U.T.N. F.R.H. – **Examen final de Álgebra y Geometría Analítica** - Mayo 2016

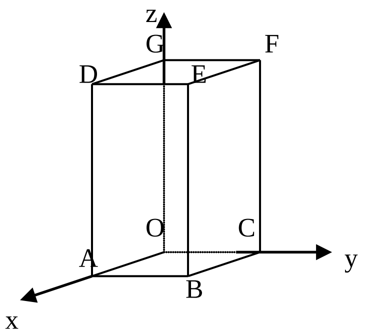
Alumno: .... **Especialidad:** ....

Profesor con quien cursó:... **Mes y año de firma TP:** ....

Ejercicio	1				2			3		Calificación final
Corrector	a	b	c	d	a	b	c	a	b	

Calificación Final:..

Ejercicio 1. Considerando el gráfico del prisma recto de vértices: **OABCDEFG**, con base cuadrada de lado: $a \in R^{+}$ y altura $2a$, se pide:



a) Escribir las ecuaciones de las rectas: r_1 que pasa por los puntos **G** y **E** y r_2 que contiene a los puntos **D** y **C**.

b) Verificar que las rectas: r_1 y r_2 son alabeadas y calcular la distancia que separa a las mismas.

c) Escribir la ecuación normal del plano α que contiene al origen de coordenadas y a los puntos **D** y **C**. Calcular la distancia del punto **F** al plano α.

d) Obtener la expresión explícita de la transformación lineal “ f ”, que a cada punto del prisma recto, le aplica un giro horario alrededor del eje “ z ”, con un ángulo: $\hat{\varphi} = \dfrac{\pi}{4}$.

Ejercicio 2. Para cada una de las siguientes afirmaciones, determine el valor de verdad. Si resulta verdadera, demuéstrela y si es falsa, proponga un contraejemplo, si:

a) $A.X = O$ es un sistema de ecuaciones lineales, tal que: $A \in R^{4x3}$, admite únicamente la solución trivial.

b) Si: $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, es conjunto ortonormal de un espacio vectorial V con producto interno y $\vec{x} \in V \wedge \vec{x} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2, \forall \alpha \in R, \forall \beta \in R$, entonces: $\alpha = < \vec{x}, \vec{v}_1 > \wedge \beta = < \vec{x}, \vec{v}_2 >$.

c) Si: $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ es una base ortonormal R^3, entonces: $B = \{k\vec{u}, (1-k)\vec{v}, (\vec{u} \, x \, \vec{v}) x \, \vec{w}\}$, para $k = 1$, genera un subespacio de R^3 , de dimensión 2.

Ejercicio 3. Sabiendo que: $S = \{(x;y;z) \in R^3 / (x;y;z) = \lambda.(1;-1;2), \forall \lambda \in R\}$, es un subespacio de R^3, se pide:

a) Determinar el subespacio ortogonal a S $(S^{\perp})$ y escribir una base ortonormal para el mismo.

b) Si se considera la transformación lineal “ f ”, que a cada vector del espacio lo proyecta sobre $S^{\perp}$, describir geométricamente los autovectores y señalar los correspondientes autovalores, asociando, si es posible con los subespacios núcleo e imagen de la transformación lineal.

U.T.N. F.R.H. – **Examen final de Álgebra y Geometría Analítica** – 21 de Julio 2016

Alumno: .... **Especialidad:** ....

Profesor con quien cursó:.. **Mes y año de firma TP:** ....

	1				2			3				Calificación propuesta
Corrector	a	b	c	d	a	b	c	a	b	c	d	

Calificación Final: ....

1) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x-2y=1 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ y los planos $\alpha \equiv 2x-y-z=h$ y $\beta \equiv x-y+z-4=0$, y sea $f:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la transformación lineal correspondiente a la proyección ortogonal sobre el plano xy.

- **a)** Determinar h para que la recta r esté incluida en el plano $\propto$.
- **b)** Hallar los puntos de la recta r cuya distancia al plano β sea $2\sqrt{3}$.
- **c)** Sea s la recta paralela a r que pasa por el origen de coordenadas. Identificar el lugar geométrico que resulta de aplicar f a la recta s y definirlo mediante una ecuación o un sistema de ecuaciones adecuado.
- **d)** Dar los autovalores y los subespacios de autovectores de la transformación f, indicando base y dimensión de los mismos.

2) Sea $A=\{\vec{a};\vec{b}\}$ un conjunto ortonormal de vectores de $\mathbf{R}^3$. Sabiendo que $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$, determinar, justificando cada respuesta, la dimensión de los siguientes subespacios:

- **a)** $S_1 = \text{gen}\left\{\vec{a};\ \vec{c};\ \vec{a}\times\vec{b}\right\}$.
- **b)** $S_2 = \text{gen}\left\{\vec{a}\ ;\ h(\vec{b}-\vec{c})\ ;\ \vec{c}\ ;\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right\}$ siendo h un número real cualquiera.
- **c)** $S_3 = \text{gen}\left\{\left[\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right]\vec{a};(\vec{a}\cdot\vec{b})\ \vec{c};\ \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}\right\}$.

Notación: gen{} simboliza al subespacio generado por los vectores que figuran dentro de las llaves.

3) Sea $A \in \mathbf{R}^{4\times4}$ tal que $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j \text{ es par} \\ 0 & \text{si } i+j \text{ es impar} \end{cases}$

- **a)** Analizar si A es simétrica, si es inversible y/o si es ortogonal. Justificar cada respuesta.
- **b)** Verificar que $A^n-(2^{n-1})A=N$ siendo N la matriz nula de $\mathbf{R}^{4\times4}$.
- **c)** Si A es la matriz de una transformación lineal f: $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$, hallar el núcleo y la imagen de f.
- **d)** Determinar si el núcleo y la imagen de f son subespacios ortogonales.

U.T.N. F.R.H. – **Examen final de Álgebra y Geometría Analítica** – 28 de Julio 2016

Alumno: .... **Especialidad:** ....

Profesor con quien cursó:.. **Mes y año de firma TP:** ....

	1				2			3				Calificación propuesta
Corrector	**a**	**b**	**c**	**d**	**a**	**b**	**c**	**a**	**b**	**c**	**d**	

Calificación Final: ……………………………………

Ejercicio 1. Sean $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ y $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ dos versores ortogonales de $\mathbf{R^3}$, $\vec{c}=\alpha\,\vec{a}+\beta\vec{b}$ y $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}$.

a) Demostrar que $\vec{c}\perp\vec{d}$ cualesquiera sean los números reales α y β.

b) Hallar la distancia entre la recta r y el punto B donde r es paralela a $\bar{a}$ y pasa por el origen de coordenadas y $B(b_1,b_2,b_3)$. Justificar la respuesta.

c) Si $\vec{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{k}$ y $\vec{b}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{k}$, ¿qué lugar geométrico representa $\vec{c}$ si $\alpha\in[0;1]$ y $\beta\in(-\infty;\infty)$? Graficarlo.

d) Si α=1 y β=–1, indicar la dimensión del subespacio generado por $\{\vec{a};\vec{c};\vec{a}\times\vec{d}\}$. Dar la interpretación geométrica de dicho subespacio.

Ejercicio 2. Sea X la matriz columna genérica de $\mathbf{R^{3\times1}}$ y sea $A\in\mathbf{R^{5\times3}}$ tal que $A\cdot X$ nunca se anula, excepto que $X=O$ (matriz nula).

a) ¿Cuánto vale el rango de A?

b) $B=\{C_{1(A)};C_{2(A)};C_{3(A)}\}$ es el conjunto formado por las columnas de A. ¿Es B independiente, dependiente o la información dada no es suficiente para establecerlo? Justificar la respuesta.

c) Se conoce que $A^T\cdot A$ es inversible, y se define $M=\left(A^TA\right)^{-1}A^T$. ¿Es M la matriz inversa a izquierda de A, esto es que $M\cdot A=I$ donde I es la matriz identidad, o es la matriz inversa a derecha de A, esto es $A\cdot M=I$, ninguna de las dos o ambas? De ser afirmativa alguna/s de las opciones, indicar el orden de la matriz I correspondiente.

Ejercicio 3 Sea $f:\mathbf{R^3}\to\mathbf{R^3}$ una transformación lineal no nula tal que $f\circ f\circ f$ es la transformación nula. Analizar si cada una de las siguientes proposiciones asociadas con f, es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera, demostrarlo indicando las propiedades y/o teoremas usados; si es falsa, dar un contraejemplo.

a) Si $\vec{y}=a\,f(\vec{x})+b\,f\left(f(\vec{x})\right)$, entonces $(f\circ f)(\vec{y})=f\left(f(\vec{y})\right)=\vec{0}$ cualesquiera sean $\vec{x}\in\mathbf{R}^3$, $a\in\mathbf{R}$ y $b\in\mathbf{R}$.

b) Si $\vec{x}\in\mathbf{R}^3-\{\vec{\mathbf{0}}\}$ es autovector de f con autovalor real λ, entonces la única posibilidad es que $\lambda=0$.

c) La matriz $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ es la representación matricial de una transformación lineal con las características definidas para f.

d) $\dim\left(\operatorname{Im}(f\circ f\circ f)\right)=3$.

U.T.N. F.R.H. – **Examen final de Álgebra y Geometría Analítica** – 29 de Septiembre 2016

Alumno: .... **Especialidad:** ....

Profesor con quien cursó:.. **Mes y año de firma TP:**.................

	1		2			3		4		Calificación
Corrector	**a**	**b**	**a**	**b**	**c**	**a**	**b**	**a**	**b**	

Calificación Final:...

Ejercicio 1: **a)** ¿Para qué valores del parámetro m la recta r: $x = y + 1 = \frac{11-mz}{3}$ es paralela al plano $\pi \equiv 2x + y + z = 9$? **b)** Determinar la intersección de la recta r y el plano π para $m = 2$.

Ejercicio 2: Responder V o F cada una de las siguientes proposiciones. Si es verdadera (V), justificar la respuesta; si es falsa (F), dar un contraejemplo.

a) Sea A una matriz simétrica de orden 3 tal que $\lambda_1 = 1$ es autovalor doble de A y $\lambda_2 = -2$ es autovalor simple de A. Se verifica que $\det(A) = (-2)^3$.

b) Sea A una matriz cuadrada de orden n tal que el sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$ es compatible indeterminado $\Rightarrow$ si $\vec{b} \in \mathbf{R}^n$ se verifica que $A\vec{x}=\vec{b}$ es compatible indeterminado.

c) Sea **V** un espacio vectorial de dimensión n y sea $S=\{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3, \dots \dots; \vec{v}_p\}$ un conjunto de vectores de V. Entonces si $p < n$, el conjunto S es linealmente independiente.

Ejercicio 3: Dados E y F dos subespacios de $\mathbf{R}^4$ definidos por:

$$E=\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \qquad F \equiv a\,x_1 + b\,x_2 + x_3 - b\,x_4 = 0 \quad \text{con } a; b \in \mathbf{R}.$$

a) Hallar la dimensión del subespacio $E \cap F$ según los distintos valores de a y b.

b) Para $a = -1$, $b = 0$ hallar una base ortogonal para $E \cap F$.

Ejercicio 4: Sea f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ una transformación lineal que tiene por núcleo al subespacio definido por $S = \{(x_1; x_2; x_3)/x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ y por imagen el subespacio complemento ortogonal de S, $S^\perp$, y sea $g(x_1; x_2; x_3)$ una transformación que tiene por núcleo a $S^\perp$ y por imagen a S.

a) Escribir una transformación lineal que tenga las características de f y dar su matriz asociada.

b) ¿Qué se puede decir del núcleo de $h = f \circ g$?

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
Facultad Regional Haedo

EXAMEN FINAL DE ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA – 01/12/16

Alumno: .... **Especialidad:** ....

Profesor con quien cursó la asignatura:...................... **Año de cursado:** ....

Ejercicio / Corrector	1 a	1 b	1 c	2 a	2 b	3 a	3 b	3 c	3 d	4	Calificación

Calificación Final:...

<u>EJERCICIO 1</u> Sea el plano $\pi: 3x + y + z = 3$ y las rectas $\begin{array}{l} r_1: (x,y,z) = (1,-2,2) + \lambda(k,0,3) \quad \forall \lambda \in \mathbf{R} \\ r_2: (x,y,z) = (-1,3,h) + \alpha(-1,2,1) \ \forall \alpha \in \mathbf{R} \end{array}$.

- **a)** Hallar *h* y *k* si existen tales que las rectas r_1 y r_2 estén incluidas en el plano π.
- **b)** Calcular la proyección del vector $\vec{a} = (1,-3,2)$ sobre la recta paralela a r_2 que pasa por el origen.
- **c)** Si $k = -3$, ¿qué valor puede tomar *h* para que las rectas r_1 y r_2 sean alabeadas?

<u>EJERCICIO 2</u> La matriz $A \in \mathbf{R}^{3\times 3}$ es diagonalizable y sus autovalores son: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = -2$.

- **a)** Encontrar los autovalores de la matriz $B = 3A$. ¿Será *B* diagonalizable? Justificar la respuesta.
- **b)** El $\det(A) = -4$, calcular el $\det\left[-A^2 (adj(A))^{-1}\right]$. Mencionar las propiedades utilizadas.

<u>EJERCICIO 3</u> Sea *S* un subespacio de $\mathbf{R}^3$ generado por $\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$. La transformación lineal $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ es tal, que el núcleo de *f* es igual al subespacio *S* y $f(3,0,2) = (1,1,1)$.

- **a)** Hallar una base ortonormal del núcleo de *f*.
- **b)** Escribir el vector $\vec{a} = (-1,2,2)$ que pertenece al núcleo, utilizando la base hallada.
- **c)** Encontrar la matriz *A* asociada a *f* y la forma explícita $f(x,y,z)$.
- **d)** Hallar los subespacios núcleo e imagen de la transformación $g = f \circ f$.

<u>EJERCICIO 4</u> Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$ con *a* y *b* reales tales que el sistema homogéneo $M \cdot X = O$ con $X \in \mathbf{R}^{3\times 1}$ y $O \in \mathbf{R}^{3\times 1}$, tiene soluciones distintas de la trivial. Demostrar, o justificar claramente, que *M* es diagonalizable.

ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA – EXAMEN FINAL – 07/12/2016

APELLIDO Y NOMBRE:……

Año de Cursada: ………… Especialidad: ……………………….. Profesor con quien cursó: ……………………………………………

CORRIGIÓ	EJ. 1			EJ. 2			EJ. 3			EJ.4		CALIFICACIÓN PROPUESTA
	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	

Calificación Final: ……………………………………………………..

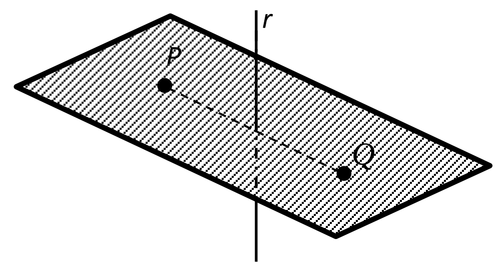
Ejercicio 1. Sean los planos

$$\pi_1 \equiv x + y + az = 1, \pi_2 \equiv ax + y + z = 1, \pi_3 \equiv 2x + y + z = a.$$

a) Hallar el valor del parámetro *a* para que los tres planos tengan sólo una recta en común, *r*.

b) Expresar la ecuación vectorial paramétrica de *r*.

c) Calcular el punto simétrico, *Q*, de *P*(1, 0, –2) respecto de *r*.



Ejercicio 2. Sea $T\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -3x + y - z \\ -7x + 5y - z \\ -6x + 6y - 2z \end{pmatrix}$ una transformación lineal de $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$.

a) Hallar los autovalores de *T* y los subespacios de autovectores asociados a cada autovalor.

b) Unir en un único conjunto, *C*, las bases de los subespacios hallados en el ítem **a)**. ¿Cualquier combinación lineal de los elementos de *C* es un autovector de *T*? Justificar la respuesta.

c) Sea S_C el subespacio generado por el conjunto *C*. Hallar, si existe, una base ortonormal del subespacio ortogonal a S_C, $S_C^{\perp}$.

Ejercicio 3. Sea $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 2}$. Se definen las transformaciones $f(M) = -M^T$ y $g(M) = 3b$.

a) Demostrar que *f* y *g* son transformaciones lineales.

b) Determinar los subespacios Núcleo e Imagen de ambas transformaciones, mencionar sus dimensiones.

c) Hallar, si es posible, gof y fog.

Ejercicio 4. Sea $A = I_2 - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1/4 & 3/2 \end{pmatrix}$, donde I_2 es la matriz identidad de orden 2.

a) Comprobar que A^2 es proporcional a A y deducir la expresión general de A^n con $n \in \mathbf{N}$.

b) Analizar si la siguiente proposición es verdadera o falsa:

La transformación lineal *f*: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ .cuya matriz asociada es A, es la proyección ortogonal sobre un subespacio *S*.

En caso de ser falsa, justificar la respuesta. Si es verdadera hallar el subespacio *S* y dar del mismo una interpretación geométrica.

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL - Facultad Regional Haedo

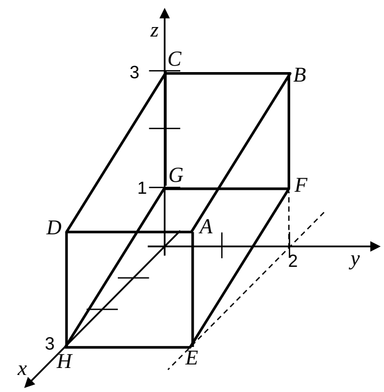
EXAMEN FINAL DE ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA – 15/12/16

Alumno: ……………………………………………………………………… **Especialidad:** ………………………………

Profesor con quien cursó la asignatura:……………………………… **Año de cursado:** ………..

Ejercicio Corrector	1a	1b	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c	Nota Propuesta

Calificación: …………………………..



Ejercicio 1: Sea el cuerpo de la figura.

a) Hallar la ecuación de un plano que divida al cuerpo en dos partes de igual volumen.

b) Un punto de la recta que une G y F que esté a una distancia del punto B de $\sqrt{20}$ unidades. Dar todas las respuestas posibles.

Ejercicio 2:

Sean las matrices $A \in \mathbf{R}^{3x3}$, tal que $A \cdot A^T = I$, con I matriz identidad de $\mathbf{R}^{3x3}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & a \\ 3 & a & 4 \end{pmatrix}$.

a) Obtener todos los valores reales de a tales que $\det(2 \cdot (A^{-1})^2 \cdot B^T) = 24$.

b) Obtener los valores reales de a tal que el núcleo de $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 \,/\, f(X) = B \cdot X$ tenga dimensión mayor o igual a 1.

c) Para $a = 0$, demostrar que existe una sola matriz $Y \in \mathbf{R}^{3x3}$ que verifica que $B \cdot Y - B^2 = I$.

d) Para $a = 2$, justificar claramente cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- **d₁)** El sistema de ecuaciones lineales $B \cdot X = O$ tiene como única solución a la trivial, con O matriz nula de $\mathbf{R}^{3x1}$.
- **d₂)** B es diagonalizable.
- **d₃)** El vector $\vec{v} = (0,2,4)$ es un autovector de B.

Ejercicio 3: Sea el subespacio $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,/\, x - 2y = 0 \wedge y - z = 0\}$ y las transformaciones lineales $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ y $g: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. Se sabe que f le asigna a cada vector de $\mathbf{R}^3$ su proyección ortogonal sobre el plano π y que S es el núcleo de f. De la transformación g se conoce que todo vector $\vec{v} \in S$ se mantiene invariante ($g(\vec{v}) = \vec{v}$), que $g\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $g\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Dar la ecuación del plano π.

b) Dar la forma explícita de g y la matriz asociada a la transformación según la base canónica.

c) Demostrar que $g(\vec{x} - f(\vec{x})) = \vec{x} - f(\vec{x}), \forall \vec{x} \in \mathbf{R}^3$.

Examen Final de Algebra y Geometría Analítica. Febrero 2017

Apellido/s, Nombre/s:.. **Especialidad:** ....

Profesor con quien cursó: …………………………………………… **Año de cursado:** ………

1			2		3		4		Corrector/Nota propuesta

Calificación:......................................

Ejercicio 1. Sea el conjunto de vectores de $\mathbf{R}^3$

$$A=\left\{\overrightarrow{v_1}=(-1;5;k+1),\overrightarrow{v_2}=(2;-1;1),\overrightarrow{v_3}=(1;k+2;4),\overrightarrow{v_4}=(1;2;-2)\right\},$$

las rectas $r_1\equiv\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{v_1}\ \ \forall\lambda\in\mathbf{R}$ y $r_2\equiv\overrightarrow{OP}=(1;2;2)+\lambda'\overrightarrow{v_4}\ \ \forall\lambda'\in\mathbf{R}$, y los planos

$$\pi_1\equiv\overrightarrow{OP}=\beta\overrightarrow{v_2}+\gamma\overrightarrow{v_3}\ \ \forall\beta,\forall\gamma\in\mathbf{R}\ \text{ y }\ \pi_2\equiv\overrightarrow{OP}=(3;2;1)+\beta'(5;-5;1)+\gamma'(7;-1;7)\ \ \forall\beta',\forall\gamma'\in\mathbf{R}.$$

a) ¿Para qué valores de $k\in\mathbf{R}$, r_1 resulta paralela a π_1? Justificar la respuesta.

b) Si $k=0$ verificar que π_1 es paralelo π_2. Calcular la distancia entre ambos planos.

c) Hallar las coordenadas de un punto Q perteneciente a la recta r_2 que equidiste de los puntos $B(-3;2;1)$ y $C(1;2;3)$.

Ejercicio 2. Sea $A\in\mathbf{R}^{3\times 3}$ de columnas C_1; C_2; C_3 con $C_j\in\mathbf{R}^{3\times 1}$ para j=1, 2, 3 y sea $a=\det(A)$. Sea B la matriz de columnas $B_1=C_1+C_2$, $B_2=2C_1+3C_3$, $B_3=C_3$.

a) Calcular el determinante de B en función de a.

b) El sistema de ecuaciones lineales homogéneo $(A-B)X=O$ con $X\in\mathbf{R}^{3\times 1}$ es compatible indeterminado cualesquiera sean las C_j. Demostrarlo o dar una justificación clara.

Ejercicio 3. Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Si resulta verdadera, demostrarla; y si es falsa, proponer un contraejemplo.

a) Si $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ son vectores ortonormales en un espacio vectorial $\mathbf{V}$ $\Rightarrow$ el conjunto $\left\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\right\}$ es linealmente independiente.

b) Si $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ son vectores ortogonales en un espacio vectorial $\mathbf{V}$ $\Rightarrow$ el conjunto $\left\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\right\}$ es linealmente independiente.

Ejercicio 4. Sea una transformación lineal de $\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ con matriz asociada A respecto de la base canónica de la que se conoce que es simétrica y además que:

$f(2;1;0)=(8;6;4)$,
$f(1;1;0)=(5:4:2)$,
$\vec{v}=(2,1,2)$ es un autovector de f.

a) Hallar la matriz A.

b) Determinar una base ortonormal respecto de la cual la matriz asociada a f sea diagonal. En caso de no ser posible, justificar la respuesta.

U.T.N. F.R.H. – **Examen final de Álgebra y Geometría Analítica** – 23 de Febrero 2017

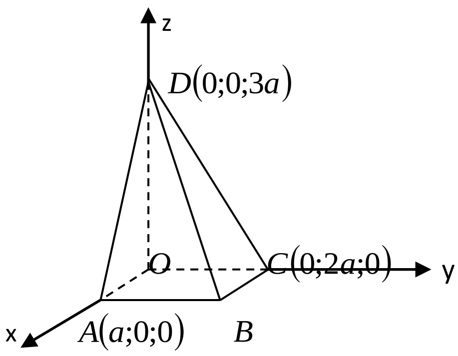
Alumno: .... **Especialidad:** ....

Profesor con quien cursó:.. **Mes y año de firma TP:** ....

Corrector	1		2				3				Calificación propuesta
	a	b	a	b	c	d	a	b	c	d	

Calificación Final: ……………………………………

Ejercicio 1. Dado el prisma recto, de base rectangular indicado en la figura:



$\forall\, a \in \mathbf{R}_{>0}$

a) Escribir la ecuación del plano π, que contienen a los vértices A, C y D. Hallar las coordenadas del punto M, sabiendo que es el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y calcular la distancia del punto M al plano π.

b) Si este cuerpo tuviese que acomodarse en el interior de una caja con forma de paralelepípedo rectangular, ¿cuál sería la altura mínima que dicha caja debe tener? Explicar cómo debe acomodarse el cuerpo en ella.

Ejercicio 2. Dado $S = \{(x;y;z)\in\mathbf{R}^3 \ / \ 2x - z = 0\}$, se pide:

a) Demostrar que S es subespacio de $\mathbf{R}^3$.

b) Si $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 \ / \ f(\vec{x}) = proy_S(\vec{x})$, describir geométricamente los subespacios imagen y núcleo, proponer para cada uno de ellos una base e indicar las correspondientes dimensiones.

c) Describir geométricamente cuáles son los autovectores y autovalores de $f(\vec{x})$, indicando los autovalores y los subespacios de autovectores correspondientes.

d) Escribir explícitamente la transformación lineal f y su matriz asociada.

Ejercicio 3. Determinar el valor de verdad para cada una de las siguientes afirmaciones, justificando su respuesta. Si resulta verdadera, demostrarla; si es falsa, proponer un contraejemplo:

a) Si $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ con $2A^2 - A = I$, entonces no existe A^{-1}.

b) Si $M = \{\vec{a};\vec{b}\}$ es un conjunto de vectores ortonormales de $\mathbf{R}^3$, entonces:
$C = \{\vec{a};\vec{b};\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b});\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b});(\vec{a}\times\vec{a})\times\vec{b};\vec{a}\times\vec{b}\}$ es sistema de generadores de $\mathbf{R}^3$.

c) Si de una transformación lineal $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, se conoce que:

$$f\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix} = -3.\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} \text{ y } f\begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix},$$

entonces dicha transformación lineal es única.

d) Sea el sistema inhomogéneo $A\cdot X = B$, con $A\in\mathbf{R}^{n\mathrm{x}n} \wedge X\in\mathbf{R}^{n\mathrm{x}1} \wedge B\in\mathbf{R}^{n\mathrm{x}1} \wedge B\neq O$. Si $\det(A) = 0$, entonces el sistema resulta incompatible.

U.T.N. F.R.H. – **Examen final de Álgebra y Geometría Analítica** – 2 de Marzo 2017

Alumno: .... **Especialidad:** ....

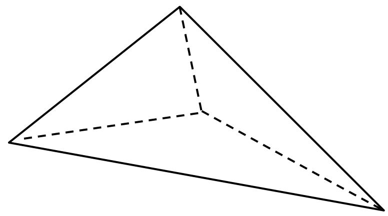
Profesor con quien cursó:.. **Año de Cursado:** ....

Ejercicio / Corrector	1		2			3		4				Nota Propuesta
	a	b	a	b	c	a	b	a	b	c	d	

Calificación Final: ……………………………………

Ejercicio 1. Se conocen:

$$\pi_1 \equiv x + y + z = 6;\ \pi_2 \equiv x - y = 0\ ;\ \pi_3 \equiv y - z = 0; \pi_4 \equiv z = 0;\ \pi_5 \equiv ax - y = 0.$$



a) Los planos $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ limitan un tetraedro. Obtener el área del triángulo de la cara que está sobre π_4.

b) Dar <u>un</u> valor de $a \in \mathbf{R}$ para el que los planos $\pi_1, \pi_5, \pi_3, \pi_4$ no formen un tetraedro. Justificar la respuesta.

Ejercicio 2. Sea $A = I - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ donde I es la matriz identidad de orden 2.

a) Comprobar que A^2 es proporcional a A.

b) Deducir una expresión general para $A^n\ \forall n \in \mathbf{N}$. Sugerencia: usar el resultado anterior.

c) Analizar si la siguiente proposición es verdadera o falsa. Justificar la respuesta.

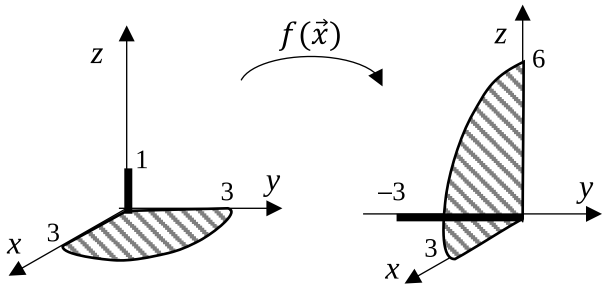
Si $B \in \mathbf{R}^{2\times 1}, X \in \mathbf{R}^{2\times 1}$ es tal que el sistema de ecuaciones $A \cdot X = B$, con A definida en el enunciado general, tiene infinitas soluciones entonces $A^2 \cdot Y = B$ con $Y \in \mathbf{R}^{2\times 1}$ también tiene infinitas soluciones.

Ejercicio 3. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores ortonormales de $\mathbf{R}^3$, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

a) Demostrar que $\vec{c}$ y $\vec{d}$ son dos vectores ortogonales no nulos de $\mathbf{R}^3$.

b) Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ fuesen vectores ortogonales no nulos de $\mathbf{R}^3$, ¿serían también $\vec{c}$ y $\vec{d}$ vectores ortogonales no nulos de $\mathbf{R}^3$? Justificar la respuesta en forma clara.

Ejercicio 4. Sea $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ una transformación lineal tal que al cuerpo compuesto de la figura, un cuarto de circunferencia de radio 3 sobre el plano xy y una varilla vertical de longitud 1, lo gira y lo deforma de modo que la imagen resulta en un cuarto de elipse sobre el plano xz y la varilla estirada y rebatida sobre el eje y como está indicado.



a) Indicar cómo es el giro y cuáles son las deformaciones que produce $f(\vec{x})$.

b) Dar la forma explícita para $f(\vec{x})$ y hallar su matriz asociada.

c) Justificar, geométricamente o con un cálculo adecuado, cuáles son los subespacios de autovectores de $f(\vec{x})$ y cuáles los autovalores correspondientes.

d) Justificar, geométricamente o con un cálculo adecuado, cuáles son los subespacios de autovectores de $(f \text{o} f)(\vec{x})$ y cuáles los autovalores correspondientes.