U.T.N. F.R.H. – **Examen final de Álgebra y Geometría Analítica – 19 Febrero 2015**

Alumno: .... **Especialidad:** ....

Profesor con quien cursó:.................................. **Mes y año de firma TP:** ....

Ejercicio / Corrector	1 (a b)	2 (a b)	3 (a b)	4 (a b)	5	Calificación

Calificación Final:...

Ejercicio 1. Sean el plano $\pi \equiv 2x - z - 3 = 0$ y la recta $r_1 \equiv (0,2,1) + \lambda(1,1,-2)\ \forall\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Encontrar una recta r_2 que cumpla simultáneamente que $r_2 \subset \pi$ y $r_2 \perp r_1$. ¿Es única?

b) Hallar un subespacio de dimensión 1 que esté a dos unidades de distancia de r_1.

Ejercicio 2. En los siguientes ítems, el paréntesis indica el producto mixto entre los tres vectores encerrados por él.

a) Demostrar la identidad: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\ \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3, \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

b) Justificar la siguiente proposición:

Si $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ son tres vectores linealmente independientes de $\mathbf{R}^3$, entonces $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \neq 0$. Mencionar las propiedades o resultados conocidos utilizados.

Ejercicio 3. Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ y sea el subespacio $S \subset \mathbf{R}^{2\times 2}$ formado por el conjunto de todas las matrices conmutables con M.

a) Demostrar que la dimensión de S es independiente del valor de a.

b) Para $a = 0$, hallar $S^{\perp}$. Indicar su dimensión y dar una base ortonormal de $S^{\perp}$.

Ejercicio 4

$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz asociada a una transformación lineal f.

a) Hallar $Nu(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.

b) Determinar si M es diagonalizable. Justificar la respuesta en forma adecuada.

Ejercicio 5

Sea $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y, -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, z\right),$$

que representa la proyección ortogonal de cada vector del espacio en un plano $\pi \in \mathbf{R}^3$. Hallar la forma explícita o general de plano π. Justificar claramente la respuesta.