Examen Final de Algebra y Geometría Analítica – UTN FRH Mayo 2017

Apellido, Nombre .... Especialidad ....

Año de cursada: .... Profesor con quien cursó ....

Corrector	1	2		3			4					Calificación
		a	b	a	b	c	a	b	c	d	e	Propuesta

Calificación Final: ....

Ejercicio 1:
Sean las rectas r_1: (x; y; z) = (1 + t; 2 – t; –1 + 3t) , $\forall t \in \mathbf{R}$ y r_2: (x; y; z) = (0; 3λ; λ), $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ y sea Π el plano que cumple con las siguientes condiciones: $r_2 \subset \Pi \wedge r_1 \parallel \Pi$.
Obtener la proyección de r_1 sobre Π.

Ejercicio 2: Dadas $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbf{R}^{n\times n}$ tales que $2A^2 - 3B\cdot A = I_n$ donde I_n es la matriz identidad de orden n.

a) Demostrar que A es invertible, es decir $\exists A^{-1}$.

b) Deducir el valor de los escalares α y β que satisfagan la igualdad $A^{-1} = \alpha A + \beta B$.

Ejercicio 3: Indicar si son **V** o **F** cada una de las siguientes proposiciones. **Justificar cada respuesta.**

a) Si A es una matriz cuadrada de orden n y $\lambda = 5$ es uno de sus autovalores, entonces el sistema de ecuaciones lineales con $X \in \mathbf{R}^{n\times 1}$ definido por $(A - 5\, I_n) \cdot X = O$ es SCD.

b) Dada la matriz $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ tal que el $\det(A) = 0$, entonces A no es diagonizable.

c) Sean $\{\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3; \vec{u}_4 = \vec{u}_1 - 3\vec{u}_2\}$ vectores no nulos de $\mathbf{R}^3$ y distintos entre sí. Entonces se verifica que: $\{\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3 ; \vec{u}_4\}$ son linealmente dependientes.

Ejercicio 4: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, hallar:

a) La transformación lineal f cuya matriz asociada en la base canónica es A.

b) El Núcleo y la Imagen de f. Una base y dimensión para cada uno de ellos e interpretar geométricamente.

c) Los autovalores de A, y sus respectivos espacios característicos interpretándolos geométricamente.

d) La matriz que diagonalice ortogonalmente a la matriz A.

e) Las coordenadas del vector $\vec{v}$ = (1, 1, 1) en la base ortonormal que se obtiene al diagonalizar ortogonalmente a A.

U.T.N. F.R.H. – **Examen final de Álgebra y Geometría Analítica** - Julio 2017

Alumno: .... **Especialidad:** ....

Profesor con quien cursó:.. **Año de cursado:** ....

	1			2			3	4					Calificación propuesta
Corrector	a	b	c	a	b	c		a	b	c	d	e	

Calificación Final ………………………

1) Dados en $\mathbf{R}^3$ la recta r: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$ y el plano π: $2y + z = 0$.

- **a)** Determinar la posición relativa entre la recta r y el plano π justificando la respuesta.
- **b)** Hallar una recta s incluida en el plano π que sea ortogonal a la recta r, expresar su ecuación vectorial paramétrica. ¿Es única la recta s? Explicar porque sí o porque no.
- **c)** Sea α el plano que equidista de las rectas r y s. ¿Se puede dar su ecuación general sólo a partir de los datos r y π, esto es sin tener cuenta la ecuación dada como respuesta en el ítem **b)**? Justificar la respuesta. En caso afirmativo, hallar la ecuación explícita de α.

2) Se sabe que X_1 y X_2 son soluciones distintas del sistema inhomogéneo $A \cdot X = B$ (con $B \in \mathbf{R}^{\mathbf{m}\times\mathbf{1}}$ no nula, $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{m}\times\mathbf{m}}$, $X \in \mathbf{R}^{\mathbf{m}\times\mathbf{1}}$) y X_3 es solución del sistema homogéneo asociado, $A{\cdot}X = O$. Indicar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa justificando la respuesta.

- **a)** $S = \{X \in \mathbf{R}^{\mathbf{m}\times\mathbf{1}} / A \cdot X = B\}$ es subespacio de $\mathbf{R}^{\mathbf{m}\times\mathbf{1}}$.
- **b)** $Y = \alpha X_3 + \beta(X_1 - X_2)$ es solución del sistema homogéneo $\forall\alpha, \forall\beta \in \mathbf{R}$.
- **c)** A es inversible.

3) Sean $S = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 / x_1 + x_2 = 0 \text{ y } x_1 - x_3 = 0\}$ y T el subespacio generado por el conjunto de vectores $\{(1, a, 1); (1, 0, -1)\}$. ¿Existe $a \in \mathbf{R}$ para que S y T resulten subespacios complementos ortogonales uno del otro? En caso negativo, justificar la respuesta. En caso positivo, dar todos los valores posibles de a.

4) Sea f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, la proyección ortogonal sobre el plano $x + y + z = 0$ y g: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la proyección ortogonal sobre el $Nu(f)$.

- **a)** Hallar las matrices de f, A_f, y de g, A_g, en la base canónica.
- **b)** Analizar si alguna de las matrices de f o de g son idempotentes y/o inversibles.
- **c)** Verificar que $Nu(f) = Im(g)$.
- **d)** Identificar los autovectores y sus respectivos autovalores de f y g.
- **e)** Hallar la matriz de $h(x, y, z)$ en la base canónica siendo $h = g \circ f$.

Nota: Para contestar alguno de los ítem de éste problema no se requieren cálculos numéricos. Basta con justificar claramente las respuestas.

U.T.N. F.R.H. – **Examen final de Álgebra y Geometría Analítica** – Julio 2017 – T2

Alumno: .... **Especialidad:**.................................

Profesor con quien cursó: .... **Año de cursado:** ....

	1	**2**		**3**	**4**			**5**		**Calificación Propuesta**
Corrector		**a**	**b**		**a**	**b**	**c**	**a**	**b**	

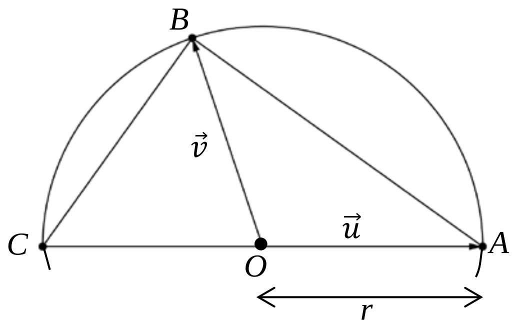
Calificación Final ………………………

1) $P(a,b,c)$ es un punto de $\mathbf{R^3}$. ¿Qué condiciones deben cumplir las coordenadas de P para que este punto equidiste del origen de coordenadas y del plano xz? Graficar el conjunto de puntos P que satisfacen la condición pedida.

2) Un triángulo está inscripto en una circunferencia si todos sus vértices pertenecen a ella. En la construcción de la figura el triángulo ABC está inscripto en la circunferencia, de centro O y radio r, y tiene uno de sus lados en un diámetro de la misma.

a) Expresar los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CB}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (ambos vectores con origen en O).

b) Demostrar vectorialmente que el triángulo ABC debe ser rectángulo en el vértice B.



3) Hallar todas las matrices A que verifican las siguientes condiciones en forma simultánea:
$A=((a_{i,j}))\in\mathbf{R}^{3\times3}$ es antisimétrica $(A^T=-A)$; $a_{1,3}=0$; $A^2=B-I$ donde $B=((b_{i,j}))\in\mathbf{R}^{3\times3}$ con
$b_{i,j}=\begin{cases}-1 & \text{si } i+j=4\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$ y $I=((\delta_{i,j}))\in\mathbf{R}^{3\times3}$ (matriz identidad).

4) Indicar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa justificando la respuesta.

a) Sea $A\cdot X=O$ un sistema homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas que sólo tiene la solución trivial, entonces $A^k\cdot X=O$ con $k\in\mathbf{N}$ también tiene sólo la solución trivial.

b) Sea $A\in\mathbf{R^{n\times n}}$. Si $\lambda=0$ es autovalor de A entonces A no es invertible.

c) Sea $A\in\mathbf{R^{n\times n}}$ y $X\in\mathbf{R^{n\times 1}}$. La condición para que el sistema $X=A\cdot X$ tenga solución única es que A sea invertible.

5) Sea $\hat{w}=(a,b,c)$ es un versor de $\mathbf{R^3}$ y $f\colon\mathbf{R^3}\to\mathbf{R^3}$ la proyección ortogonal de $\vec{x}=(x,y,z)\in\mathbf{R^3}$ sobre el subespacio generado por $\hat{w}$ (esto es la recta que pasa por el origen y es paralela a $\hat{w}$).

a) Demostrar que la matriz de f en la base canónica está dado por $\begin{pmatrix}a^2 & ab & ac\\ ab & b^2 & bc\\ ac & bc & c^2\end{pmatrix}$.

b) Hallar e identificar geométricamente:

i. Subespacios Núcleo e Imagen de f.

ii. Autovalores y subespacios de autovectores asociados.

Examen final de Algebra y Geometría Analítica UTN – FRH – 28/09/2017

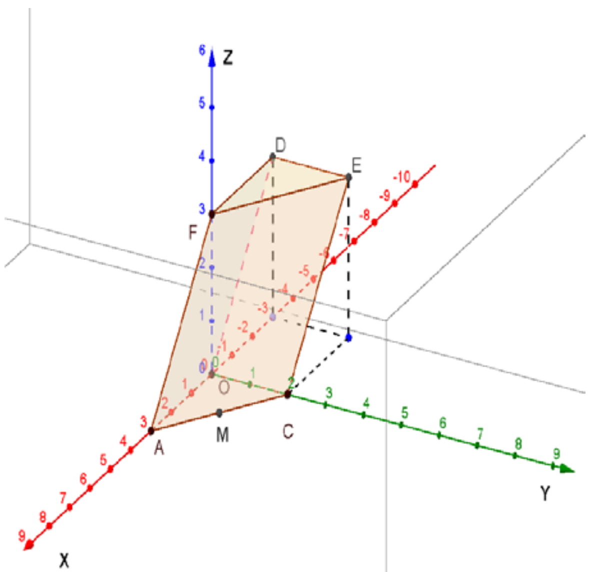
Alumno: .... **Especialidad:** ....

Profesor con quien cursó: .... **Año de Cursado:** ....

Corrector	1 a b c	2 a b c d	3 a b	Calificación Propuesta

Calificación Final: ………………………………..

1) Dado el siguiente cuerpo de vértices *OACFDE*, tal como muestra la figura y sea *M* el punto medio entre *A* y *C*, se pide:



a) Hallar la ecuación general del plano α que contiene la cara *AFEC*.

b) Estudiar la posición relativa entre el plano α definido en **a)** y el subespacio S_1 cuya base es

$$B=\{\vec{u}=(-4,4,-2)\}.$$

Si S_1 fuera secante a α, calcular la intersección; si fuera paralelo, hallar la distancia entre ellos.

c) Obtener la expresión explícita de la transformación lineal $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$, sabiendo que $f\left(\overrightarrow{OA}\right)=(-3,0,0)$, $f\left(\overrightarrow{OM}\right)=\left(-\frac{3}{2},-1,0\right)$ y $\overrightarrow{OF}$ es autovector con autovalor asociado 1. En caso de ser posible describir geométricamente dicha transformación.

2) Sea $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3 \,/\, f(x,y,z)=(ax,by+z,cy+z)$ donde $a,b,c\in\mathbf{R}$:

a) Para $a=0$, $b=1$ y $c=1$, hallar el núcleo *Nu*(*f*) y la imagen *Im*(*f*) y dar una base ortonormal de cada uno de los mencionados subespacios.

b) Calcular los valores de *a*, *b* y *c* sabiendo que el subespacio complemento ortogonal del núcleo $[\mathrm{Nu}(f)]^{\perp}$ es la recta $r\equiv\begin{cases}x=0\\ z=-y\end{cases}$.

c) Sabiendo que $b=5$ y $c=0$, hallar los valores reales de a para que $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$, sea diagonalizable.

d) Sea $g:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2 / g(x,y,z)=(x+y,x+z)$. Calcular los valores de *a*, *b* y *c* para que se verifique $\left(g\circ f\right)(0,1,1)=(2,0)$.

3) Indicar si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Si es verdadera, demostrarla, si es falsa dar un contraejemplo.

a) Si $A\in\mathbf{R}^{6\times6}$ es inversible y $\det(A^2)=\det(-A)$ entonces $\det(A)=1$.

b) Sea $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ idempotente de índice 3, esto es $A^3=A$, entonces $A^{21}=A$.

U.T.N. F.R.H. – **Examen final de Álgebra y Geometría Analítica** - Diciembre 2017

Alumno: .... **Especialidad:** ....

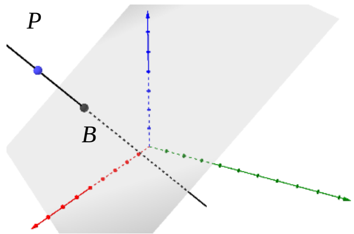
Profesor con quien cursó:.. **Año de cursado:** ....

	1	2	3			4			5	Calificación propuesta
Corrector			a	b	c	a	b	c		

Calificación Final ………………………

1) Los lugares geométricos correspondientes a la intersección del plano β con dos de los planos coordenados están definidos por $LG1 \equiv \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$ y $LG2 \equiv \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$. Hallar, si existe, $LG3$ correspondiente a la intersección de β con el plano coordenado faltante. Justificar la respuesta con un argumento o cálculos adecuados. Graficar $LG1$ y $LG2$.

2) Sea el plano $\pi \equiv 3x + y + z = 6$ y sea el punto $B(1,-1,4)$. Hallar todos los puntos de $\mathbf{R^3}$ tales que su distancia a π sea $2\sqrt{11}$ y cuya proyección sobre π sea B (ver figura esquemática).



3) Sea $T(X) = MX$ con $M = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 3 & -3a & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $X \in \mathbf{R^{3\times1}}$ la expresión matricial de una transformación lineal $t: \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$.

a) Hallar todos los valores de $a \in \mathbf{R}$ tales que la dimensión del núcleo de t sea 0.

b) ¿Existe algún valor de $a \in \mathbf{R}$ para el que núcleo y la imagen de t coincidan? Justificar la respuesta. En caso afirmativo, indicar los valores de a.

c) Si $a = 0$, ¿se puede definir $\{\vec{v}_1 = t(\hat{\imath}); \vec{v}_2 = t(\hat{\jmath}); \vec{v}_3 = t(\hat{k})\}$ como base de $\mathbf{R^3}$? Justificar la respuesta. En caso afirmativo dar las coordenadas de cada versor canónico $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ en la base ordenada $B' = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3\}$.

4) Justificar si las siguientes afirmaciones son V o F (Si son V, demostrarlo; si son F indicar un contraejemplo o dar una justificación clara y concisa).

a) Sea $A \in \mathbf{R^{n\times n}}$ la matriz asociada a la transformación $t: \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^n}$. Si $\lambda = 0$ es autovalor de A entonces existe la transformación inversa de t.

b) Si $A \in \mathbf{R^{4\times4}}$ y $\lambda = 2$ es autovalor de A con multiplicidad algebraica 2 (dos), siendo los restantes autovalores de A distintos de 2 y diferentes entre sí, entonces A es diagonalizable.

c) Sea el sistema de ecuaciones lineales $A \cdot X = B$ donde $A \in \mathbf{R^{n\times n}}, X \in \mathbf{R^{n\times1}}, B \in \mathbf{R^{n\times1}}$. Si el rango de A es menor a n, entonces B no pertenece al subespacio generado por las columnas de A.

5) Sea $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R^4} / 2x_1 - x_3 + x_4 = x_1 - x_2 = 0\}$, hallar la dimensión y una base S, completarla a una base de $\mathbf{R^4}$ utilizando una base de $S^{\perp}$.

U.T.N. F.R.H. Examen final de Álgebra y Geometría Analítica 14 de Diciembre de 2017

Alumno: ……………………………………………………………. Especialidad: ……………………

Profesor con quien cursó la asignatura: ……………………………… Año de cursado: ....

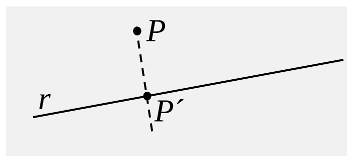
Ejercicio	1	2	3	Calificación
Corrector	a b c d	a b c d e		propuesta

Calificación Final:..

Ejercicio 1. Sea la recta $r:(x,y,z)=(1,0,1)+\lambda(1,k,-1)\ \forall\lambda\in\mathbf{R}$ y el punto $P(1,2,1)$.

a) Hallar k de modo que el punto $C(3,-1,1)$ pertenezca al plano que pasa por P y es ortogonal a la recta r.

b) Para el valor de k hallado, determinar la proyección del punto P sobre la recta r, $P´$ en la figura.



c) Para $k=0$, hallar un subespacio de dimensión 2 que contenga a r. ¿Es única la respuesta? Justificar.

d) Para $k=0$, se aplica a r una rotación en $\pi/2$ alrededor del eje z en sentido antihorario. Dar la ecuación de la recta transformada.

Ejercicio 2. Decidir el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones. En cada caso de ser verdadera, demostrarlo o hacer el cálculo adecuado según corresponda. En caso de ser falsa, dar un contraejemplo o justificar en forma clara la respuesta.

a) Si las matrices A y $B\in\mathbf{R}^{\mathbf{nxn}}$ y $A\cdot B-A^2=I\ \Rightarrow A$ es inversible.

b) Si la matriz $C\neq O$ siendo O la matriz nula de orden $n \Rightarrow$ el sistema $C\cdot X=B$ es compatible determinado $\forall B\in\mathbf{R}^{\mathbf{nx1}}$.

c) Sea $f:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ una transformación lineal, si el conjunto $\{\vec{u};\vec{v}\}\subset\mathbf{V}$ es linealmente dependiente $\Rightarrow$ el conjunto $\{f(\vec{u}),f(\vec{v})\}\subset\mathbf{W}$ es linealmente dependiente.

d) Existen infinitos pares de valores (x,z) para los que el área del paralelogramo cuyos lados son los vectores $\vec{a}=(x,-2,0)$ y $\vec{b}=(3,0,z)$ es 6.

e) Sea la transformación lineal $f(x,y,z)=(x-y,x-2y+kz,kx-y)$. Existe un solo valor de $k\in\mathbf{R}$ para cual la dimensión de la imagen de f es 2.

Ejercicio 3. Analizar si la matriz $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&0\\-2&\alpha&3\end{pmatrix}$ es diagonalizable. ¿Depende la respuesta del valor de $\alpha\in\mathbf{R}$?

De ser posible, indicar una matriz D diagonal y una matriz P que diagonalice a A.

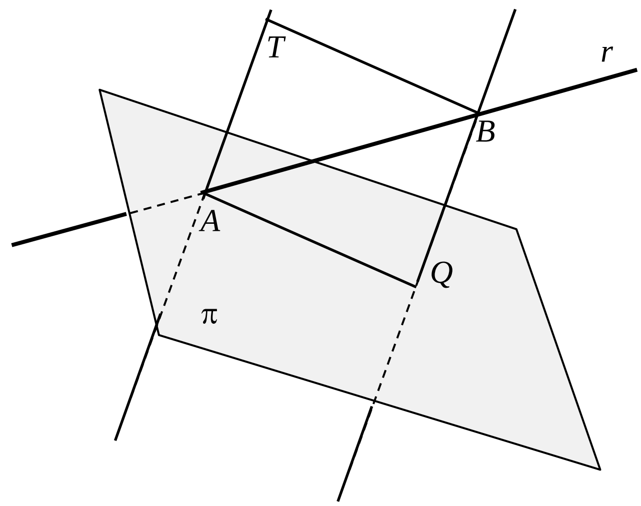
U.T.N. F.R.H. Examen final de Álgebra y Geometría Analítica 21 de Diciembre de 2017

Alumno: ……………………………………………………… Especialidad: ……………………

Profesor con quien cursó la asignatura: ……………………… Año de cursado: ....

Ejercicio Corrector	1 a b c	2 a b1 b2	3 a b	4 a b	Calificación propuesta

Calificación Final:...



Ejercicio 1. Sea el plano $\pi: 2x - y + 3z + 6 = 0$ y la recta $r: \begin{cases} x-2=-z \\ y+2z=1 \end{cases}$.

a) Hallar las coordenadas del punto A intersección de la recta r y el plano π.

b) $B(2,1,0)$ pertenece a la recta r. Encontrar la proyección del vector $\overrightarrow{AB}$ sobre la dirección normal al plano π.

c) Dar la ecuación del plano β perpendicular al plano π y que contiene a la recta r.

Ejercicio 2. Sea $A \in \mathbf{R}^{3\times 3}$ es una matriz antisimétrica $\left(A^T = -A\right)$.

a) Demostrar que A^n donde n es un número natural par (potencias pares de A) es una matriz simétrica.

b) Sea sistema homogéneo $A \cdot X = O$ con $X \in \mathbf{R}^{3\times 1}$ y A la matriz antisimétrica del enunciado.

b1. Analizar si el sistema $A \cdot X = O$ es compatible determinado o indeterminado. Justificar.

b2. Hallar A para que el conjunto solución de $A \cdot X = O$ sea $W = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 / x = y = z\}$. Dar todas las posibles matrices A que cumplan todo lo requerido.

Ejercicio 3. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Fundamentar adecuadamente cada respuesta.

a) Si $A \in \mathbf{R}^{3x3}$ y $A^2 = A$ y A es inversible entonces $\det(3A) = 27$.

b) Para todo valor de $k \in \mathbf{R}$ la imagen de la transformación lineal f tiene dimensión dos siendo
$$f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2 \,/\, f(x,y,z) = (x + kz, x + (2-k)y + kz).$$

Ejercicio 4. Sea $B = \{\vec{a} = (a_1, a_2, a_3); \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)\}$ una base ortonormal de un subespacio S de $\mathbf{R}^3$ y sea $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la transformación que a cada vector de $\mathbf{R}^3$ le asigna su proyección ortogonal sobre el subespacio S. Sin definir la transformación en forma explícita, se pide:

a) Definir los autovalores, los subespacios característicos asociados a cada autovalor, con sus respectivas bases y dimensiones. Analizar si la matriz asociada a la transformación es diagonalizable.

b) ¿Existe una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$ formada por autovectores de f? En caso de responder afirmativamente, proponer una base con estas características. De responder negativamente, justificar la respuesta.

Final de Algebra y Geometría Analítica. UTN FRH 15 de Febrero 2018.

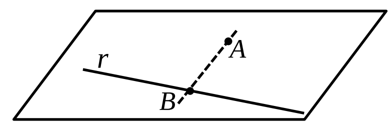
Apellido/s, Nombre/s .... Especialidad:.............................

Año de cursada: .... Profesor con quien cursó: ....

	1	2		3	4			
Corrector		**a**	**b**		**a**	**b**	**c**	**d**

Calificación: ....

Ejercicio 1. Sean los puntos $A(1,a,0)$ y $B(-1,b,-1)$ y la recta r: $(x,y,z)=(2\alpha+1,-\alpha-1,\alpha)$ $\forall\alpha\in\mathbf{R}$. Hallar si es posible, los valores de $a, b\in\mathbf{R}$ para los cuales la proyección del punto A sobre la recta r es el punto B. De no ser posible, justificar la razón.



Ejercicio 2.

a) Probar que si A, B y C son matrices tales que $A\in\mathbf{R}^{\mathbf{nxn}}$ es simétrica y ortogonal**,** $B\in\mathbf{R}^{\mathbf{nx1}}$, $C\in\mathbf{R}^{\mathbf{nx1}}$ y $A\cdot B=C$ entonces $A\cdot C=B$.

b) Probar que si $A\in\mathbf{R}^{\mathbf{nxn}}$ es una matriz ortogonal y simétrica, entonces $A^2=I$, siendo I la matriz identidad de orden n.

Ejercicio 3. Dados los subespacios

$$S=\{\vec{z}\in\mathbf{R}^3 / \ \vec{z}\cdot\vec{w}=0\wedge\vec{w}=(1,3,1)\};\ T=\{\vec{y}\in\mathbf{R}^3 / \ \vec{y}\times\vec{u}=0\wedge\vec{u}=(1,-1,c)\};\ W=S\cap T.$$

Determinar para los distintos valores de c la dimensión de W. Dar la interpretación geométrica de los subespacios S, T y W, y su posición relativa en cada caso.

Ejercicio 4. Sea f: $\mathbf{R}^3\rightarrow\mathbf{R}^3$ la transformación lineal que a cada vector de $\mathbf{R}^3$ le asigna su imagen especular con respecto al plano (yz) y luego duplica su componente en z.

a) Dar la forma explícita de f y la matriz asociada a la transformación según la base canónica.

b) Hallar el conjunto de vectores $\vec{v}$ que siendo ortogonales a $\vec{u}$ = (1,1,1), cumplen también que sus transformados, $f(\vec{v})$, son ortogonales a $f(\vec{u})$.

c) ¿Es el conjunto obtenido en el ítem **b)** un subespacio lineal? Justificar la respuesta.

d) Dos de los vértices de un triángulo están ubicados en $O(0,0,0)$ y $P(1,0,0)$. ¿Es posible hallar como tercer vértice un punto Q de tal forma que cuando se aplique la transformación f al OPQ, el triángulo $O'P'Q'$ que forman los transformados tenga área igual al doble de la que tiene el triángulo OPQ? En caso de ser posible, dar **una** respuesta numérica; si no es posible, justificar la respuesta en forma clara. Graficar.

U.T.N. F.R.H. – **Examen final de Álgebra y Geometría Analítica** - Febrero 2018 – T2

Alumno: .... **Especialidad:** ....

Profesor con quien cursó:... **Año de cursado:** ....

	1			2			3		4			Calificación propuesta
Corrector	**a**	**b**	**c**	**a**	**b**	**c**	**a**	**b**	**a**	**b**	**c**	

Calificación Final ………………………

1) Sea $f: \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ la transformación lineal que reflexiona respecto del plano $pl(y;z)$ y $g: \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ la transformación lineal que proyecta ortogonalmente sobre el $pl(x;z)$, se pide:

a) Hallar el transformado a través de $h(\vec{v}) = [gof](\vec{v})$ cuando $\vec{v} = (x, y, z)$.

b) Si $\pi : x = 3$, hallar el resultado de $h(\pi)$, indicando el lugar geométrico que se obtiene, escribiendo el o las ecuaciones que definan al mismo.

c) Calcular, si es posible, la distancia entre π y $h(\pi)$.

2) Dadas las ecuaciones del plano π y de la recta *r*:

$$\pi : 2x - 5y + az + 2 = 0 \qquad r : \begin{cases} 3x - y + 2z - 1 = 0 \\ x + 4y + z - b = 0 \end{cases}$$

hallar los valores reales de "*a*" y de "*b*" que verifican cada una de las siguientes condiciones:

a) La intersección entre el plano π y la recta r sea un punto.

b) Que el plano π y la recta r resulten paralelas.

c) La recta r esté incluida en el plano π.

3) Sea $M = \left((m_{i,j})\right)$, $M \in \mathbf{R^{3x3}}$, con $m_{i,j} = (-1)^{i+j} \ \forall (i,j)$.

a) Deducir una expresión general para las potencias naturales M, es decir M^n con "n" natural.

b) Determinar los autovalores de M, justificando si es diagonalizable y determinar un conjunto ortonormal de vectores que contenga la mayor cantidad posible de autovectores de M.

4) Analizar si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera, demostrarla mencionando todas las propiedades usadas, en caso de ser falsa dar un contraejemplo.

a) Si $A = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ es un conjunto de vectores ortonormales de $\mathbf{R^3}$, el conjunto $B = \{\vec{a}, \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}), \vec{b}\}$ constituye una base de $\mathbf{R^3}$.

b) $S = \{\vec{x} \in \mathbf{R^3} / x - 2y + 4 - 2z = 0\}$ es un subespacio de $\mathbf{R^3}$.

c) Si $f: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ es una transformación lineal inversible y $\lambda \neq 0$ es autovalor de f con autovector $\vec{x}$, entonces λ^{-1} es autovalor de f^{-1} con el mismo autovector $\vec{x}$.

U.T.N. F.R.H. – **Examen final de Álgebra y Geometría Analítica** – Febrero/Marzo 2018 – T3

Alumno: .... **Especialidad:**.................................

Profesor con quien cursó: .... **Año de cursado:** ....

	1				2			3			Calificación
Corrector	a	b	c.i	c.ii	a	b	c	a	b	c	Propuesta

Calificación Final ………………………

Ejercicio 1. Sean $a, b, c \in \mathbf{R}_{>0}$, el plano π de ecuación general

$$\frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y + \frac{1}{c}z = 1,$$

y la región definida por

$$R_I = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x \geq 0 \ \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}.$$

a) El lugar geométrico definido por $\pi \cap R_I$ es un triángulo *ABC*. Hallar las coordenadas de los vértices de dicho triángulo. Presentar *ABC* en un esquema gráfico, identificar cada vértice y calcular el área en función de a, b y c.

b) Demostrar que si todos los puntos de *ABC* se proyectan sobre el plano (*x*; *y*) se obtiene la región

$$R_{II} = \left\{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 / \ 0 \leq x \leq a \ \wedge 0 \leq y \leq -\frac{b}{a}x + b \wedge z = 0\right\}.$$

Presentar un esquema gráfico que identifique a R_{II}.

c) Sea la recta $r: (x, y, z) = \lambda(1,1,0) \ \forall \lambda \in \mathbf{R}$ y sea $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la proyección ortogonal sobre r.

- **i.** Hallar la forma explícita de f y la matriz A_f asociada a la transformación.
- **ii.** Tomar $a = b = c = 1$ y hallar $f(\pi)$ y $f(R_{II})$. Describir, gráfica y analíticamente, los lugares geométricos que definen cada conjunto de transformados.

Ejercicio 2. Sean A, B, C, X matrices de orden n ($n \in \mathbf{N}$) con A y B inversibles. Indicar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera, demostrarlo; en caso de ser falsa justificar la respuesta o dar un contraejemplo.

a) Si $B \cdot X \cdot A + B \cdot C = C \ \Rightarrow \ X = (B^{-1} - I_n) \cdot C \cdot A^{-1}$ con $I_n = \left(\left(\delta_{i,j}\right)\right) \in \mathbf{R}^{\mathbf{n \times n}}$ [matriz identidad].

b) Si $\alpha \cdot X \cdot A = C \ \Rightarrow \ \alpha \cdot \det(X) = \frac{\det(C)}{\det(A)}$.

c) La transformación lineal $f: \mathbf{R}^\mathbf{n} \to \mathbf{R}^\mathbf{n}$ cuya matriz asociada es A, no puede tener a $\lambda = 0$ como autovalor.

Ejercicio 3. S_1 y S_2 son dos subespacios de $\mathbf{R}^3$ y los conjuntos $B(S_1)$ y $B(S_2)$ sus respectivas bases con

$$B(S_1) = \left\{\vec{a} = (a_1, a_2, a_3); \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)\right\}; B(S_2) = \{\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)\} \text{ con } \vec{c} \neq \vec{a} \wedge \vec{c} \neq \vec{b}.$$

Responder a las siguientes cuestiones y dar una <u>justificación clara</u> para cada una de las respuestas.

a) ¿Es posible que el subespacio generado por $\left\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\right\}$ tenga dimensión 2? En caso positivo, indicar mediante que cálculo u operación se comprobarían las condiciones para que así fuera.

b) Analizar todos los posibles valores para la dimensión del subespacio $S_3 = S_1 \cap S_2$. Identificar geométricamente a S_3 y dar, de ser posible, una base para el mismo y su ecuación vectorial paramétrica.

c) Si se cumple adicionalmente que $\left\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\right\}$ es un conjunto de vectores ortonormales, ¿es posible que el subespacio generado por $\left\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\right\}$ tenga dimensión 2?