U.T.N. F.R.H. - **Examen final de Algebra y Geometría Analítica – 5/10/2012**

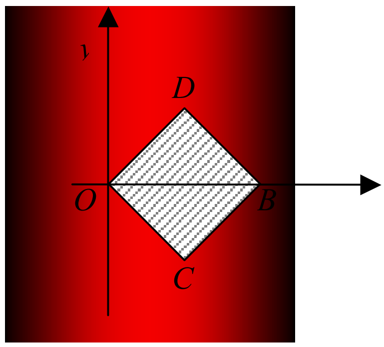
Alumno: .... **Especialidad:** ....

Profesor con quien cursó la asignatura:..................................**Año de firma TP:** ....

Ejercicio **Corrector**	**1** a b c d e	**2**	**3** a b	**4** a b	**Calificación**

Calificación Final:...

Ejercicio 1. Al cuadrado *OBCD* de lado de longitud $\sqrt{2}$ se le adosa un sistema de coordenadas cartesiano ortogonal como indica la figura. Se aplica sobre él la transformación lineal f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ cuya matriz asociada es $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.



a) Graficar la imagen que resulta de transformar el cuadrado mediante f (no olvidar incluir las escalas correspondientes a los ejes).

b) Hallar el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{OB}$ y $f\left(\overrightarrow{OB}\right)$.

c) Encontrar una matriz ortogonal Q y una matriz diagonal D tales que

$$A = QDQ^{-1};$$

esto es, hallar una matriz diagonal semejante con A con matriz de pasaje Q ortogonal.

d) Demostrar que si se cumple la relación de semejanza entre A y D expresada en el ítem anterior, también se cumple una relación de semejanza equivalente entre A^n y D^n.

e) Utilizar los resultados anteriores para calcular A^n con $n \in \mathbf{N}$.

Ejercicio 2. Calcular, usando propiedades, el valor del determinante de la matriz A, donde

$$A = \left(\left(a_{i,j}\right)\right) \in \mathbf{R}^{4\times 4} \ \wedge \ a_{i,j} = i^{j-1}.$$

Ejercicio 3. Sean los planos $\pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $\pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. En los siguientes casos, deducir a partir de la información dada si π_1 y π_2 se intersecan y, en caso afirmativo, que tipo de lugar geométrico representa esa intersección. Justificar cada respuesta.

Caso **a**. El rango de la matriz $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ es 2.

Caso **b**. El rango de la matriz $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{pmatrix}$ es 1.

Ejercicio 4. Para cada una de las siguientes proposiciones y justificando la respuesta, decir si es verdadera o falsa: En caso de ser falsa, dar un contraejemplo.

a) Los vectores de $\mathbf{R}^3$ $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son no nulos y no paralelos, entonces $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w} = \vec{u}\times\vec{v} - \vec{v}\times\vec{u}\}$ es un conjunto linealmente independiente.

b) Sea f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ una transformación lineal tal que $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son autovectores con el mismo autovalor λ, entonces el conjunto $\{\vec{v}_1;\vec{v}_2\}$ es linealmente dependiente.