U.T.N. F.R.H.Examen final de Álgebra y Geometría Analítica- 17 de mayo de 2018

Alumno: ……………………………………………………… Especialidad: ……………………

Profesor con quien cursó la asignatura: ……………………… Año de cursado: ....

Ejercicio Corrector	1 a b c d e	2 a b c	3 a b c	Calificación propuesta

Calificación Final:..

Ejercicio 1. Un paralelepípedo P tiene su base apoyada en el plano π y una de sus aristas en la recta *r*. El volumen del paralelepípedo es cinco. Tres de los vértices de la base del paralelepípedo son los puntos $O(0,0,0)$, $A(2,-1,1)$ y $B(1,2,1)$. Fuera de dicha base otro vértice de P, *C*, pertenece a la recta $r \equiv \begin{cases} x-3y=0 \\ y-z=0 \end{cases}$.

Se pide:

- **a)** Encontrar la ecuación general del plano π que contiene a los puntos *O*, *A* y *B*.
- **b)** Calcular la altura del paralelepípedo.
- **c)** Dar las coordenadas del punto *C* que cumple con las condiciones enunciadas. Expresar todas las respuestas posibles.
- **d)** Verificar que el conjunto de puntos de la recta *r*, constituyen un subespacio *S* de $\mathbf{R}^3$. Indicar una base y la dimensión de *S* y definir el complemento ortogonal $S^{\perp}$.
- **e)** Sea $f:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ una transformación lineal tal que $f(\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OA}$, $f(\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OB}$ y $f(\overrightarrow{OC})=-\overrightarrow{OC}+2\,proy_{\pi}\overrightarrow{OC}$. Interpretar geométricamente y explicar el efecto de dicha transformación sobre el paralelepípedo P.

Ejercicio 2. Sea $B=\{\vec{a};\vec{b}\}$ una base ortonormal de un subespacio *S* de $\mathbf{R}^3$ y $\vec{c}\in S^{\perp}$. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Fundamentar adecuadamente cada respuesta.

- **a)** La recta $r:\vec{x}=\lambda\vec{c}\ \ \forall\lambda\in\mathbf{R}$ y el plano $\pi:\vec{x}=\alpha\vec{b}+\beta\vec{a}\ \ \forall\alpha\in\mathbf{R},\forall\beta\in\mathbf{R}$, se cortan en un solo punto.
- **b)** La matriz $A\in\mathbf{R}^{3\times 3}$ cuyas filas son las componentes de los vectores $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ es inversible.
- **c)** El conjunto $C=\{\vec{v}=\vec{a},\vec{u}=\vec{a}+\vec{b},\vec{w}=proy_S\vec{c}\}$ es linealmente independiente.

Ejercicio 3. Sea $A=\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$.

- **a)** Hallar los valores de *a* para los cuales el sistema *A·X*= *O* es un sistema compatible determinado.

Si *A* es la matriz asociada a la transformación lineal $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$, responder:

- **b)** Si *a* = 0 calcular los autovalores y los autovectores de *A*.
- **c)** ¿*A* es diagonalizable para cualquier valor real de *a?* Justificar la respuesta.

U.T.N. F.R.H. Examen final de Álgebra y Geometría Analítica 26 de Julio de 2018

Alumno: ……………………………………………………………………………………. Especialidad: ……………………

Profesor con quien cursó la asignatura: ……………………………………. Año de cursado: ....

Ejercicio / Corrector	1 (a b)	2 (a b c)	3	4 (a b c d)	Calificación propuesta

Calificación Final:...

Ejercicio 1.

Sean las rectas $l_1:(x,y,z)=(2,3,3)+\lambda(1,1,0)\ \ \forall\lambda\in\mathbf{R}$ y $l_2:(x,y,z)=(2,0,6)+\mu(-1,0,\alpha)\ \ \forall\mu\in\mathbf{R}$.

- **a)** Calcular, si existe, $\alpha\in\mathbf{R}$ para que l_1 y l_2 pertenezcan a un plano y en tal caso, hallar la ecuación de dicho plano.
- **b)** Para $\alpha=2$, ¿es posible encontrar un vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ con $P_1\in l_1$ y $P_2\in l_2$ tal que $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=1$? Justificar en forma clara la respuesta. En caso de ser posible hallarlo.

Ejercicio 2.

Sea $S=\left\{X\in\mathbf{R}^{\mathbf{nxn}}\ /\ X^T\cdot A=-X\cdot A\right\}$ con $A\in\mathbf{R}^{\mathbf{nxn}}$.

- **a)** Probar que S es un subespacio de $\mathbf{R}^{\mathbf{nxn}}$.
- **b)** Probar que si A es invertible y $X\in S$ entonces X es antisimétrica de orden *n*.
- **c)** Para $n=2$ y $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, hallar una base y dimensión de S.

Ejercicio 3. Sea la transformación lineal $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ con matriz asociada $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-2&k\\k&-1&0\end{pmatrix}$. Obtener *k* para que el subespacio $\mathrm{Nu}(f)\cap\mathrm{Im}(f)$ no contenga únicamente al vector nulo.

Ejercicio 4. Responder si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Justificar adecuadamente cada respuesta.

- **a)** Un rombo con centro de simetría en el origen tiene sus diagonales paralelas a los vectores libres $\vec{d}_1=2a\hat{i}$ y $\vec{d}_2=2a\hat{j}$ con $a\in\mathbf{R}_{>0}$.El área de este polígono es $2a^2$.
- **b)** Sea $B_1=\{\vec{u}_1;\vec{u}_2\}\subset\mathbf{V}$ una base de un subespacio $S\subset\mathbf{V}$ constituida por vectores de norma 1 no ortogonales. Si $\vec{w}=\vec{u}_2-\langle\vec{u}_2;\vec{u}_1\rangle\vec{u}_1$ entonces $B_2=\{\vec{u}_1;\vec{w}\}$ es una base ortogonal de S.
- **c)** Sea $f:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^4$ una transformación lineal cuya matriz asociada es no invertible, entonces la $\dim\left[\mathrm{Nu}(f)\right]=0$.
- **d)** Sea una transformación lineal $f:\mathbf{R}^5\to\mathbf{R}^4$, entonces *f* puede tener un autovalor nulo.

U.T.N. F.R.H. – Examen final de Álgebra y Geometría Analítica – Diciembre 2018 – T1

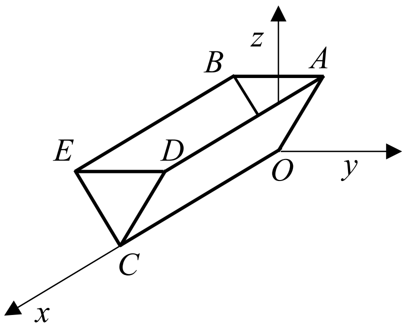
Alumno: ……………………………………………………………… Especialidad: …………

Profesor con quien cursó la asignatura: ……………………………. Año de cursado: ....

Ejercicio / Corrector	1 a bi bii biii	2 a b	3 a b	4 a b	Calificación propuesta

Calificación Final: ………………………

Ejercicio 1. Un bebedero para ganado (abrevadero) es de corte triangular y está ubicado como se indica en la figura. La arista OC está apoyada en el piso y mide $4\,m$. La cara OAB es triángulo equilátero de $1\,m$ de lado, al igual que la cara paralela CDE.



a) Si está lleno hasta la mitad de altura, ¿qué porcentaje del volumen total del bebedero está ocupado por el líquido? Explicar el razonamiento.

b) Se produce un balanceo (rotación alrededor del eje longitudinal x) de $30°$ en sentido antihorario.

i. Dar la forma explícita y matricial de la transformación lineal que modela este movimiento.

ii. Hallar la ecuación general del plano π que contiene a la cara $ABED$ antes y después del balanceo.

iii. Dar la ecuación de la recta r que contiene a la arista DC antes y después del balanceo.

Ejercicio 2.

a) Sean las matrices de orden n definidas por $A=\left(\left(a_{i,j}\right)\right), a_{i,j}=i-j$; $B=\left(\left(b_{i,j}\right)\right), b_{i,j}=i\cdot j$; $C=\left(\left(c_{i,j}\right)\right), c_{i,j}=\delta_{i,j}-\delta_{j,i}$ donde $\delta_{i,j}$ es la Delta de Kronecker. Analizar si cada una de ellas es simétrica, antisimétrica o ni lo uno ni lo otro. Demostrarlo.

b) Demostrar que si $P\in\mathbf{R}^{3\times1}$ y $Q\in\mathbf{R}^{1\times3}$ entonces el rango de la matriz $T=P\cdot Q$ es a lo sumo 1.

Ejercicio 3. Analizar si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera, demostrarla. Caso contrario, dar un contraejemplo o justificar en forma clara.

a) Sea A la matriz asociada a una transformación lineal $f:\mathbf{R^n}\to\mathbf{R^n}$ y sea λ una autovalor de f. Un vector $\vec{x}\in\mathbf{R^n}$ es autovector de f asociado a λ si $\vec{x}\neq\vec{0}$ y $\vec{x}\in Nul\left(A-\lambda I\right)$ donde I es la matriz identidad de orden n y $Nul()$ es la nomenclatura para espacio nulo de ().

b) Sea la transformación lineal $f:\mathbf{R^n}\to\mathbf{R^n}$ y sean λ_1 y λ_2 dos autovalores de f, entonces la suma $\lambda_1+\lambda_2$ también es autovalor de f.

Ejercicio 4. Sea $A=\{\hat{v}_1;\hat{v}_2\}\subset\mathbf{R}^3$ un conjunto ortonormal de vectores y sea $\hat{v}_3\in\mathbf{R}^3$ un versor que pertenece al subespacio complemento ortogonal de S, $S^{\perp}$. Sea $\vec{u}=2(\hat{v}_1+\hat{v}_2)-3(\hat{v}_1-\hat{v}_2)+5\hat{v}_3$.

a) Hallar la proyección ortogonal del vector $\vec{u}$ sobre el subespacio S.

b) Si se grafica el vector $\vec{u}$ con el punto origen coincidiendo con el origen de coordenadas, hallar la distancia del punto extremo final de $\vec{u}$ al subespacio S.

U.T.N. F.R.H.– Examen final de Álgebra y Geometría Analítica – Diciembre 2018 – T2

Alumno: ……………………………………………………………………………….. Especialidad: ……………………

Profesor con quien cursó la asignatura: ……………………………………….. Año de cursado:..................

Ejercicio	1	2	3	4	Calificación
Corrector	a b c	a b c d	a b c	a b	propuesta

Calificación Final:……………………..

<u>Ejercicio 1</u>: Sean las transformaciones lineales $g:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 \,/\, g(\vec{x}) = \hat{k} \times \vec{x}$ y $h:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R} \,/\, h(\vec{x}) = \langle \hat{k};\vec{x} \rangle$.

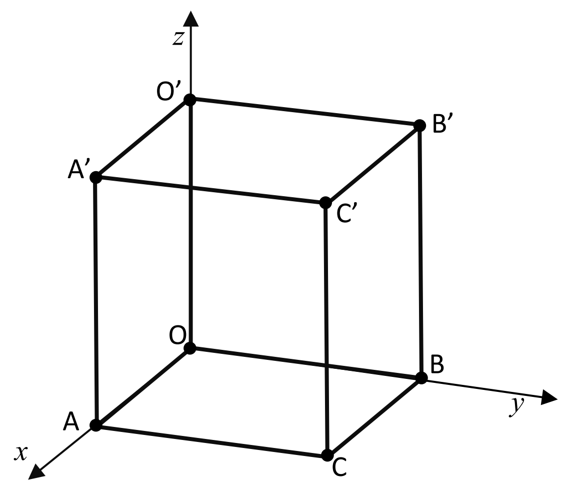
a) Verificar que el subespacio $Nu(g)$ es el complemento ortogonal del subespacio $Nu(h)$.

b) Encontrar la matriz A asociada a la transformación g según la base canónica, expresar A^2 y encontrar los autovalores y los autovectores de A^2.

c) Expresar los subespacios $Nu(h)$ e $Im(h)$. ¿ $h(\vec{x})$ es inyectiva? ¿ $h(\vec{x})$ es sobreyectiva? Justificar la respuesta.

<u>Ejercicio 2</u>: Se construye el modelo de un tanque con forma de prisma recto de base cuadrada OACB y altura h. La diagonal OC de la base tiene extremos en los puntos O(0,0,0) y C(2,2,0), los lados están contenidos en los ejes x e y (ver esquema). Si sobre el paralelepípedo se le aplica una fuerza F paralela a una de las caras mientras que la otra cara permanece fija, se presenta una deformación denominada cizallamiento. Dicha deformación viene dada por la transformación lineal f asociada a la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



a) Verificar que si bien el tanque cambia de forma, el volumen del mismo no varía al aplicarle f.

b) Verificar que la cara rectangular OAO'A' al aplicarle f se transforma en un paralelogramo.

c) Calcular el ángulo entre la recta definida por los puntos AA' y la recta definida por los puntos imágenes de A y A' al aplicarles f.

d) Dar la ecuación del plano que contiene a la cara CBC'B' antes y después de aplicar f.

<u>Ejercicio 3</u>: Analizar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar cada respuesta.

a) Si $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ es simétrica y ortogonal entonces A es involutiva.

b) Sea $A \cdot X = B$ la expresión matricial de un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas donde $B \neq O$ y sean $X_1 \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}\times\mathbf{1}}$ y $X_2 \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}\times\mathbf{1}}$ soluciones particulares del sistema. Entonces $2X_1 - X_2$ es también solución del sistema.

c) Sea $A \cdot X = B$ la expresión matricial de un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas donde $B \neq O$. Si $A \in \mathbf{R}^{7\times 4}$ y tanto el rango de A como el rango de $A' = (A|B)$ son los mayores posibles, entonces es imposible que el sistema sea compatible determinado.

<u>Ejercicio 4:</u> El polinomio característico de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ es $P(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-1)$.

a) Encontrar los subespacios característicos de A.

b) Si la matriz es diagonalizable, expresar la matriz *P* de pasaje y usar este dato para calcular A^{50}.

U.T.N. F.R.H.– Examen final de Álgebra y Geometría Analítica – Diciembre 2018 – T3

Alumno: ……………………………………………………………… Especialidad: …………………….

Profesor con quien cursó la asignatura: ………………………………. Año de cursado:..................

Ejercicio / Corrector	1 a b c d	2	3 a b c	4 a b c	Calificación propuesta

Calificación Final:………………………

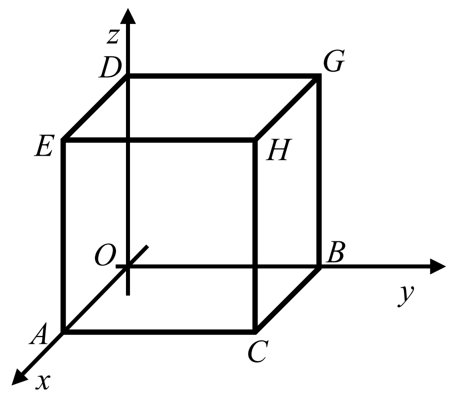
Ejercicio 1. Se tiene un cubo macizo de lado 2. La base *OACB* está contenida en el plano *xy*; el vértice *O* coincide con el origen de coordenadas; las aristas *OA* y *OB* están contenidos en los ejes *x* e *y*, respectivamente (ver esquema). El cubo sufre un balanceo (rotación alrededor del eje longitudinal *x*) de ángulo α en sentido antihorario. Las longitudes se dan en cm.

a) Dar la forma explícita y matricial de la transformación lineal $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ que modela este balanceo.

b) Luego de la rotación el paralelogramo *OAGH* queda contenido en el plano *xz*. ¿Cuánto vale α? Dar la respuesta de menor valor absoluto.

c) Dar la ecuación general del plano que contiene a *OAGH* antes y después de la rotación.

d) Luego de la rotación, los vértices *D*, *E*, *C* y *B* se proyectan ortogonalmente sobre el plano *xy*. ¿Cuál es el área del rectángulo que definen dichas proyecciones?



Ejercicio 2. Demostrar que si la matriz ortogonal $A \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ es triangular superior, entonces es diagonal.

Ejercicio 3. Analizar si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera, demostrarla. Caso contrario, dar un contraejemplo o justificar en forma clara.

a) Sea la transformación lineal $f: \mathbf{R}^{n\times n} \to \mathbf{R}^{n\times n}$ tal que a cada matriz $M \in \mathbf{R}^{n\times n}$ le hace corresponder su traspuesta, $f(M) = M^T$. Cualquier matriz antisimétrica de orden *n* es autovector de *f*.

b) Los únicos subespacios no triviales de $\mathbf{R}^3$ son rectas que pasan por el origen y planos que pasan por el origen.

c) Sea $A \cdot X = B$ la expresión matricial de un sistema lineal de *m* ecuaciones con *n* incógnitas donde $B \neq O$ que resulta compatible indeterminado entonces su conjunto solución es un subespacio de dimensión mayor o igual a 1.

Ejercicio 4. Sean las transformaciones lineales $g: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 \,/\, g(\vec{x}) = \hat{\imath} \times \vec{x}$ y $h: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R} \,/\, h(\vec{x}) = \hat{\jmath} \times \vec{x}$.

a) Encontrar las formas explícitas de $g(\vec{x})$, $h(\vec{x})$ y $t(\vec{x}) = (h \circ g)(\vec{x})$. Dar sus matrices asociadas en la base canónica: A_g, A_h y A_t.

b) Hallar los autovalores y los subespacios de autovectores asociados para $g(\vec{x})$. ¿Es A_g diagonalizable?

c) Verificar que el subespacio $Nu(g)$ es el complemento ortogonal del subespacio $Im(g)$.

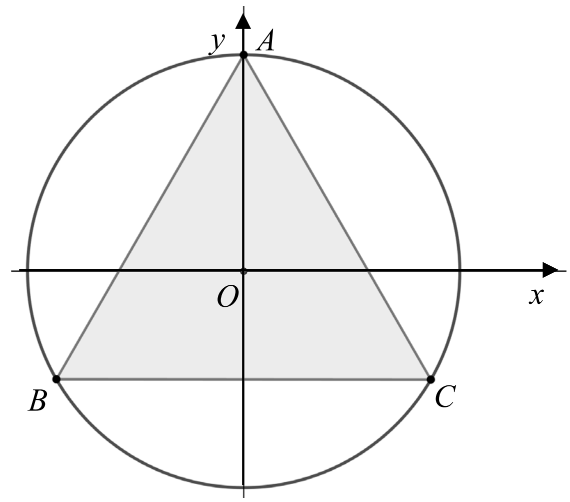
Examen final de Álgebra y Geometría Analítica UTN – FRH – 21/02/2019

Alumno: .... **Especialidad:** ....

Profesor con quien cursó: .... **Año de Cursado:** ....

Corrector	1		2				3			Calificación Propuesta
	a	b	a	b	c	d	a	b	c	

Calificación ....



1) En una circunferencia de diámetro 10 cm y centro en el origen de coordenadas *O*, se inscribe un triángulo equilátero *ABC* como indica en forma esquemática la figura. Hallar, justificando cada respuesta con un planteo y/o cálculo adecuado:

a) La distancia entre *O* y el lado *AC*.

b) Se unen los puntos medios de los lados de *ABC* formando un nuevo triángulo *MNQ*. ¿Cuánto vale el cociente entre el área de *ABC* y el área de *MNQ*?

2) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Probar que $A^3+I=O$. Utilizar esta igualdad para obtener A^{10}. Indicar los pasos que justifican esta conclusión.

b) Si A es la matriz asociada a la transformación lineal f, hallar la forma explícita de la transformación $g=f\circ f\circ f$. ¿Es diagonalizable la matriz asociada a g? Justificar.

c) Si $\vec{x}\in\mathbf{R}^3$ es autovector de f con autovalor asociado λ, ¿es $\vec{x}$ autovector de $g=f\circ f\circ f$? Justificar. En caso afirmativo indicar con cuál autovalor asociado?
Nota: no hallar $\vec{x}$ y/o λ.

d) Sabiendo que $B\in\mathbf{R}^{3\times 3}\,/\,B\cdot B^T=I$, calcular $k\in\mathbf{R}$ para que el $\det(kA^{-1}B^2)=-8$.

3) Sea la transformación lineal $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3\,/\,f(x,y,z)=(ax+by+z,\,y+cz,\,2x)$ con $a,b,c\in\mathbf{R}$.

a) ¿Qué relación deben cumplir $a,b,c\in\mathbf{R}$ para que la dimensión del $Nu(f)$ sea por lo menos 1? Justificar la respuesta con un desarrollo adecuado. Si dicha relación se verifica, dar la dimensión y una base ortonormal para $Nu(f)$ y para el subespacio $\left[Nu(f)\right]^{\perp}$.

b) Calcular los valores reales de a, b, c sabiendo que, simultáneamente, $(0,1,1)\in Nu(f)$ y $f(1,1,1)=(0,0,2)$.

c) Para $a=0, b=1, c=1$, calcular los valores de $h\in\mathbf{R}$ para que:

$$C=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\,/\,f(x,y,z)=(1,h,1)\right\}=\varnothing.$$

U.T.N. F.R.H. – **Examen final de Álgebra y Geometría Analítica** - Febrero 2019

Alumno: .... **Especialidad:** ....

Profesor con quien cursó:... **Año de cursada:** ....

	1			2			3		4			Calificación final
Corrector	a	b	c	a	b	c	a	b	a	b	c	

Calificación Final:..

Ejercicio 1: Dados en $\mathbf{R}^3$ los puntos $A(1, 2, 0)$, $B(0, -1, 1)$, $C(-1, 1, 0)$ y la recta r que pasa por el punto C y es perpendicular al plano π de ecuación $x + z = 0$.

a) Determinar la ecuación dela recta r y encontrar un punto P de la misma que forme con los puntos A y B un triángulo rectángulo en P.

b) Demostrar que el conjunto de puntos del plano π conforman un subespacio de $\mathbf{R}^3$. Proponer una base ortonormal para dicho subespacio.

c) Sea $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ y $\vec{p} = proy_\pi \overrightarrow{OA}$ demostrar que la distancia $d(\pi, A) = \|\vec{v} - \vec{p}\|$.

Ejercicio 2: Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ triangular superior tal que $\begin{cases} a - b + d = 0 \\ a - d = 0 \\ 2a - b + d = 5 \end{cases}$.

a) Determinar una expresión general para A^n con $n \in \mathbf{N}$.

b) Calcular los autovalores y los autovectores de A y responder si es diagonalizable.

c) Determinar si la transformación lineal cuya matriz en las bases canónicas es $A - A^T$ es isomorfismo (biyectiva).

Ejercicio 3: Sea $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ una transformación lineal que tiene un autovector $\vec{u}$ asociado al autovalor 0 y que $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ son autovectores linealmente independientes asociados al autovalor real k no nulo.

a) Determinar las dimensiones del núcleo y de la imagen de f. Justificar la respuesta.

b) Demostrar que $\alpha \cdot \overrightarrow{v_1} + \beta \cdot \overrightarrow{v_2}$ también es autovector de f. Indicar su autovalor asociado.

Ejercicio 4: Sean f y g aplicaciones en $\mathbf{R}^3$ tales que f es una simetría respecto del plano xz y g una rotación en sentido antihorario alrededor del eje x en un ángulo $\theta = \pi/2$. Sean F y G las matrices asociadas respectivamente a f y a g según la base canónica.

a) Sea $h = g \circ f$. Hallar la matriz asociada a la transformación h según la base canónica.

b) ¿Existe un vector $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ tal que $h(\vec{x}) = \vec{x}$? En caso afirmativo definir $\vec{x}$.

c) Analizar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar claramente la respuesta.

i) $(f \circ f)(\vec{x}) = \vec{x}, \forall \vec{x} \in \mathbf{R}^3$.

ii) $(g \circ g)(\vec{x}) = f(\vec{x}), \forall \vec{x} \in \mathbf{R}^3$.

iii) No existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $G^n = I$ donde I es la matriz identidad de orden 3.

Examen final de Álgebra y Geometría Analítica UTN – FRH – Marzo 2019

Alumno: .... **Especialidad:** ....

Profesor con quien cursó: .... **Año de Cursado:** ....

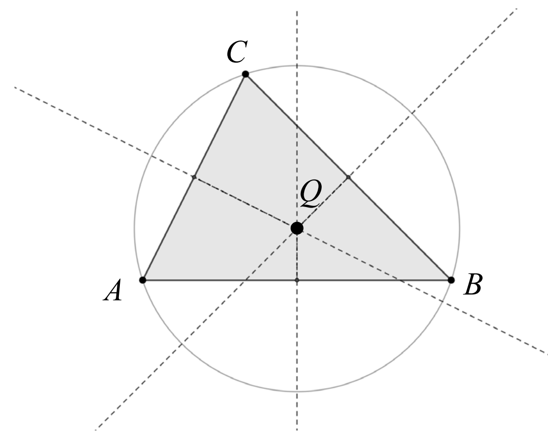
Corrector	1		2	3		4			Calificación Propuesta
	a	b		a	b	a	b	c	

Calificación ....

Ejercicio 1. Sean el triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(2,4)$.

a) Encontrar el centro Q y la medida del radio r de la circunferencia que lo circunscribe (ver figura).
Nota: las rectas perpendiculares trazadas en el punto medio de cada lado se cortan en un punto equidistante de los tres vértices del triángulo.

b) Dar la forma explícita y la forma matricial de la transformación lineal $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ correspondiente a la rotación de menor ángulo en sentido antihorario que hay que aplicar para que el lado AC quede vertical.



Ejercicio 2. Sea el sistema de ecuaciones $A \cdot X = B$ con $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{n \times m}}$ y $X, B \in \mathbf{R}^{\mathbf{m \times 1}}$. Sea X_0 una solución del sistema dado. Demostrar que si $X_0 + \lambda U$ es también solución del sistema $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, entonces U es solución del sistema homogéneo $A \cdot X = O$ con $O \in \mathbf{R}^{\mathbf{m \times 1}}$. Justificar los pasos de la demostración.

Ejercicio 3. Sea $\vec{v} = (1,-2,2)$ y sea $\vec{u} \in \mathbf{R}^3, \vec{u} \neq \vec{0}$.

a) Justificar si la información dada es suficiente o no lo es para calcular $\left\| proy_{\vec{u}}\vec{v} \right\|^2 + \left\| \vec{v} - proy_{\vec{u}}\vec{v} \right\|^2$. En caso afirmativo, hacer dicho cálculo.

b) Sea la transformación lineal $f(\vec{x}) = proy_{\vec{u}}\vec{x}$ con $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ y sea S el subespacio generado por $\vec{u}$. Analizar si es verdadera o falsa la afirmación que $S^{\perp} \equiv Nu(f)$. Justificar la respuesta.

Ejercicio 4. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ donde b y c son números reales con $b \neq c$.

a) Verificar que A no es diagonalizable. Justificar la conclusión.

b) Hallar expresión general para A^n con $n \in \mathbf{N}$.

c) Sea $f:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz asociada es A cuando $b=1$ y $c=-1$. Se aplica f a los elementos de la figura plana correspondiente a un cuadrado de lado 1 ubicado vertical como indica la figura. ¿Cómo se deforma la figura al transformarla? Graficar. Demostrar que el área de la figura antes y después de transformarla es la misma.