un subespacio $S\subset R^3$ y $f:R^3\to R^3$ es la transformación lineal que a cada vector de R^3 le asigna su imagen especular respecto al subespacio S.

Entonces justificar que $\vec{w}=\vec{a}\times\vec{b}$ es un autovector de f y calcular el autovalor asociado.

U.T.N. F.R.H. – Examen final de Álgebra y Geometría Analítica – Febrero 2024 – T1

Alumno: …………………………………………………………………….. **Especialidad: ……………………**

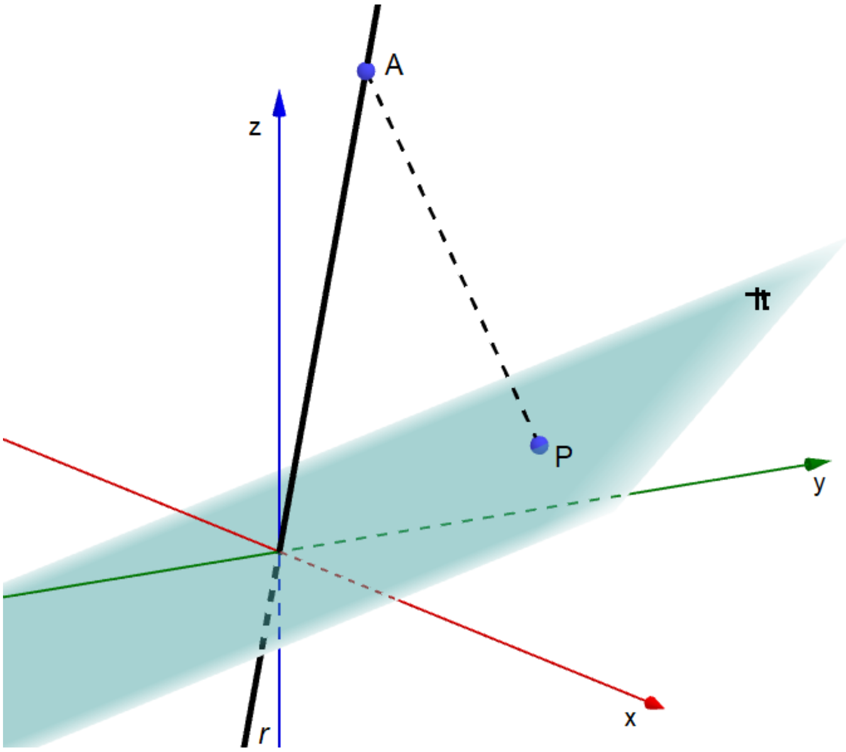
Profesor con quien cursó la asignatura: ……………………………….. **Año de cursado: ………………**

Ejercicio / Corrector	1: a b ci cii ciii	2: a b	3: a b	4: a b	Calificación propuesta

Calificación Final: ………………………

Ejercicio 1: El punto A(1,1,8) pertenece a la recta r

El punto P(3,3,2) es la proyección de A sobre el plano π.



a) La información dada, ¿es suficiente para dar la ecuación de la recta r y el plano π? En caso de ser posible defina las ecuaciones de ambos. Si no es posible, detalle que dato faltaría.

b) Dar las coordenadas del punto A´, simétrico de A respecto del plano π.

c) Si $f: R^3 \rightarrow R^3$proyecta sobre el plano π a los vectores de R^3analizar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificar:

- i) $\vec{u} = (2,2,-4) \in Nu(f)$
- ii) $\vec{v} = (6,6,2)$ es autovector de f.
- iii) Existe f^{-1}.

Ejercicio 2: Sea el subespacio de R^3, $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 / \begin{pmatrix} 0 & 1 & a-1 \\ 0 & a-1 & 1 \\ a-2 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

a) Analizar para los distintos valores de a la dimensión del subespacio. Expresar en cada caso un vector genérico que pertenece al subespacio.

b) Para $a = 2$, hallar el complemento ortogonal del subespacio S , $S^{\perp}$. Luego hallar la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = (3,-2,1)$ sobre el subespacio $S^{\perp}$.

Ejercicio 3: Se conoce que la matriz asociada, A, a una transformación lineal, f: $\mathbf{R^3} \rightarrow \mathbf{R^3}$, es simétrica y verifica que $f(-\hat{\jmath}) = (2,-6,1)$, $f(\hat{k}) = (-1,-1,5)$ y $\vec{a} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ es un autovector.

a) Hallar la matriz A

b) Calcular los autovalores y sus subespacios de autovectores asociados.

Ejercicio 4: Sea el conjunto $C = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ una base ortogonal de R^3.

a) $L = \{\vec{u}, \vec{v}, (\vec{u} \times \vec{u}) \times \vec{v}, (\vec{v} + \vec{w}) \times (\vec{v} - \vec{w})\}$. Eliminar elementos en el conjunto L hasta obtener un conjunto linealmente independiente constituido por la mayor cantidad posible de vectores. Cada eliminación o no eliminación debe estar justificada.

b) Sea $A(a_1, a_2, a_3)$ un punto fijo de R^3, el punto O el origen de coordenadas y $P(x, y, z)$ un punto genérico. Analizar si existe algún punto A tal que la recta $r \equiv \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{v}$, $\forall\, \lambda \in R$ está contenida en el plano $\pi \equiv \vec{u} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$.

U.T.N. F.R.H. – Examen final de Álgebra y Geometría Analítica – Marzo 2023

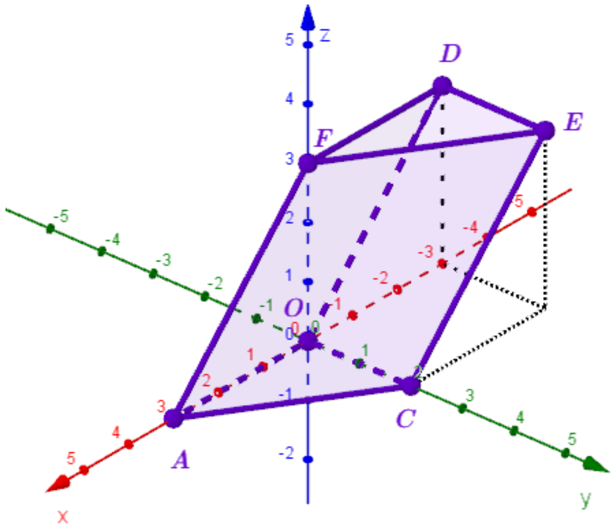
Estudiante: ……………………………………………………………… Especialidad: …………………….

Docente con quien cursó la asignatura: …………………… Ciclo lectivo de cursado: ………………

Ejercicio / Corrector	1.1 1.2 1.3	2	3.1 3.2 3.3	Calificación propuesta

Calificación Final: ………………………

Ejercicio 1. Sea el prisma de base triangular que muestra la figura. Sea π el plano que contiene a la cara $ACEF$. Sea la recta $r: \frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-b}{-1}$ con a y b reales tales que $a \neq 0$.



1.1) Hallar para qué valores de a y b, la recta r está a una distancia $\sqrt{17}$ del plano π. Realizar en forma clara los cálculos necesarios. Dar todas las respuestas posibles.

1.2) De los puntos que dividen en tres partes iguales al segmento OD, M es el punto más cercano al origen de coordenadas. Hallar los puntos P sobre el eje y, tales que $|\overrightarrow{OP}| = 2|\overrightarrow{OM}|$.

1.3) Proponer una transformación lineal que haga que el prisma, sin deformarse, quede con la cara OCDE apoyada sobre el plano xy. Dar la interpretación geométrica de la transformación, escribir su forma explícita y su matriz asociada.

Ejercicio 2.

El polinomio característico de la matriz $A = \begin{pmatrix} -8 & -9 & -12 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ es $P(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda+2)^2$. ¿Es posible hallar una matriz invertible P y una matriz diagonal D tales que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$?
De no serlo, justificar la respuesta. De serlo, hallar P y D que cumplan lo pedido. ¿Es única la respuesta dada?

Ejercicio 3. Analizar si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera, demostrarla. Si es falsa, dar un contraejemplo o una clara explicación.

3.1) Si $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ es tal que $A = A \cdot A^T$, entonces A es una matriz simétrica.

3.2) Sea $\{\vec{a}; \vec{b}\}$ un conjunto de vectores ortonormales de un espacio vectorial $\mathbf{V}$ de dimensión n.
Si $\vec{c} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, entonces $\|\vec{c}\|^2 = 1$.

3.3) Sean f y g dos transformaciones lineales de $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. Si $\vec{w} \in \mathbf{R}^3$ es autovector de f de autovalor asociado λ_1 y también es autovector de g de autovalor asociado λ_2, entonces $\vec{w}$ es autovector de la transformación $h = g \circ f$.

En caso de ser verdadera esta última proposición, indicar cuál es el autovalor asociado a $\vec{w}$ en la transformación h.

U.T.N. F.R.H. – Examen final de Álgebra y Geometría Analítica – Fecha: ....

Estudiante: .... Especialidad: ....

Docente con quien cursó la asignatura: .... Ciclo lectivo de cursado: ....

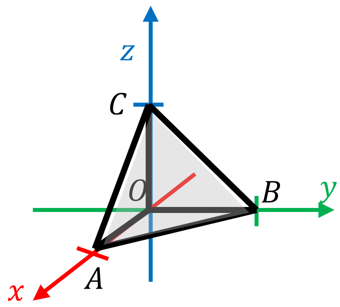
Ejercicio / Corrector	1			2				3		Calificación propuesta
	1	2	3i 3ii	1	2	3	4	1	2	

Calificación Final: ....

Ejercicio 1. Sea cuerpo tetraédrico con vértices en $O(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,2)$, que se muestra en la figura, sea M el punto medio entre A y B, y sean las dos transformaciones lineales de $\mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ correspondientes a:

f: rotación alrededor del eje z en sentido antihorario de $\pi/4$.

g: proyección ortogonal sobre el plano xz.



1.1) Hallar todas las rectas r contenidas en el plano xy que estén a una distancia $\sqrt{2}$ de la recta que contiene a la arista AB. Justificar la respuesta con un planteo o razonamiento adecuado.

1.2) Dar una base ortogonal de $\mathbf{R^3}$ tal que dos de sus vectores sean paralelos al plano que contiene a la cara ABC.

1.3) **i.** Al cuerpo se le aplica primero f. Indicar la ubicación de los transformados de cada vértice y del punto M. ¿Qué forma tiene el cuerpo transformado?

ii. Luego, en forma sucesiva, se le aplica la transformación g. ¿Qué forma tiene la imagen final del cuerpo transformado? ¿Cuál es la ubicación de los transformados finales de cada vértice y del punto M?

Ejercicio 2. De una transformación lineal $f: \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ se conoce que:

$$(c,0,0) \in Nu(f) \ \ \forall c \in \mathbf{R},$$
$$(1,1,0) \text{ es invariante frente a } f,$$
$$f(0,0,1) = (0,-d,d).$$

2.1) Escribir la matriz A de la transformación lineal en la base canónica y la forma explícita de f. Explicar el planteo usado.

2.2) Analizar para los distintos valores reales de d la dimensión de los subespacios núcleo e imagen de f. Justificar la respuesta.

2.3) Analizar si para $d = 1$, si la matriz es diagonalizable. Justificar la respuesta.

2.4) ¿Verdadero o Falso? Para $d = 3$, se verifica que:

$$Im(f) = \{(x,y,z)\mathbf{R^3} / \ x - y + z = 0\} \wedge [\, Im(f)]^{\perp} = \{(x,y,z)\mathbf{R^3} / \ x = y = z\}.$$

Ejercicio 3. Analizar si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera, demostrarla. Si es falsa, dar un contraejemplo o una clara explicación.

3.1) Sean $A, B, C, M \in \mathbf{R^{n\times n}}$ tales que A es antisimétrica, B es ortogonal y $M = B \cdot (A \cdot C \cdot B)^T$, entonces $M^T = -(A^T \cdot C)$.

3.2) $\forall \vec{a} \in \mathbf{R^3} - \{\vec{0}\}, \forall \vec{b} \in \mathbf{R^3} - \{\vec{0}\}$ tales que $\vec{a} \perp \vec{b}$, se verifica que:

$$proy_{\vec{b}}\left(-3\vec{a} + \vec{b} - \vec{a} \times 3\vec{b}\right) = \vec{b}.$$