U.T.N. F.R.H. - **Examen final de Álgebra y Geometría Analítica** – 09-Diciembre-2010

Alumno: .... **Especialidad:** ....

Profesor con quien cursó la asignatura:...................... **Año y mes de firma TP:** ....

Ejercicio Corrector	1 a b c d	2 a b c	3 a b c	4	Calificación

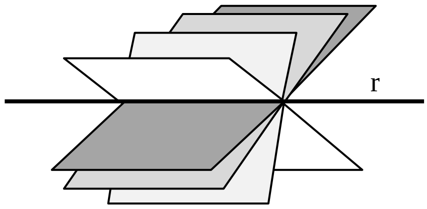
Calificación Final:...

Ejercicio 1:

La recta $r: \begin{cases} \pi: 2x+3y-z-4=0 \\ \beta: x-2y+z+1=0 \end{cases}$ es la intersección de los planos π y β. El conjunto de todos los planos que contienen a r se llama *haz de planos de arista r*, y su expresión analítica es:

$$a\,(2x+3y-z-4)+\,b\,(x-2y+z+1)=0\,,$$

siendo $a,b\ \in$ **R.**



Para cada par de valores reales de a y b (salvo para $a = 0$ y $b = 0$) se obtiene la ecuación de un plano del haz.

a) Hallar el plano del haz definido, que pasa por el origen de coordenadas.

b) Cuando $b = a$ con $a \neq 0$, ¿cuál es la distancia entre el plano que se obtiene y el origen de coordenadas?

c) ¿Para qué valor real de k, uno de los planos del haz es perpendicular a la recta t, siendo t: $\frac{x}{3}=\frac{y-2}{5}=\frac{z}{k}$? ¿Cuál es ese plano del haz? Dar su ecuación general.

d) Hallar dos puntos que pertenezcan a todos los planos del haz. Indicar sus coordenadas respectivas.

Ejercicio 2: Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix}$ se pide:

a) ¿Para qué valores reales de a, la matriz tiene inversa?

b) ¿Para qué valores reales de a, el sistema $A \cdot X = \begin{pmatrix} -4 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$ tiene solución?

c) Para $a = 0$, encontrar una base para el espacio columna de A y una base y dimensión para el espacio nulo de A. Los subespacios vectoriales Col(A) y Nul(A) ¿son ortogonales?

NOTA: El espacio Nul(A) es el espacio generado por todos los vectores solución de la ecuación matricial A.**X**=**0**, y el espacio Col(A) es el espacio generado por los vectores columnas de A.

Ejercicio 3: Sea el subespacio vectorial $S = \{\,(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 / 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$,

y sea la transformación lineal $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tal que: $\begin{cases} \forall \vec{v} \in S: f(\vec{v}) = 3.\vec{v} \\ Nu(f) = S^{\perp} \end{cases}$.

Sin necesidad de hallar la forma explícita de f o su matriz asociada, se pide:

a) Dar la interpretación geométrica de los subespacios núcleo e imagen de f. Detallar características principales, dimensión y una base de cada uno de ellos.

b) Obtener los autovalores y autovectores de f.

c) Sea $g = f \circ f$. ¿Cuál es la acción que ejerce g sobre $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$? Explicar claramente. ¿Cuáles son los autovalores de g y sus autovectores asociados?

Ejercicio 4: Analizar el valor de verdad de la siguiente proposición, demostrar la proposición en caso de ser verdadera y dar un contraejemplo en caso de que sea falsa:

Si T: **V** → **W** es una transformación lineal y $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ es una base de **V**, entonces:

$$\{\ T(\vec{u}), T(\vec{v}), T(\vec{w})\ \}\text{ es una base de la imagen de } T.$$