U.T.N. F.R.H. – **Examen final de Álgebra y Geometría Analítica** - Julio 2014 – T2

Alumno: .... **Especialidad:** ....

Profesor con quien cursó:.................................... **Mes y año de firma TP:** ....

Ejercicio	1	2	3	4	Calificación
Corrector	**a b c**	**a b c**		**a b**	

Calificación Final:..

Ejercicio 1. Los puntos $B(a,0,0)$, $C(0,0,a)$, $D(0,a,0)$ con $a \in \mathbf{R}_{>0}$ son tres de los vértices de un paralelogramo.

a) Hallar las coordenadas del cuarto vértice *E*. Dar las tres soluciones posibles.

b) Si con los tres puntos hallados en el ítem anterior se traza un triángulo, ¿cuánto vale cociente entre el área de este triángulo y el área del triángulo cuyos vértices son *B*, *C* y *D*? Justificar la respuesta.

c) Sea f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la transformación lineal correspondiente a una rotación de $\pi/4$ en sentido antihorario alrededor del eje *z*. Escribir la matriz correspondiente a *f* y dar las coordenadas de los puntos en los que se transforman los vértices *B*, *C* y *D*.

Ejercicio 2. Sea $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbf{R}-\{0\}$ y $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Inducir una hipótesis para M^n para $n \in \mathbf{N}$.

b) Para a=0, hallar todas las matrices *X* antisimétricas de orden 3 tales que verifican la ecuación $M \cdot X - X \cdot M = P$.

c) Demostrar que el conjunto $S = \left\{ Y \in \mathbf{R}^{3\times r} \,/\, P \cdot Y = O \text{ siendo } O \in \mathbf{R}^{3\times r} \text{ matriz nula}, r \in \mathbf{N} \right\}$ es un subespacio vectorial.

Ejercicio 3. Sea f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ una transformación diagonalizable tal que $\vec{a} = (1,2)$ y $\vec{b}(3,1)$ son autovectores y que $f(5,-5) = (2,-1)$. Hallar los autovalores de *f*, su forma explícita y la matriz asociada en la base canónica.

Ejercicio 4. Analizar si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera, demostrarla mencionando todas las propiedades usadas; en caso de ser falsa dar un contraejemplo.

a) Si los vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3$ satisfacen que $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, entonces $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$

b) Sea $S \subset \mathbf{R}^3$ el subespacio generado por $\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\}$, vectores no nulos y no paralelos, donde $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, entonces la dimensión del subespacio complemento ortogonal de *S*, $S^\perp$, es 2.