Álgebra y Geometría Analítica – Trabajo Especial Asistido por Computadora

Curvas definidas en forma paramétrica. Gráficos en coordenadas polares

Indicaciones generales

Cada grupo deberá entregar un trabajo impreso con las respuestas a los ejercicios, los gráficos y las sentencias que utilizó en el software elegido para la realización del trabajo. Pueden incluirse comentarios que parezcan pertinentes y que hayan surgido en la ejecución del práctico. Esto es que, para contestar las preguntas pudo haber surgido la necesidad de experimentar numéricamente frente a la pantalla de la computadora, pero que luego ese trabajo no se imprima; entonces, sería interesante entregar una breve explicación de lo que se hizo y cuales fueron las observaciones que surgieron. También existe la libertad de incluir en el informe alguna nota con una nueva pregunta que no se corresponda con las originales pero que le parezca al grupo interesante de responder.

El trabajo deberá contener una carátula, de diseño libre, pero donde esté incluida la siguiente información: institución; materia; especialidad; título del trabajo; curso; apellido y nombre del docente a cargo y del docente auxiliar; apellido, nombres y número de libreta universitaria de cada uno de los integrantes del grupo; firma de cada uno de ellos; fecha de entrega; un espacio libre donde el docente pueda hacer observaciones y/o correcciones. Las siguientes hojas deben corresponder al enunciado (fotocopia o trascripción) con las preguntas a contestar en el trabajo.

Consultar con los docentes el plazo de entrega.

Al sentarse frente a la computadora

¿Hará falta aclarar que debe estar prendida y con el software seleccionado abierto?

Las siguientes son algunas pautas previas que se pueden ensayar antes de realizar el Trabajo Especial Asistido por Computadora, en forma de ejercicios guiados y en parte resueltos. Ellas están escritas para funcionar en versiones anteriores a las últimas del utilitario que se menciona. Seguramente hay otras alternativas, incluso más amables y/o ágiles para el ejecutor en las versiones actuales, pero las aquí presentadas se pueden usar en casi cualquier versión del programa. Si se escribieran las sentencias actualizadas, algunas de ellas no funcionarían en versiones anteriores. Toda esta información, junto con muchos otros detalles, pueden consultarse en el *help* del programa o en sus manuales.

Resolución con Mathematica

A) Gráficos bidimensionales

A.1) Ecuaciones cartesiano-paramétricas

1) Para probar si está funcionando el programa, se sugiere empezar por pedir alguna cuenta por todos conocida como: `2+3`, presionar simultáneamente las teclas Shift-Enter. Si no responde 5, estamos frente a una dificultad inicial grave. Si responde 5, comenzar por graficar un punto en el plano

```
ListPlot [{{2, -1}}, PlotStyle –> AbsolutePointSize[6]]
```

Trazar el segmento que lo une con el origen

```
ListPlot[{{0,0},{2,–1}}, PlotJoined– > True]
```

¿Es este segmento perteneciente a la bisectriz del cuarto cuadrante? Observar que sucede con:

```
Show[%,AspectRatio–>Automatic]
```

El % hace referencia al resultado anterior, en este caso al gráfico anterior. Sacar conclusiones.
También se podría escribir

ListPlot[{{0,0},{2,–1}},PlotJoined->True, AspectRatio->Automatic]

2) Comprobar gráficamente si los puntos (2,1), (0,0) y (-1,2) están alineados. Una opción es

ListPlot[{{2,1},{0,0},{2,–1}},PlotJoined->True]

y observar el resultado.

3) Graficar la recta $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \end{cases}$ para algún rango del parámetro (se observará un segmento perteneciente a la misma). Para ello se puede usar la sentencia

ParametricPlot[{2*t*,–*t*},{*t*,–3,3}]

cuya forma general es

ParametricPlot[{*x*(*t*),*y*(*t*)},{*t*,*t*min,*t*max}]

Establecer en forma analítica si el punto (5,-2) pertenece a la recta, comprobar en el gráfico superponiendo el gráfico de la recta y del punto. Comparar con la recta $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases}$ ¿Qué características poseen en común ambas rectas? Superponer los gráficos.
Se pueden generar simultáneamente con

ParametricPlot[{2*t*,–*t*)},{1+2*t*,2–*t*)},{{*t*,–3,3}]

o bien definir los gráficos por separado y con Show[%, %%] que los muestre juntos.

4) Graficar la curva (en $\mathbf{R}^2$) que representan las siguientes ecuaciones en forma paramétrica. Proponer distintos rangos de valores del parámetro $t \in \mathbf{R}$ y observar si alguna de las curvas es periódica, es decir que tiene un comportamiento que se repite cíclicamente, o si presenta algún tipo de simetría. Si estas ecuaciones pertenecieran al espacio tridimensional (pudiendo tomar *z* los infinitos valores reales), imaginar el tipo de superficie que definirían. Utilizar

ParametricPlot[{f_x, f_y},{*t*,*t*min,*t*max}]

4.1) Circunferencia de radio 1 y centro en el origen de coordenadas: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = sen\, t \end{cases}$. ¿Cómo se puede cambiar el valor del radio?. ¿Cuál es el mínimo rango que debe tomar los valores de *t*? ¿Qué sucede si *t* toma valores negativos?.
Sugerencia: tomar valores de *t* escritos como múltiplos de π. Por ej. {*t*, 0, Pi/2}.

Por ejemplo, se puede empezar por

ParamericPlot[{Cos[*t*],Sin[*t*]},{*t*,0,Pi/2}]]

y completar la vuelta completa con

ParamericPlot[{Cos[*t*],Sin[*t*]},{*t*,0,2Pi}]]

Para cambiar el radio de la circunferencia, por ejemplo al valor 3,

ParamericPlot[{3Cos[*t*],3Sin[*t*]},{*t*,0,2Pi}]]

Para desplazar el centro de la circunferencia al punto (-2,2),

ParamericPlot[{–2+Cos[*t*],2+Sin[*t*]},{*t*,0,2Pi}]]

Para obtener la ecuación de la circunferencia en coordenadas cartesianas, eliminando el parámetro, es suficiente elevar al cuadrado las dos ecuaciones que la definen y sumarlas de tal modo que

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t \xrightarrow{\text{por relación pitagórica}} x^2 + y^2 = 1$$

y ahora se puede cargar el *package* adecuado, si el programa con el que se está trabajando lo tiene, con

<<Graphics`ImplicitPlot`

y ejecutar

$$\boxed{\text{ImplicitPlot[x^2 + y^2 == 1, \{x, -1, 1\}]}}$$

cuya forma general es $\boxed{\text{ImplicitPlot[Ecuación, } \{x, x\text{min}, x\text{max}\}]}$

4.2) Circunferencia $\begin{cases} x = 2 + \cos t \\ y = 1 + sen\, t \end{cases}$ ¿Cómo se puede cambiar la ubicación del centro?.

4.3) Elipse $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 4\, sen\, t \end{cases}$ Si se utiliza $\boxed{\text{Show[\%, AspectRatio -> Automatic]}}$, ¿qué se observa?.

¿Depende de la escala en cada uno de los ejes el hecho que una curva sea circunferencia o una elipse?.
¿Cómo puede eliminar el parámetro *t*?.

4.4) Elipse $\begin{cases} x = 1 + 2 \cos t \\ y = -1 + 4\, sen\, t \end{cases}$ Comparar con la elipse anterior.

4.5) Parábola $\begin{cases} x = t - 2 \\ y = t(t-4) \end{cases}$ **4.6)** Cicloide $\begin{cases} x = t - sen\, t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ **4.7)** Hipocicloide $\begin{cases} x = 3 \cos t + \cos(3t) \\ y = 3\, sen\, t - sen\,(3t) \end{cases}$

A.2) <u>Ecuaciones en coordenadas polares</u>

Si la curva está definida por una ecuación en coordenadas polares se puede usar, por ejemplo,

$$\boxed{\text{ParametricPlot[}\{x(\rho,\varphi), y(\rho,\varphi)\},\{\varphi, \varphi\text{min}, \varphi\text{max}\}]}$$

tal como un ejemplo posterior donde el radio *r* es conocido y se varía el ángulo; o bien, puede cargar el *package* adecuado con

$\boxed{\text{<<Graphics`Graphics`}}$

y utilizar

$$\boxed{\text{PolarPlot[}\rho(\varphi), \{\varphi, \varphi\text{min}, \varphi\text{max}\}]}$$

donde el radio ρ es una función del ángulo φ, esto es $\boxed{\rho(\varphi)}$.

Para recordar: la equivalencia entre el sistema polar y cartesiano está dada por

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho\, \text{sen}\varphi \end{cases} \wedge \begin{cases} \rho = +\sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \text{arctg}(y/x) \end{cases}.$$

El polo y el eje polar de un sistema de referencia en coordenadas polares se corresponden, respectivamente, con el origen de coordenadas y con el semieje positivo de las *x* en un sistema cartesiano ortogonal. Una curva en coordenadas polares mediante la función ρ=ρ(φ) presenta simetría con respecto

- al eje polar si ρ(φ)=ρ(−φ);
- al polo si ρ(φ)=ρ(π+φ);
- al eje perpendicular al eje polar que pasa por el polo si ρ(φ)=ρ(π−φ).

5) Dada la ecuación polar de la cardioide: $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$, graficarla y verificar gráficamente que es una función de período 2π.
Se proponen los siguientes pasos:

definir el radio en función del ángulo ⇒ $\boxed{\text{r[t\_] = 2(1 + Cos[t])}}$

graficar para cierto rango del ángulo con

$$\boxed{\text{gra1 = ParametricPlot[\{r[t] Cos[t], r[t] Sin[t]\}, \{t, 0, Pi\}];}}$$

ampliar el rango ⇒ $\boxed{\text{gra2 = ParametricPlot[\{r[t] Cos[t], r[t] Sin[t]\}, \{t, 0, 2Pi\}];}}$

incluir valores negativos de φ con

$$\boxed{\text{gra3 = ParametricPlot[\{r[t] Cos[t], r[t] Sin[t]\}, \{t,-2Pi,2Pi\}];}}$$

Comparar, observar la simetría con respecto al eje polar. Obtener la ecuación en coordenadas cartesianas.
También, una vez que se carga el package Graphics`Graphics`, se puede usar

PolarPlot[2(1+Cos[t]), {t, 0, 2Pi}]

6) Trébol de tres hojas: $\rho = 2\,\mathrm{sen}(3\varphi)$. Comenzar graficando para $\varphi \in [0, \pi/2]$. Ampliar para $\varphi \in [0, \pi]$. Modificar el intervalo de forma de incluir valores del ángulo negativos. Si en la ecuación se modifica el valor 3 por otro, ¿qué pasa con la curva? ¿Cómo se consigue un trébol de 5 hojas? ¿Es esta nueva curva, periódica π? Cambiar la función seno por la función coseno (con el mismo argumento), ¿qué diferencia o semejanza presenta? ¿Son todos los lóbulos iguales?

7) Espiral de Arquímedes: $\rho = \varphi$. Comenzar con $\varphi \in [0, 4\pi]$. ¿Es periódica? ¿Presenta alguna simetría?
Graficar para $\varphi \in [-4\pi, 0]$ y comparar con el gráfico anterior.

8) Parábola: $\rho = 3/(1-\cos\varphi)$. Comenzar con $\varphi \in [0, 2\pi]$, ampliar a $\varphi \in [-2\pi, 2\pi]$. ¿Qué se observa? ¿Es esta curva acotada? ¿Presenta alguna simetría?

B) <u>Gráficos tridimensionales</u>

B.1) <u>Ecuaciones cartesiano-paramétricas</u>

9) Comenzar por graficar el segmento de recta definido por

$$\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in (0,\,1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{ParametricPlot3D[\{3}t\text{, 2}t\text{, }t\text{\}, \{}t\text{, 0, 1\}]}}$$

Identificar la ubicación del origen de coordenadas y de cada uno de los ejes. Ampliar el rango del parámetro.
Graficar una recta paralela a la dada que pase por el punto (1,0,0). Para ello basta con

ParametricPlot3D[{1+3*t*, 2*t*, *t*}, {*t*, 0, 1}]

Este es un ejemplo de como aplicar la sentencia general para curvas paramétricas tridimensionales:

ParametricPlot3D[{$f_x(t)$, $f_y(t)$, $f_z(t)$}, {*t*, *t*min, *t*max}]

10) Dada la hélice: $\begin{cases} x = \mathrm{sen}\, t \\ y = \cos t \\ z = t/3 \end{cases}$, graficarla para $t \in [0,\ 15]$. ¿Cómo se puede modificar el paso de la hélice? ¿Presenta esta curva algún tipo de simetría?

Graficar a continuación la superficie correspondiente a esta curva. Bastará con

ParametricPlot3D[{*u* Sin[*t*], *u* Cos[*t*], *t*/3}, {*t*, 0, 15},{*u*, –1, 1}]

Este es un caso particular de la forma general

ParametricPlot3D[{$f_x(t)$, $f_y(t)$, $f_z(t)$}, {*t*, *t*min, *t*max},{*u*, *u*min, *u*max}]

donde *t* y *u* son ambos parámetros de la superficie.

Con esta última sentencia puede corroborar lo predicho para la extensión a 3D de las curvas del punto 4. Por ejemplo, para el caso de la circunferencia 4.1)

ParametricPlot3D[{Cos[*t*],Sin[*t*],*u*},{*t*,0,2*Pi*},{*u*,–2,2}]

Observar que esto es equivalente a graficar en coordenadas cilíndricas $\rho = 1$.

B.2) Ecuaciones en coordenadas cilíndricas y en coordenadas esféricas

Consultar el help o el manual, o usar ParametricPlot3D y las equivalencias entre estas coordenadas y las coordenadas cartesianas.

B.3) Observaciones convenientes a tener en cuenta

En los gráficos donde aparece el uso de los tres ejes de coordenadas, suele ser conveniente que aparezca el nombre de dichos ejes. Esto se puede hacer con la sentencia

AxesLabel->{xlabel, ylabel, zlabel}

Donde dice 'xlabel' dentro de los paréntesis anteriores, se coloca el nombre con el que se quiere nombrar al eje x. En forma análoga los otros dos. También se puede usar en 2D recortando la expresión adecuadamente.

Para visualizar un gráfico 3D, según el tipo de curva o superficie y el gusto del operador, suele ser conveniente cambiar la posición en la que se presupone (por default) se ubica el observador del gráfico. Si se desea cambiar una de las sentencias que se puede usar es

ViewPoint -> {*x*, *y*, *z*}

Donde dice {*x*, *y*, *z*} debe colocarse la terna de números ordenados que corresponde a la ubicación del observador deseada con respecto a un sistema especial de referencia. Dichas coordenadas están dadas con respecto al centro de la caja tridimensional que contiene el objeto presentado en la pantalla (dicho punto tiene coordenadas {0,0,0}) y la escala de medición toma como unidad de longitud al lado más largo de la caja (el lado más largo mide 1 y los demás proporcional a él). Es conveniente probar varias para entender como funciona.

Según el help, la posición por defecto (sin usar esta sentencia) es $\{1.3, -2.4, 2\}$. Entre las indicaciones que se presentan allí, menciona algunas vistas usuales:

Directamente de frente: $\{0, -2, 0\}$
En frente y arriba: $\{0, -2, 2\}$
En frente y abajo: $\{0, -2, -2\}$
Desde la esquina a mano izquierda: $\{-2, -2, 0\}$
Desde la esquina a mano derecha: $\{2, -2, 0\}$
Directamente desde arriba: $\{0, 0, 2\}$

También se puede averiguar el uso de ViewVertical y ViewCenter.