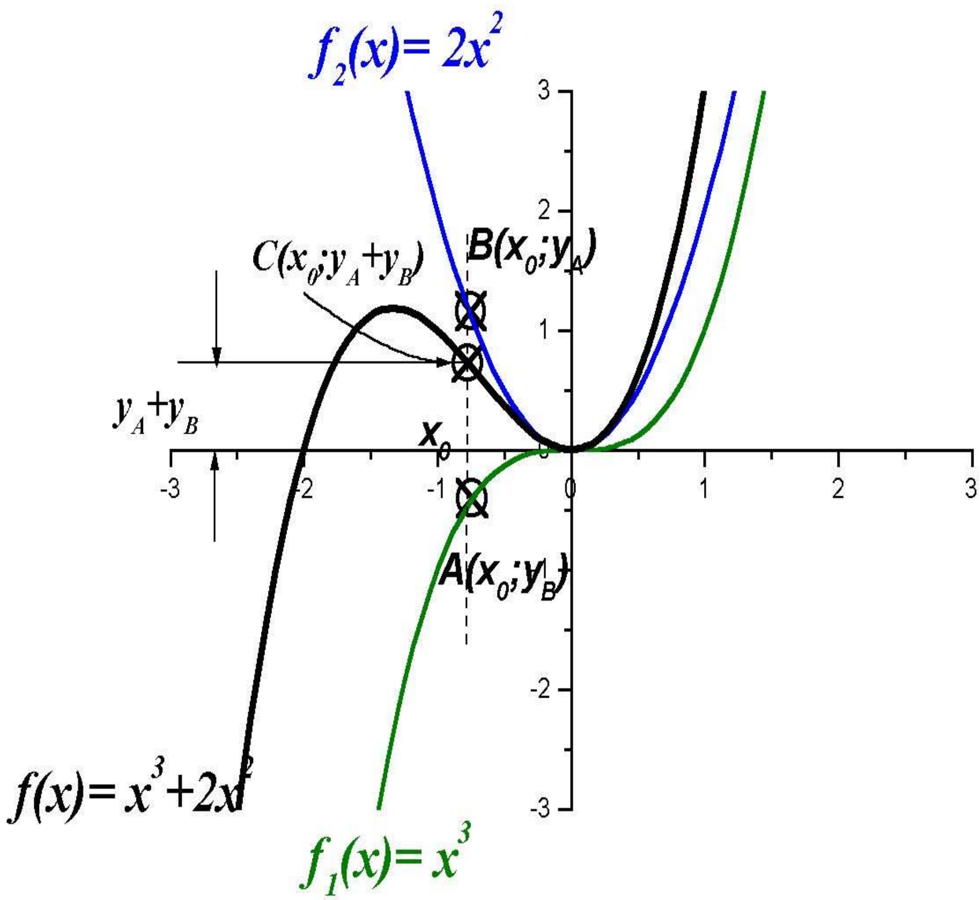
UTN HAEDO
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL HAEDO

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

POLINOMIOS: RESOLUCIÓN Y TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

Jorge Poliszuk



Octubre 2010

TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

Funciones Racionales.

Las funciones racionales se dividen en dos:

a) *Funciones racionales enteras o polinomios.*
b) *Funciones racionales fraccionarias:* son aquellas determinadas por una fracción racional o cociente de polinomios, o sea $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)};$ **con** $Q(x)\neq 0$

   A su vez, estas funciones racionales se dividen en dos grupos:

   b1) <u>*funciones racionales propias*</u> que son aquellas en las que el grado del polinomio del numerador es menor que el grado del polinomio del denominador $gr\left[P(x)\right]<gr\left[Q(x)\right]$.

   b2) <u>*Fracciones racionales impropias*</u> en las que el grado del numerador es igual o mayor que el del denominador $gr\left[P(x)\right]\geq gr\left[Q(x)\right]$

Funciones racionales enteras o polinomios.

<u>Consideraciones preliminares.</u>

Recordemos que toda función del tipo

$$f(x)=P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_0 x^0 \quad \begin{cases} n\in\mathbb{Z}\geq 0 \\ x, a_i \in\mathbb{C} \end{cases} \qquad (1)$$

o también

$$f(x)=P(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \begin{cases} n\in\mathbb{Z}\geq 0 \\ x, a_i \in\mathbb{C} \end{cases} \qquad (1´)$$

es conocida como *función polinómica* o *función racional entera*.

Por otra parte, toda serie de términos como la dada por (1) puede escribirse en forma de producto de factores

$$f(x)=P(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\dots\dots\dots(x-x_n)\ /\ \left\{x_1, x_2, \dots, x_n\right\}\in\mathbb{C}\ \textbf{raíces de}\ P(x) \qquad (2)$$

o bien

$$f(x)=P(x)=a_n\prod_{i=1}^{n}(x-x_i) \quad \begin{cases} n\in\mathbb{Z}\geq 0 \\ x, a_i \in\mathbb{C} \end{cases} \qquad (2´)$$

Alcances del trabajo.

Si bien la definición general de este tipo de funciones establece que los coeficientes a_i y la indeterminada x pertenecen al cuerpo de los números complejos, trataremos aquí solamente a aquellas en las que tanto los coeficientes como la variable pertenecen al conjunto de los números reales. Así, las definiciones (1´) y (2´) se transforman, a los objetos del presente material, en

$$f(x) = P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \geq 0 \\ x, a_i \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \text{(A)}$$

y

$$f(x) = P(x) = a_n \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) \quad \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \geq 0 \\ x, a_i \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \text{(B)}$$

Definición:

Respecto de las ecuaciones (2) y (2´) diremos que toda función polinómica puede ser expresada como producto de potencias enteras de factores polinómicos de primer grado y/o de segundo grado irreductibles.

Ejemplo de polinomio reducible a factores de primer grado:[1]

Sea $P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$. Sus raíces son $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ y $x_3 = 4$ entonces de acuerdo con (2) puede ser escrito en forma factorizada

$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ o sea $P(x) = (x-3)(x+2)(x-4)$,puesto que $a_n = 1$

Ejemplo de polinomio reducible a factores de primer grado y de segundo grado irreductible:

Sea $P(x) = 3x^4 - 3x^3 - 15x^2 - 3x - 18$. Posee dos raíces reales en $x_1 = -2$ y $x_2 = 3$. El $gr\left[P(x)\right] = 4$ por lo que deberá tener exactamente 4 raíces. Las faltantes están en el factor irreducible de segundo grado $(x^2 + 1)$, irreducible porque de él ya no pueden extraerse raíces reales[2]**.** Así, el polinomio puede ser escrito como $P(x) = 3(x-3)(x+2)(x^2+1)$, que presenta factores polinómicos de primer grado y de segundo grado irreducible.

[1] Para los ejemplos propuestos, hemos supuesto que el lector ya conoce como hallar las raíces o ceros de una función polinómica. El Apéndice 2 revisa esos conceptos fundamentales.

[2] Obsérvese que las raíces de $(x^2 + 1)$ son complejas y conjugadas.

Función Potencia.

Una función es llamada potencia, cuando tiene la forma:

$$f(x) = ax^k; a, k = cte. \quad (3)$$

La ecuación (1) muestra que una función polinómica es una suma de funciones potencia. Una primera observación permite ver que la función potencia, cuando $k \in \mathbb{Z} \geq 0$, es una clase de polinomio conocida como *monomio,* posen un único término.

Si bien no es necesario que $k \in \mathbb{Z} \geq 0$ (de hecho en la función potencia el exponente puede ser cualquier número real), nos limitaremos a analizar ese caso específicamente por cuanto este trabajo tiene por objeto analizar geométricamente las funciones del tipo (A) y (B).

La forma de la gráfica de la función potencia dependerá de si k es par o impar.

1) $a = 1; k \in \mathbb{Z} > 0$ **y es par**

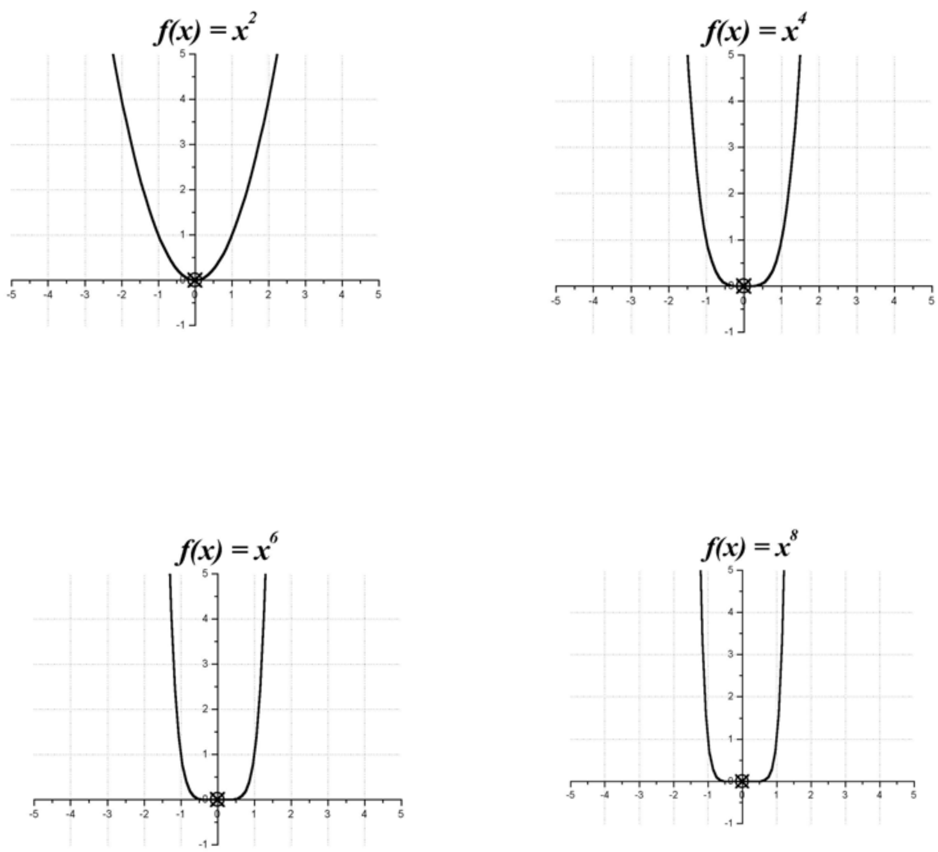


Figura 1

La figura 1 pone en evidencia que los gráficos de funciones potencia de exponente par y positivos son, en general, parábolas que se “aplanan” en los alrededores del vértice cada vez más, en la medida que el exponente aumenta. Además, las ramas se cierran sobre el eje de simetría con mayor velocidad también cuanto mayor es el mismo.

Por otra parte se debe notar que en todas las representaciones anteriores está marcado el origen de coordenadas. Se quiere poner en evidencia que todas las funciones mostradas tienen raíces múltiples de orden par en $\boldsymbol{x = 0}$ y que tal circunstancia, desde el punto de vista geométrico, determina que la gráfica de tales funciones son tangentes al eje de las abscisas.

Definición:

> *todo polinomio que contenga raíces múltiples de orden par en $\boldsymbol{x = x_i}$ será tangente al eje de las x en $\boldsymbol{x = x_i}$.*

Los gráficos de la figura 2 dan una idea de lo mencionado en la definición anterior ya que todas las funciones tienen raíces múltiples de orden par en $\boldsymbol{x = -3}$, $\boldsymbol{x = 5}$, $\boldsymbol{x = 3}$ y $\boldsymbol{x = -1}$ respectivamente.

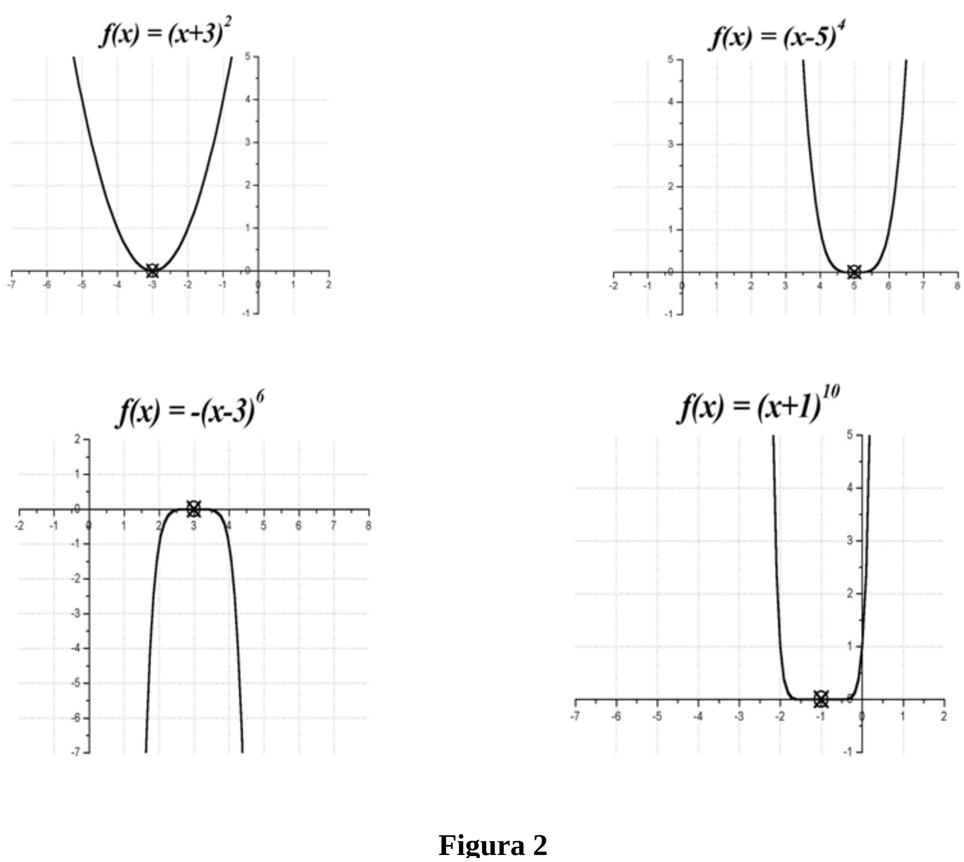


Figura 2

2) $a = 1; k \in \mathbb{Z} > 0$ **y es impar**

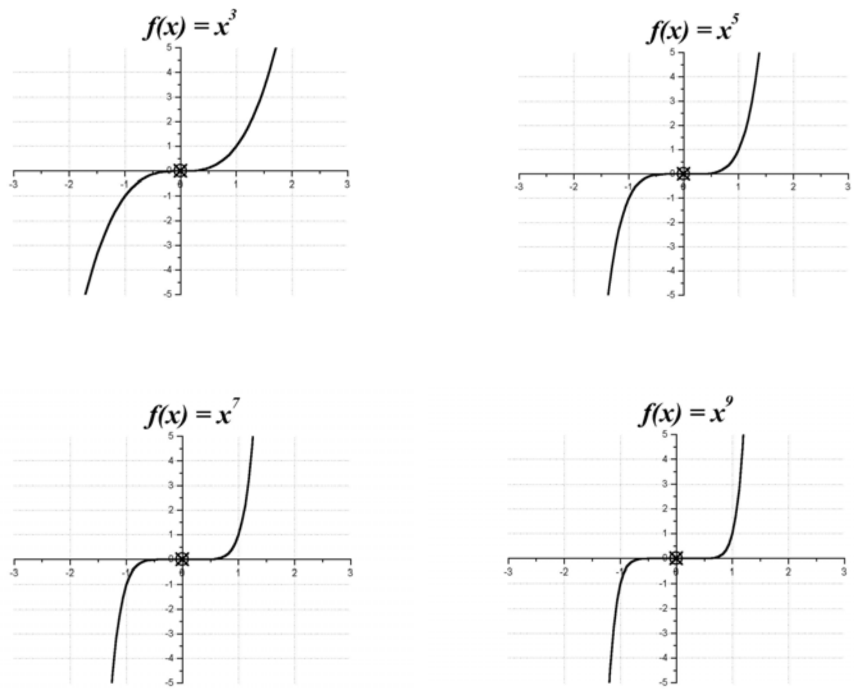


Figura 3

En la figura 3 se muestra de qué manera se comportan las funciones potencia de exponente impar. Al igual que las de exponente par, también se "aplanan" en el punto de corte con el eje $\boldsymbol{x}$, sólo que en éstas se produce un cambio de signo en ***f(x)***.

Cuanto mayor sea el exponente, mas plana es la gráfica en los alrededores del punto de corte y más verticales son sus ramas.

<u>*Definición:*</u>

todo polinomio que contenga raíces múltiples de orden impar en $\mathbf{x = x_i}$ *cortará al eje* **x** *en forma similar a las mostradas en las figura 3 y 4.*

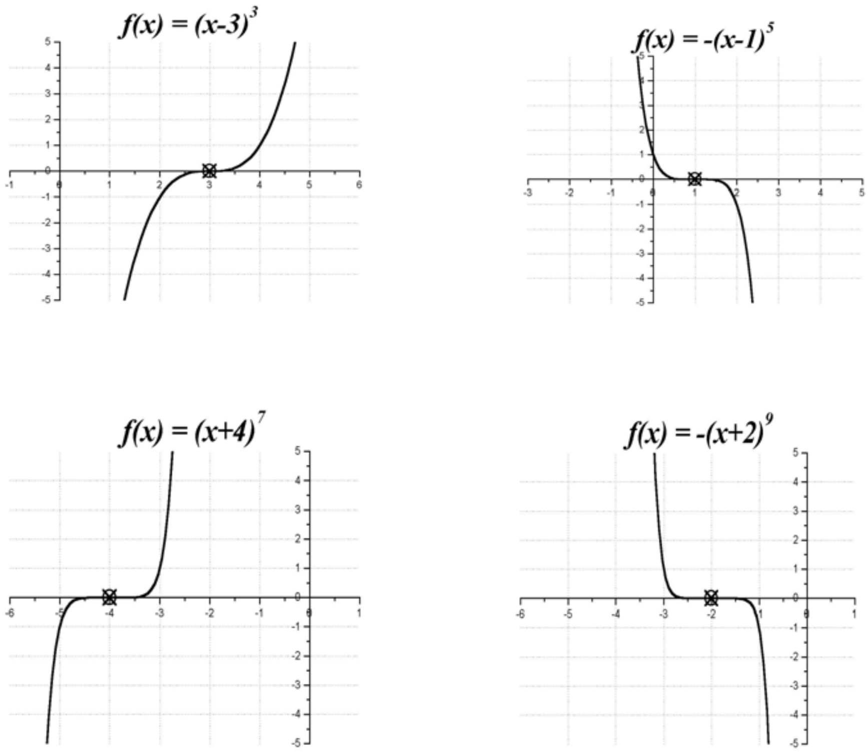


Figura 4

Raíces simples de un polinomio

Las raíces simples de polinomios representan puntos de corte con el eje ***x***. ***f(x)*** es de signo opuesto a un lado y al otro del punto de intersección pero sin ninguna forma específica ya que la misma dependerá del tipo de función a graficar.

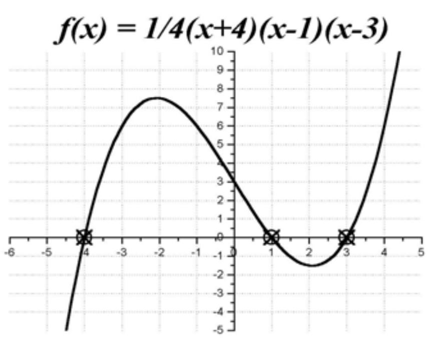


Figura 5

Por ejemplo, la función polinómica representada en la figura 5 tiene 3 raíces simples en $x_1 = -4$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 3$.

Es importante notar, que las raíces simples de un polinomio están contenidas como términos de factores polinómicos de primer grado.

Ejercicio 1.

Si la siguiente gráfica corresponde a un cierto polinomio, determinar qué grado, como mínimo, debe tener $P(x)$.

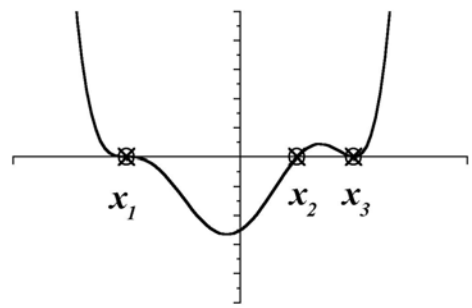


Figura 6

Solución.

Analizando la forma en la que la curva corta y acuerda con el eje x puede observarse que el polinomio tiene una raíz **triple** en $x = x_1$, una raíz **simple** en $x = x_2$ y una raíz **doble** en $x = x_3$.

Por lo tanto, la forma factorizada del polinomio tendrá que ser

$$P(x) = a_6(x - x_1)^3(x - x_2)(x - x_3)^2 \quad (3)$$

así, el *grado mínimo* de un polinomio que cumple con las condiciones impuestas por la gráfica es $gr\left[P(x)\right] = 6$.

Es importante comprender el concepto de *grado mínimo.* Como hemos visto, la gráfica de una función potencia no cambia demasiado cuando el exponente aumenta. En efecto, si observamos nuevamente las figuras 2 y 4, notaremos que no estaremos en condiciones visuales de determinar la multiplicidad del exponente pero sí de saber de que orden es (par o impar) por la forma en la que corta o acuerda con el eje x**.** Para comprender mejor lo que queremos decir, comparemos las figuras 6 y 7.

A simple vista no estamos en condiciones de encontrar diferencias pues geométricamente las curvas se parecen mucho. Sin embargo la figura 6 corresponde al gráfico de

$$P_6(x) = (x-1)^2 (x+1)^3 \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

mientras que la figura 7 corresponde a $P_7(x) = a_{10}(x-1)^4 (x+1)^5 \left(x - \frac{1}{2}\right)$

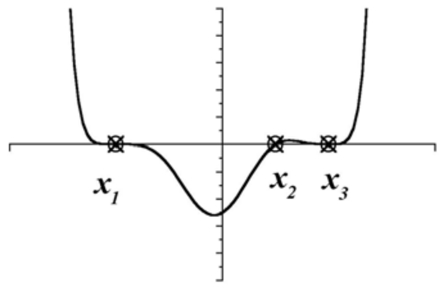


Figura 7

Tanto $P_6(x)$ como $P_7(x)$ generan gráficos parecidos, sin embargo, el $gr[P_6(x)] = 6$ mientras que el $gr[P_7(x)] = 10$. Obviamente, el polinomio que cumple con una gráfica como la mostrada, siendo su *grado mínimo* es $P_6(x)$.

Construcción aproximada punto a punto.

Consiste en considerar que $P(x)$ es una suma de funciones, esto es

$$P(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots\ldots + f_n(x) \quad (1)$$

Con el siguiente ejemplo, damos una idea del método.

Ejercicio 2.

Trazar el gráfico aproximado del polinomio $P(x) = x^3 + 2x^2$

Solución.

Por la ecuación (1) , para este caso, $f_1(x) = x^3$ y $f_2(x) = 2x^2$

El procedimiento geométrico consiste en dibujar, por separado, cada uno de los términos de $P(x) = f_1(x) + f_2(x)$ como se observa en la figura 8. Por $x = x_0$ se traza una recta auxiliar perpendicular al eje x hasta que corte a las funciones $f_1(x)$, $f_2(x) \ldots\ldots + f_i(x)$. A continuación se miden las alturas de dichos puntos luego se suman y el resultado será la altura de un punto perteneciente a $P(x)$.

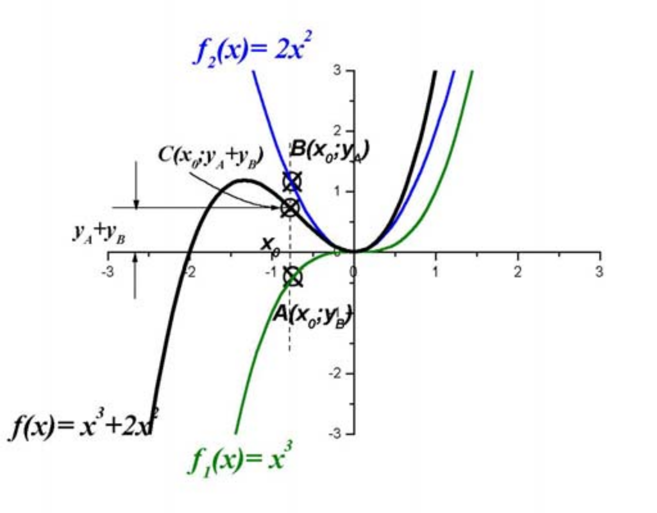


Figura 8

En el caso particular de nuestro ejemplo de la figura 8, por $x = x_0$ se trazó un recta perpendicular al eje x hasta que intersectó a $f_1(x)$ en el punto $A(x_0; y_A)$ y a $f_2(x)$ en $B(x_0; y_B)$. Luego, un punto perteneciente a $P(x) = f_1(x) + f_2(x)$ será el $C(x_0; y_A + y_B)$. Repitiendo el procedimiento para otros valores de x_0 se pueden obtener tantos puntos de $P(x)$ como se desee.

Si bien el método anterior es engorroso para polinomios con muchos términos, es útil a la hora de establecer algún punto adicional en un sector específico de la gráfica.

Construcción a partir de puntos particulares y tabla de signos.

Algunas definiciones que debemos tener en cuenta para construir el gráfico y que escribimos sin demostración.

1. Todo polinomio reducible al producto de factores polinómicos de primer grado y de segundo grado irreducible, tiene por lo menos una raíz real.
2. Cualquier número mayor que, o igual, a la mayor de las raíces de un polinomio se llama *límite superior de las raíces.*
3. Cualquier número menor que, o igual, a la menor de las raíces de un polinomio se llama *límite inferior de las raíces.*
4. Si el coeficiente de x^n es positivo, y si no existen términos negativos en la tercera línea de la división sintética (Regla de Ruffini) de $P(x)$ entre $x - k, k > 0$ entonces k es límite superior de las raíces de $P(x)$.
5. Si el coeficiente de x^n es positivo, y si los signos en la tercera línea de la división sintética de $P(x)$ entre $x - (-k) = x + k, k > 0$ son alternativamente positivos o negativos, entonces - k es límite inferior de las raíces de $P(x)$.
6. Si $signo\left[P(a)\right] \neq signo\left[P(b)\right]$ entonces existe al menos una raíz entre $x = a$ y $x = b$.

7. Si los coeficientes de un polinomio son números enteros, entonces cada una de las raíces racionales, si las tiene, tiene como numerador un factor de a_0 y como denominador un factor de a_n .
8. Si las raíces de un polinomio son irracionales y no se encuentran con la metodología de la definición 7, se pueden obtener valores de ellas tan precisos como se quieran, mediante el método de dividir intervalos en los que la función cambia de signo. (Véase el Apéndice 1)

Ejercicio 3.

Construir el gráfico aproximado de $P(x) = 2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4$

Primer paso. **Localización de las raíces**

La localización de las raíces de un polinomio, no es una tarea sencilla y además es por ensayos. Sin embargo se puede simplificar el procedimiento con la ayuda de las definiciones anteriores.

Límites superior e inferior de las raíces.

Aplicaremos las definiciones 4 y 5 para inferir entre qué valores hay que buscar las raíces del polinomio.

Seleccionemos un número al azar al que suponemos *limite superior*, por ejemplo 3, y realicemos la división sintética de $P(x)$ entre $x - 3$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 1 & -9 & -4 & 4 \\ 3 & & 6 & 21 & 36 & 96 \\ \hline & 2 & 7 & 12 & 32 & 100 \end{array}$$

Los signos de los coeficientes de la tercera línea son todos positivos y por lo tanto 3 es un límite superior de las raíces. Dicho de otra forma, no existen raíces mas allá de 3 o en el intervalo $(3;\infty)$.

Ahora supongamos que creemos que –3 es un *límite inferior*. Ahora la división sintética resulta

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 1 & -9 & -4 & 4 \\ -3 & & -6 & 15 & -18 & 66 \\ \hline & 2 & -5 & 6 & -22 & 70 \end{array}$$

Los signos de la tercera fila cambian alternadamente. Por lo tanto –3 es *límite inferior* y no existen raíces en $(-\infty;-3)$

¿Qué habría pasado si hubiéramos supuesto a 1 como un límite de raíces?

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 1 & -9 & -4 & 4 \\ 1 & & 2 & 3 & -6 & -10 \\ \hline & 2 & 3 & -6 & -10 & -6 \end{array}$$

Al realizar la división sintética que muestra el esquema anterior, los signos de los coeficientes de la tercera fila no son ni todos positivos ni alternadamente positivos y negativos. Por lo tanto $\boldsymbol{x=1}$ no es límite inferior ni superior de las raíces de $\boldsymbol{P(x)}$.

Importante:

tener en cuenta que los procedimientos anteriores requieren que el coeficiente de $\boldsymbol{x^n}$ sea positivo

Como corolario de los procedimientos anteriores, podemos decir que no deben buscarse ceros en $\left\{\boldsymbol{(-\infty;-3)\cup(3;\infty)}\right\}$ lo que constituye un dato importante.
Ahora podemos continuar buscando las raíces según la definición 7 pero desechando todos aquellos cocientes mayores que 3 o menores que –3.

La idea es achicar tanto como se pueda el intervalo en el que buscar las raíces, por lo que el método anterior podría ser repetido las veces necesarias.

Realizado el procedimiento completo, llegamos a que las raíces son $\boldsymbol{x_1=2}$, $\boldsymbol{x_2=-2}$, $\boldsymbol{x_3=-1}$ y $\boldsymbol{x_4=\frac{1}{2}}$. Entonces expresamos el polinomio en forma factorizada como

$$\boldsymbol{P(x)=2(x-2)(x+2)(x+1)(x-1/2)}$$

Segundo paso. **Obtención de puntos particulares.**

Como el dominio de una función polinómica es $\mathbb{R}$ existirá la imagen de $\boldsymbol{x=0}$ y será el punto de corte de la curva con el eje $\boldsymbol{y}$. Así, $\boldsymbol{P(0)=2(-2)(2)(1)(-1/2)=4}$ y el punto $\boldsymbol{E(0;4)}$ pertenecerá a la gráfica buscada. Por otra parte, como las raíces halladas representan los cortes con el eje $\boldsymbol{x}$ los puntos $\boldsymbol{A(2;0)}$, $\boldsymbol{B(-2;0)}$, $\boldsymbol{C(-1;0)}$ y $\boldsymbol{D(\tfrac{1}{2};0)}$ también pertenecerán a la gráfica buscada.

Aquí convendría aclarar que mediante una tabla de valores como la siguiente

x	***f(x)***

Podrían hallarse todos los puntos adicionales que se deseen. Sin embargo, el objeto del presente material es el trazado aproximado para poner en práctica algunas técnicas básicas.

<u>Tercer paso.</u> **Diagrama de signos.**

	$-\infty \leftarrow$				x				$\rightarrow +\infty$
		-2		**-1**	**0**	$\frac{1}{2}$		**2**	
2	+ + + + + + + + +	+	+ + + + +	+	+ + + + + + + + + + +	+	+ + + + + + + +	+	+ + + + + + + + + + + + + + +
$x-2$	- - - - - - - - - -	-	- - - - - -	-	- - - - - - - - - - - - -	-	- - - - - - - -	**0**	+ + + + + + + + + + + +
$x+2$	- - - - - - - - - -	**0**	+ + + +	+	+ + + + + + + + +	+	+ + + + + +	+	+ + + + + + + + + + + +
$x+1$	- - - - - - - - - -	-	- - - - - -	**0**	+ + + + + + + +	+	+ + + + + +	+	+ + + + + + + + + + +
$x-\frac{1}{2}$	- - - - - - - - - -	-	- - - - - -	-	- - - - - - - - - - - -	**0**	+ + + + + +	+	+ + + + + + + + + + + + +
$P(x)$	+ + + + + + + +	**0**	- - - - -	**0**	+ + + + + + + + +	**0**	- - - - - - -	**0**	+ + + + + + + + + + + +

Figura 9

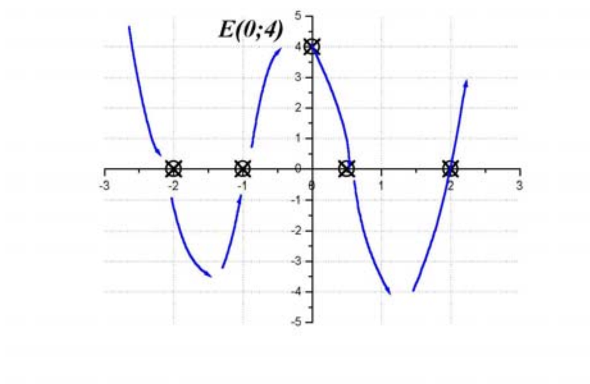
La técnica consiste en dibujar una tabla como la de la figura 9. En sus filas se escriben cada uno de los factores de $P(x)$. El primer factor es 2 que obviamente no depende de *x* y será siempre un número positivo. El segundo factor es $x-2$ que se anula para $x=2$ por lo que debajo de 2, y en la fila correspondiente, ponemos un cero. Para valores de $x<2$ será $x-2<0$, situación que ponemos de manifiesto escribiendo el signo **"-"** en todo el intervalo $(-\infty;2)$. Para valores de $x>2$ será $x-2>0$, entonces escribimos el signo **"+"** en el intervalo $(2;\infty)$. Se realiza el mismo proceso en todos los factores de la función. Finalmente, la última de las filas corresponde a $P(x)$**,** cuyo signo es el resultado de multiplicar los signos de todos los factores que la componen. De esa forma y por ejemplo en el intervalo $(-\infty;2)$, $P(x)>0$ **(+)** , lo que resulta de multiplicar **"+"."-"."-"."-"."-".** Así sucesivamente con cada uno de los intervalos.

Como conclusión para el procedimiento anterior podemos establecer los siguientes <u>*intervalos de positividad y negatividad*</u> para $P(x)$:

$$P(x)\begin{cases} >0 \ \text{ en } \{(-\infty;-2)\cup(-1;1/2)\cup(2;\infty)\} \\ =0 \ \text{ en } \{-2,-1,1/2,2\} \\ <0 \ \text{ en } \{(-2;-1)\cup(1/2;2)\} \end{cases}$$

<u>Cuarto paso.</u> **El gráfico aproximado.**

Pongamos los datos obtenidos en los pasos anteriores en un sistema cartesiano.



Algunas conclusio

Figura 10

1. La gráfica tendrá que pasar por las raíces en $\boldsymbol{x}$: -2, -1, ½ y 2, respectivamente.
2. Como $\boldsymbol{P(x)}$ es positiva **en** $(-\infty;-2)$, tendrá que estar por arriba del eje $\boldsymbol{x}$.
3. Si $x \to -\infty$, $P(x) \to +\infty$. O sea, en la medida que $\boldsymbol{x}$ disminuye $\boldsymbol{P(x)}$ aumenta y entonces la curva será positiva en $(-\infty;-2)$ pero vendrá desde arriba a la izquierda hacia abajo a la derecha.
4. Como $\boldsymbol{P(x)}$ es negativa en $\textbf{(-2;-1)}$, tendrá que estar por abajo del eje $\boldsymbol{x}$. Pasa por $x = \textbf{-2}$ viniendo de arriba pero como tiene que volver a pasar por $x = \textbf{-1}$, en algún momento dejará de bajar para comenzar a subir nuevamente. En ese momento la gráfica de $\boldsymbol{P(x)}$ habrá alcanzado un *mínimo.* Dicho simbólicamente $\exists x \in \textbf{(-2;-1)} / P(x)\ \textbf{es mínimo}$, valor mínimo que para conocerlo deberemos ensayar otros métodos que veremos más adelante.
5. Razonamiento análogo puede hacerse a la gráfica en $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$. Allí $\boldsymbol{P(x)}$ es positiva. Pasa por $x = \textbf{-1}$ viniendo desde abajo, pero como tiene que volver a pasar por $x = \frac{1}{2}$ subirá hasta que $\boldsymbol{P(x)}$ haya alcanzado un valor *máximo*. Simbólicamente $\exists x \in (-1; \frac{1}{2}) / P(x)\ \textbf{es máximo}$, que tampoco conocemos. Por otra parte también sabemos que la curva debe pasar por $\boldsymbol{E(0;4)}$ entonces, ¿pasará primero por $\boldsymbol{E(0;4)}$ para luego alcanzar el máximo o primero logrará su máximo valor para luego pasar por $\boldsymbol{E(0;4)}$?. La pregunta puede contestarse, proponemos que los lectores den la respuesta.
6. Otra vez, idéntico razonamiento permitirá determinar que en intervalo $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ existirá un mínimo y que mas allá de $x = 2$ la función crecerá indefinidamente.

Obtención de los puntos de máximos y mínimos. El problema de la recta tangente.

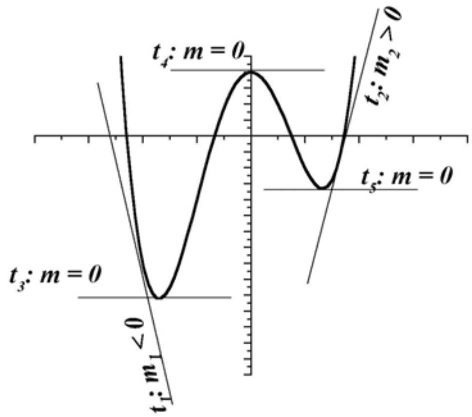


Figura 11

Supongamos tener la gráfica de una función polinómica como en la figura 11. Siendo infinitos los puntos que la componen, serán también infinitas las rectas tangentes que se podrán trazar por ellos a la función dada. Las pendientes de cada una de esas rectas tangentes, podrán ser negativas, positivas o nulas como se muestran en t_1, t_2 y t_3, t_4, t_5 respectivamente. Nos interesan particularmente las rectas tangentes cuyas pendientes, ***m***, valen cero por ser ellas tangentes en puntos en los que función alcanza algún máximo o algún mínimo (obsérvese la figura 11).

Si bien es infinito el conjunto de rectas tangentes que se podrán trazar a la curva, es finito el subconjunto de ellas que tienen pendiente nula, por cuanto una función polinómica tiene un número, también finito, de máximos y mínimos.

Nos proponemos calcular, por el método de las aproximaciones sucesivas de una recta secante, el o los puntos para los cuales la recta tangente tendrá pendiente nula, así podremos saber hasta dónde sube, como máximo, una función o hasta dónde baja, como mínimo.

Pendiente de la recta tangente a una curva.

Recordemos que se llama *pendiente* de una recta a la *tangente trigonométrica* del ángulo que la recta forma con el semieje positivo de las ***x***.

Supongamos tener graficada una función $y = f(x)$ como la de la figura 12. En ella se ha considerado como fijo al punto $P_1(x_1; y_1)$. Supongamos también tener otros puntos pertenecientes a la curva: $P_2(x_2; y_2)$, $P_3(x_3; y_3)$ y $P_4(x_4; y_4)$. Con estos últimos y el punto fijo P_1 tracemos las correspondientes rectas secantes s_1, s_2 y s_3. Las pendientes de estas rectas secantes serán

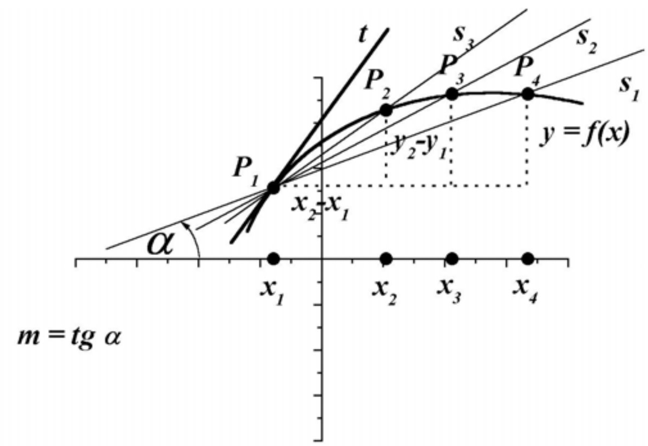


Figura 12

$$m_{s_1} = \frac{y_4 - y_1}{x_4 - x_1} \quad (1)$$

$$m_{s_2} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \quad (2)$$

$$m_{s_3} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (3)$$

Si P_2 se acerca cada vez más a P_1, cuando son infinitesimalmente próximos (pero no coincidentes), la recta secante (en este caso s_3) toma la posición de la recta tangente t. Es decir, puede considerarse a la recta tangente como una recta secante que pasa por dos puntos sumamente próximos, casi "pegados", pero no coincidentes.

El hecho de que P_2 sea un punto infinitesimalmente próximo a P_1 se denota, matemáticamente, como $P_2 \to P_1$ y se lee "P_2 tiende a P_1".
Si $P_2 \to P_1$ entonces, $x_2 \to x_1$ y $y_2 \to y_1$ por lo cual $x_2 \cong x_1$, $y_2 \cong y_1$ .y $m_{s_3} \cong m_t$.
El símbolo "$\cong$" se lee como "aproximadamente igual".

Si bien el Cálculo Infinitesimal se encarga del asunto de la pendiente de una recta tangente, resolveremos el problema de hallarla mediante consideraciones exclusivamente aritméticas y geométricas.

El procedimiento consiste en hallar la pendiente de una recta secante cualquiera y luego, manteniendo uno de sus puntos de intersección con la curva fijo, hacer tender el otro hacia él.

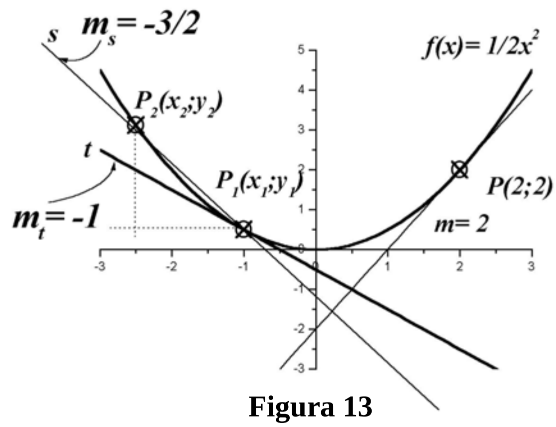


Figura 13

La figura 13 muestra el gráfico de la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2$. P_1 y P_2 pertenecen a ***f(x)*** por lo que debe verificarse que

$$y_1 = \frac{1}{2}x_1^2 \quad (4)$$

$$y_2 = \frac{1}{2}x_2^2 \quad (5)$$

Restando (4) de (5) y operando convenientemente

$$y_2 - y_1 = \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_1^2$$

$$y_2 - y_1 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{2}(x_2 + x_1) \quad (6)$$

El primer miembro de la ecuación (6) no es otra cosa que la pendiente de la recta secante ***s*** que pasa por P_1 y P_2; el segundo miembro, otorga el valor de la misma específicamente para la función dada, como función de ***x***. Así, si $P_1(-1;1/2)$ y $P_2\left(-\frac{5}{2};\frac{25}{8}\right)$, la pendiente de la secante ***s*** que los contiene será

$$m_s = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{2} + 1\right) = -\frac{3}{2}$$

Ahora bien. Si $P_2 \to P_1$ y son infinitesimalmente próximos entonces, $x_2 \to x_1$ y como vimos, $x_2 \cong x_1$,.y $m_s \cong m_t$

Si $x_2 \cong x_1$ la (6) se transforma en

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{2}(x_1 + x_1) = x_1$$

es decir, la secante ***s*** se transformó en la tangente ***t*** y su pendiente será

$$m_t(x_1) = x_1$$

Y generalizando

$$m_t(x) = x$$

<u>Es muy importante notar que la pendiente de la recta tangente también es una función de ***x*** y entonces sólo dependerá de la primer coordenada de cualquier punto de la gráfica.</u> Por ejemplo, la pendiente de la tangente trazada a la curva desde el punto $P_1(-1;1/2)$ será $m_t = -1$ mientras que si queremos encontrar la pendiente de la tangente en el punto $P(2;2)$ será $m_t = 2$.

<u>Función *Derivada*.</u>

<u>*Definición:*</u> se llama ***derivada*** de una función $y = f(x)$ a otra función de ***x*** que representa geométricamente a la ***pendiente de la recta tangente*** trazada desde algún punto que pertenezca al gráfico de ***f(x)***.

<u>Máximos y mínimos a partir de la pendiente de la recta tangente (derivada).</u>

En párrafos anteriores, expresamos que nos interesan particularmente las rectas tangentes a la curva cuyas pendientes, ***m***, valen cero por ser ellas tangentes en algún máximo o en algún mínimo de la función. La gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ de la figura 13 no tiene máximo pero sí tiene un mínimo. Vemos que el mínimo se produce en el vértice de la parábola y que en este caso corresponde al origen de coordenadas. Sin embargo, también podemos demostrarlo matemáticamente. En efecto si $m_t(x) = x$ y si además m_t tiene que valer cero para que el mínimo valor ocurra ¿cuál será el valor de x_1 para que $m_t = 0$?. La respuesta obvia es $x_1 = 0$ para que $m_t = 0$. Reemplazando este valor en $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ obtenemos el punto en el que el mínimo se produce $[0; f(x_1)] = [0; f(0)] = (0;0)$. Por lo tanto**,** queda demostrado que el mínimo se produce en el origen de coordenadas.

Otro ejemplo.

Hallar el punto en el que se produce el valor extremo (máximo o mínimo) de $y = f(x) = -x^2 - 2x - 3$.

Solución.

Si $P_1(x_1;y_1)$ y $P_2(x_2;y_2)$ pertenecen a ***f(x)*** entonces

$$y_1 = -x_1{}^2 - 2x_1 - 3 \quad (1)$$

y

$$y_2 = -x_2{}^2 - 2x_2 - 3 \quad (2)$$

Restando (1) de (2)

$$y_2 - y_1 = -x_2{}^2 - 2x_2 - 3 - \left(-x_1{}^2 - 2x_1 - 3\right)$$

$$y_2 - y_1 = -x_2{}^2 - 2x_2 - 3 + x_1{}^2 + 2x_1 + 3$$

$$y_2 - y_1 = -(x_2{}^2 - x_1{}^2) - 2(x_2 - x_1) - \cancel{3} + \cancel{3}$$

$$y_2 - y_1 = -(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - 2(x_2 - x_1)$$

$$y_2 - y_1 = (x_2 - x_1)\left[-(x_2 + x_1) - 2\right]$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -(x_2 + x_1) - 2$$

Finalmente la pendiente de la secante que pasa por los dos puntos dados es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -x_2 - x_1 - 2$$

Si $P_2 \to P_1$, m se convertirá en la pendiente de la tangente en P_1, o sea

$$m_t(x_1) = -x_1 - x_1 - 2 = -2x_1 - 2$$

$$\textit{derivada} \;\Rightarrow\; m_t(x) = -2x - 2$$

¿Para qué valor se anula la derivada?

$$m_t = -2x_1 - 2 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = -1$$

O sea que en $x_1 = -1$ la función tiene un máximo y su valor será $f(-1) = -2$ y corresponderá al vértice $V(-1;-2)$

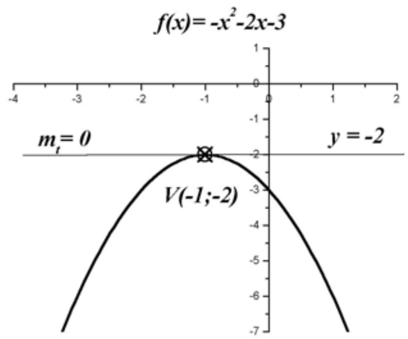


Figura 14

Ahora podríamos volvamos al ejercicio 3 con el objeto de obtener los puntos máximos y mínimos y ser más precisos en la construcción del gráfico.

Ejercicio 3 (continuación)

Recordemos que el problema era construir la gráfica aproximada de

$\boldsymbol{P(x) = 2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4}$.

Habíamos llegado a lo mostrado en la siguiente figura 10.

.

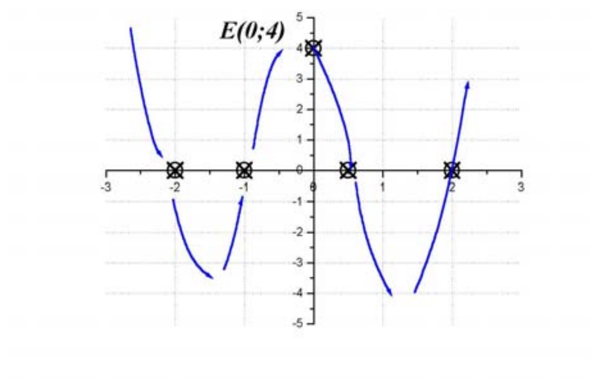


Figura 10

Como en los casos anteriores, hallemos la pendiente de una secante que pase por dos puntos que pertenecen a la gráfica de $\boldsymbol{y = P(x)}$, $\boldsymbol{P_1(x_1; y_1)}$ y $\boldsymbol{P_2(x_2; y_2)}$.

Entonces:

$$\boldsymbol{y_1 = 2x_1^{\ 4} + x_1^{\ 3} - 9x_1^{\ 2} - 4x_1 + 4} \quad (1)$$

$$y_2 = 2x_2^{\ 4} + x_2^{\ 3} - 9x_2^{\ 2} - 4x_2 + 4 \quad (2)$$

Restando (1) de (2)

$$y_2 - y_1 = 2x_2^{\ 4} + x_2^{\ 3} - 9x_2^{\ 2} - 4x_2 + 4 - (2x_1^{\ 4} + x_1^{\ 3} - 9x_1^{\ 2} - 4x_1 + 4)$$

agrupando

$$y_2 - y_1 = 2(x_2^{\ 4} - x_1^{\ 4}) + (x_2^{\ 3} - x_1^{\ 3}) - 9(x_2^{\ 2} - x_1^{\ 2}) - 4(x_2 - x_1) + \cancel{4} - \cancel{4}$$

$$y_2 - y_1 = 2(x_2^{\ 2} - x_1^{\ 2})(x_2^{\ 2} + x_1^{\ 2}) + (x_2 - x_1)(x_1^{\ 2} + x_1x_2 + x_2^{\ 2}) - 9(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - 4(x_2 - x_1)$$

Completando la diferencia de cuadrados, la diferencia de cubos y sacando a $x_2 - x_1$ como factor común

$$y_2 - y_1 = (x_2 - x_1)\left[2(x_2 + x_1)(x_2^{\ 2} + x_1^{\ 2}) + (x_1^{\ 2} + x_2x_1 + x_2^{\ 2}) - 9(x_2 + x_1) - 4\right]$$

Finalmente, la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos dados es

$$m_s = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \left[2(x_2 + x_1)(x_2^{\ 2} + x_1^{\ 2}) + (x_1^{\ 2} + x_1x_2 + x_2^{\ 2}) - 9(x_2 + x_1) - 4\right]$$

que se transforma en pendiente de la tangente en P_1 cuando $P_2 \to P_1$

$$m_t(x_1) = \left[2(x_1 + x_1)(x_1^{\ 2} + x_1^{\ 2}) + (x_1^{\ 2} + x_1x_2 + x_2^{\ 2}) - 9(x_1 + x_1) - 4\right]$$

$$m_t(x_1) = \left[2(2x_1)(2x_1^{\ 2}) + (x_1^{\ 3} + x_1^{\ 3} + x_1^{\ 3}) - 9(2x_1) - 4\right]$$

Finalmente la derivada es

$$m_t(x) = 8x^3 + 3x^2 - 18x - 4$$

Calculamos para qué valor de x se anula la derivada igualándola a cero

$$m_t(x) = 8x^3 + 3x^2 - 18x - 4 = 0$$

resulta que se anula en 3 valores de x como ya lo esperábamos:

$$x_1 \approx -0,22,$$
$$x_2 \approx 1,44$$
$$x_3 \approx -1,59$$

Los extremos corresponderán a

$$\left[x_1; f\left(x_1\right)\right] \approx \left(-0,22;4,44\right) : \underline{\textbf{Máximo}}$$

$$\left[x_2; f\left(x_2\right)\right] \approx \left(1,44;-8,84\right) : \underline{\textbf{Mínimo}}$$

$$\left[x_3; f\left(x_3\right)\right] \approx \left(-1,59;-3,63\right) : \underline{\textbf{Mínimo}}$$

Ahora podemos precisar más el gráfico

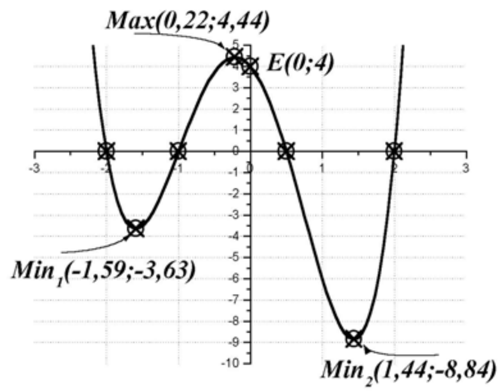


Figura 15

Observación:

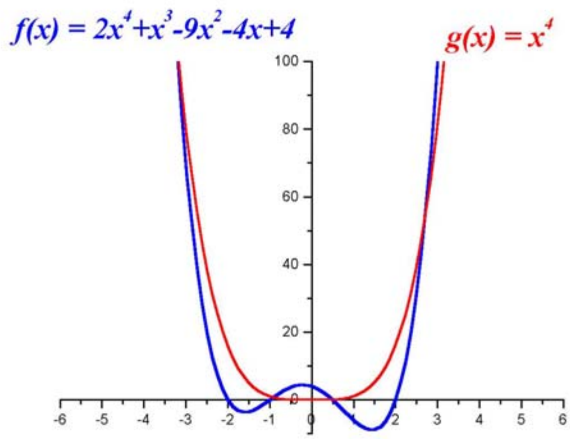


Figura 16

Independientemente de las "perturbaciones" que se produzcan en la gráfica de una función polinómica en el intervalo en el que se encuentran las raíces, obsérvese que mas allá de los límites inferiores y superiores, la gráfica se comporta como el monomio de mayor grado. En la figura 16, puede apreciarse que para valores suficientemente grandes de $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{P(x)} \cong \boldsymbol{g(x)}$ o bien $\boldsymbol{2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4 \cong x^4}$

<u>Método para abreviar el cálculo de la pendiente de la recta tangente (derivada).</u>

Para el ejemplo de la figura 13 tuvimos $\boldsymbol{y = \frac{1}{2} x^2}$ y su derivada fue $\boldsymbol{m(x) = x}$ **(1)**

mientras que para el de la figura 14

$\boldsymbol{y = -x^2 - 2x - 3}$, su derivada fue $\boldsymbol{m(x) = -2x - 2}$ **(2)**

Finalmente, para el ejemplo de la figura 10

$\boldsymbol{y = 2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4}$ obtuvimos como derivada a $\boldsymbol{m(x) = 8x^3 + 3x^2 - 18x - 4}$ **(3)**

Observaciones:

1. todas las pendientes de las respectivas rectas tangentes son una función de ***x***, $\boldsymbol{m = f(x)}$ **.**
2. En todos los casos, la pendiente de una recta tangente está representada por otro polinomio pero un grado menos que el grado de $\boldsymbol{P(x)}$.
3. Obsérvese por ejemplo la ecuación (3). Mientras que el primer término de $\boldsymbol{P(x)}$ es $\boldsymbol{2x^4}$, el primer término de la pendiente es $\boldsymbol{8x^3}$. El segundo de $\boldsymbol{P(x)}$ es $\boldsymbol{x^3}$ y el segundo de la pendiente es $\boldsymbol{3x^2}$. Generalicemos: si un término (monomio) de $\boldsymbol{P(x)}$ tiene la forma de $\boldsymbol{a.x^n}$ el mismo término en $\boldsymbol{m(x)}$ será de la forma $\boldsymbol{n.a.x^{n-1}}$. Obsérvese que en todos los términos se produce la misma transformación, inclusive en el último ya que $\boldsymbol{-4 = -4.x^0}$ en la pendiente se transforma en $\boldsymbol{0.(-4).x^{0-1} = 0}$

Ejemplo de cálculo de la función "pendientes de la recta tangente" en polinomios.

Calcular la función que representa la pendiente de la recta tangente en $\boldsymbol{f(x) = x^4 + x^2 - 1}$.

Solución.

La función puede ser escrita como $\boldsymbol{f(x) = x^4 + x^2 - 1x^0}$, entonces

$$\boldsymbol{m(x) = 4.x^{4-1} + 2.x^{2-1} - 0.1.x^{0-1}},$$

y finalmente,

$$\boldsymbol{m(x) = 4.x^3 + 2.x}.$$

¿En qué puntos ***f(x)*** tendrá algún máximo o algún mínimo?. En los puntos en que la pendiente sea nula, entonces

$$\boldsymbol{m(x) = 4x^3 + 2x = x(4x^2 + 2) = 0}.$$

Ahora bien, ***m(x)*** se anulará cuando $\boldsymbol{x=0}$ o cuando $\mathbf{(4}\boldsymbol{x}^{2}\mathbf{+2)=0}$. Como este último es un factor de segundo grado irreducible, la única solución al problema es $\boldsymbol{x=0}$. Es decir, existirá un solo punto probable de "extremo" en $\mathbf{[0;}\ \boldsymbol{f}\mathbf{(0)]=(0;-1)}$.

El punto $\mathbf{[0;}\ \boldsymbol{f}\mathbf{(0)]=(0;-1)}$, ¿será un máximo o un mínimo?. Para contestar la pregunta, debemos ver qué pasa en los alrededores de $\boldsymbol{x=0}$, el punto en el que la pendiente se anula. Hagamos siguiente análisis: si por ejemplo $\boldsymbol{x=1}$ será $\boldsymbol{f}\mathbf{(1)=1^4+1^2-1=1}$. Acerquémonos un poco más a $\boldsymbol{x=0}$, por ejemplo $\boldsymbol{x}=\mathbf{1/5}$ entonces, $\boldsymbol{f}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\right)=\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\right)^{4}+\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\right)^{2}-\mathbf{1}=-\frac{\mathbf{599}}{\mathbf{625}}$. Es decir, en la medida que nos acercamos a $\boldsymbol{x=0}$ la función va decreciendo. Entonces en $\boldsymbol{x=0}$ hay un mínimo.

La siguiente figura 17, muestra lo dicho.

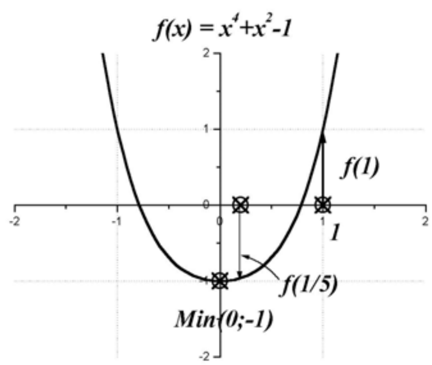


Figura 17

APENDICE 1

Método iterativo para obtener raíces reales en funciones polinómicas.

Cuando un polinomio tiene coeficientes racionales, la búsqueda de las raíces se inicia haciendo el cociente $\frac{a_0}{a_n}$ y probando si $P\left(\frac{a_0}{a_n}\right)=0$. Si no se verifica, entonces buscamos en los cocientes que se pueden generar con todos los divisores de a_0 y a_n, tratando de encontrar con cada uno de ellos, al menos una raíz. Sin embargo, no todos los polinomios de coeficientes racionales tienen raíces racionales. Mostraremos aquí un método para obtener raíces irracionales tan precisas como se deseen.

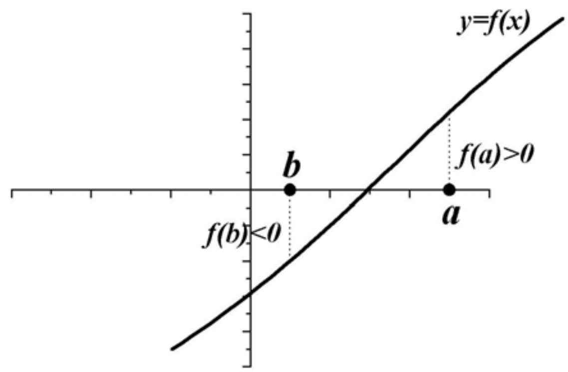


Figura 1

Definición:

*si en un cierto intervalo $[b;a]$ una función $y=f(x)$ cambia de signo, entonces existe al menos un cero de **f(x)** en $(b;a)$. (Figura 1). Dicho de otra forma, si entre dos valores de **x**, **f(x)** cambia de signo (y es polinómica), entonces la gráfica de **f(x)** cortará al eje **x** por lo menos una vez.*

El método para encontrar una raíz, consiste en dividir en mitades los intervalos en los que ***f(x)*** cambia de signo, ya que por la definición anterior en ellos se halla un cero.

Ejemplo.

Hallar una raíz de $P(x)=4x^3-6x^2+9x-3$ con un error menor a una centésima ($|e|<0{,}01$). (Se sabe que existe una raíz en $(0;1)$)

Paso	*x*	*P(x)*	
1	**0**	**-3**	
2	**1**	**4**	
3	**0,5**	**0,5**	
4	**0,25**	**-1,0625**	
5	**0,375**	**-0,257813**	
6	**0,4375**	**0,124023**	
7	**0,40625**	**-0,657959**	
8	**0,421875**	**0,029343**	
9	**0,4140625**	**-0,018116**	
10	**0,4179688**	**0,005605**	$\|e\| < 0,01$
11	**0,4160156**	**-0,006276**	
12	**0,4169922**	**-0,000335**	$\|e\| < 0,001$
	…………	**……….**	

En los pasos 1 y 2 vemos que los signos de $\boldsymbol{P(0)}$ y $\boldsymbol{P(1)}$ son distintos entonces, por la definición anterior, existirá en $\mathbf{(0;1)}$ al menos un cero de $\boldsymbol{P(x)}$.

<u>Nota importante:</u> Si no se hubiera encontrado, como en el paso 2, un cambio de signo se busca otro valor de $\boldsymbol{x}$ y, se prueba nuevamente hasta encontrarlo, <u>si existe</u>. Sin embargo, se debe tener en cuenta que si el grado del polinomio es **<u>par</u>** pueden **<u>no existir</u>** raíces reales, mientras que si es impar, al menos habrá una.

Como en $\mathbf{(0;1)}$ existe una raíz puesto que la función cambia de signo, se divide en dos el intervalo para dar lugar al paso 3. Observar que en el paso 3 no se encontró cambio de signo respecto del paso 2, entonces no existe raíz en $\mathbf{(0.5;1)}$ pero si en $\mathbf{(0;0.5)}$ por lo que se divide en 2 este último intervalo y se ejecuta el paso 4.

Se continúa con el procedimiento hasta encontrar un valor de $\boldsymbol{x}$ que satisfaga las condiciones requeridas. Para nuestro caso esto se obtiene en el paso 10 ya que $\boldsymbol{P(0{,}4179688) \cong 0{,}005605 < 0{,}01}$. Si se quisiera mayor precisión, por ejemplo $\boldsymbol{|e| = 0{,}001}$ lo conseguimos en el paso 12.

A los efectos prácticos, podríamos decir que $\boldsymbol{x = 0{,}418}$ es uno de los ceros buscados.

Procediendo con el método tradicional para encontrar los otros ceros

	4	**-6**	**9**	**-3**
0,418		**1,672**	**-1,809104**	**3,005794528**
	4	**-4,328**	**7,190896**	$\boxed{\textbf{R=0,005794528}}$

Si consideramos que el resto es nulo ($\boldsymbol{R \cong 0}$), podremos escribir

$$\boldsymbol{P(x) = 4x^3 - 6x^2 + 9x - 3 = (x - 0,418)(4x^2 - 4,328x + 7,190)}$$

Se han encontrado todas las raíces reales, por cuanto el segundo factor es de segundo grado irreducible.

Ejercicios.

Encontrar una raíz real en cada uno de los siguientes polinomios:

1. $\boldsymbol{P(x) = x^2 + 2x - 1;}$ **Rta.:** $\boldsymbol{x \cong 0,414213}$
2. $\boldsymbol{Q(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4;}$ **Rta.:** $\boldsymbol{x \cong -1,650629}$
3. $\boldsymbol{H(x) = 2x^3 - x^2 - 3x + 1;}$ **Rta.:** $\boldsymbol{x \cong 0,3210368}$
4. $\boldsymbol{K(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - 1}$ **Rta.:** $\boldsymbol{x \cong 0,601887}$

APENDICE 2

Localización de las raíces de un polinomio.

Valor numérico o especialización de un polinomio.

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0 x^0$ entonces, para un valor determinado de x por ejemplo $x = x_0$, se llama *valor numérico o especialización de* ***P(x)*** al valor que éste adquiere cuando se reemplaza en él a x por x_0. Así, $P(x_0) = a_n {x_0}^n + a_{n-1} {x_0}^{n-1} + ... + a_0 {x_0}^0$. Por ejemplo El valor de $P(x) = x^2 + 2x + 1$ cuando $x = 3$ será $P(3) = 3^2 + 2.3 + 1 = 16$.

Raíz o cero de un polinomio.

Se llama *raíz o cero* de un polinomio, al valor de la indeterminada (en nuestros casos ***x***) que determinan que el valor numérico de ***P(x)*** sea nulo. Por ejemplo, en el polinomio $Q(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-2)(x+7)$ se puede verificar que $x_1 = -1$ $x_2 = 2$ y $x_3 = -7$ son ceros de ***Q(x)*** por cuanto $Q(-1) = Q(2) = Q(-7) = 0$.

Teorema del residuo.

Si se divide un polinomio ***P(x)*** entre $x - a$, hasta obtener un residuo independiente de ***x***, entonces ese residuo es $P(a)$.

Ejemplo: Si dividimos a $P(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$ entre $x - 3$ obtenemos

	1	**-2**	**-4**	**5**
3		**3**	**3**	**-3**
	1	**1**	**-1**	**R=2**

Como $P(x) = Q(x)(x-a) + R$ será $P(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 5 = (x^2 + x - 1)(x-3) + 2$. Es decir, $R = 2$. ¿Podríamos haber determinado el residuo de la división sin necesidad de ejecutarla?. Sí, porque $P(3) = 2 = R$.

Teorema del factor y su reciproco.

Teorema del factor. Si r es una raíz de $P(x) = 0$ entonces $P(r) = 0$. Por lo tanto, de acuerdo con el teorema del residuo, $R = 0$ y $P(x) = Q(x)(x-r)$. De esta manera, $x - r$ es un factor de $P(x)$.

Recíproco del teorema del factor. Recíprocamente, si $x - r$ es factor de $P(x)$, entonces el residuo que resulta de dividir a $P(x)$ entre $x - r$ es igual a cero y por lo tanto ***r*** es una raíz de $P(x) = 0$.

Localización de las raices de un polinomio.

Se puede demostrar que la gráfica de una función polinómica es continua y en base a ello se tiene la siguiente regla: *si* $P(a)$ *y* $P(b)$ *difieren en signo, entonces existen un numero impar de raíces reales de* $P(x)=0$ *entre* $x-a$ *y* $x-b$

Numero de raices. Teorema fundamental del Álgebra.

El teorema fundamental del Álgebra establece que *toda ecuación racional, tiene por lo menos una raíz.*

Teorema sobre el número de raíces: *una ecuación racional entera de grado* $\boldsymbol{n}$*, tiene exactamente* $\boldsymbol{n}$ *raíces entre las cuales una raíz múltiple de grado* $\boldsymbol{s}$ *se cuenta como* $\boldsymbol{s}$ *raíces.*

Limite de las raices reales.

Limite superior. Cualquier número mayor que, o igual, a la mayor de las raíces de un polinomio se llama *límite superior de las raíces.* Si el coeficiente de x^n es positivo, y si no existen términos negativos en la tercera línea de la división sintética (Regla de Ruffini) de $P(x)$ entre $x-k, k>0$ entonces k es límite superior de las raíces de $P(x)$.

Limite inferior. Cualquier número menor que, o igual, a la menor de las raíces de un polinomio se llama *límite inferior de las raíces.* Si el coeficiente de x^n es positivo, y si los signos en la tercera línea de la división sintética de $P(x)$ entre $x-(-k)=x+k, k>0$ son alternativamente positivos o negativos, entonces **-** k es límite inferior de las raíces de $P(x)$.

Raices racionales de una ecuación racional entera (Teorema de Gauss).

Si los coeficientes de $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_0 = 0$ *son números enteros, entonces si existen raíces racionales cada una de ellas, en su mínima expresión, tiene como numerador un factor de* a_0 *y como denominador un factor de* a_n

Por ejemplo, en $P(x)=2x^4+x^3-9x^2-4x+4=0$ los numeradores de las raíces racionales que pudiesen existir pueden ser $\pm 1, \pm 2$ y ± 4 mientras que los denominadores de dichas raíces pueden ser ± 1 y ± 2. Por lo tanto, las posibilidades de raíces racionales son $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{2}{2}, \pm\frac{4}{2}$.

Puede ocurrir que tengamos polinomios cuyos coeficientes no son enteros pero que igualmente podamos aplicar este procedimiento. Por ejemplo si contamos con $Q(x)=\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{5}x^3-x^2-2x+1=0$ y lo multiplicamos primero por 2 y luego por 5 (o sea por 10) obtendremos $Q'(x)=5x^4+6x^3-10x^2-20x+20=0$

Ecuación degradada de un polinomio.

Si r es una raíz de $P(x)=0$, entonces $Q(x)=\dfrac{P(x)}{x-r}=0$ se llama *ecuación degradada de* ***P(x),*** *correspondiente a* ***r.*** El cociente indicado puede obtenerse por división sintética.

La ecuación degradada es muy útil al investigar las otras raíces de la ecuación original, ya que cualquier raíz de $P(x)=0$, distinta de r, es también raíz de $Q(x)=\dfrac{P(x)}{x-r}=0$.
Además, si r es raíz múltiple de $P(x)=0$ y su multiplicidad es m, entonces es raíz múltiple de $Q(x)=\dfrac{P(x)}{x-r}=0$ y su multiplicidad es, en este caso, ***m-1***.
El grado de la ecuación degradada es igual al grado de la ecuación original menos uno.

Procedimiento para obtener todas las raíces racionales.

1. Se enlistan todas las posibilidades de raíces racionales, ordenadas de acuerdo con su magnitud.
2. Se ensaya la menor de las posibles raíces enteras positivas, luego la inmediatamente mayor a ésta y así sucesivamente hasta que se hayan encontrado todas las raíces enteras positivas o un limite de las mismas.
   (a) Si se encuentra un límite, se descartan todas las posibles raíces que sean mayores.
   (b) Si se encuentra una raíz, se emplea la ecuación degradada para los cálculos posteriores.
3. Se ensayan las posibilidades fraccionarias y que estén dentro de los limites encontrados, si se ha encontrado alguno.
4. Se repiten los paso 2 y 3 para raíces negativas.

Nota: si al emplear la ecuación degradada se obtiene una ecuación de segundo grado, sus raíces se obtienen de la forma usual: $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Regla de los signos de Descartes.

El numero de raíces positivas de una ecuación racional entera $P(x)=0$, *no es mayor que el numero de variaciones de signos de* $P(x)$. *El numero de raíces negativas de* $P(x)=0$ *no es mayor que el numero de variaciones de signos de* $P(-x)$

Ejemplo.

Encontrar el numero máximo de raíces positivas y negativas de $P(x)=x^4-3x^3-5x^2+7x-3=0$

Solución.

$\boldsymbol{P(x) = x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 7x - 3}$ tiene 3 variaciones de signo, por lo tanto en la ecuación $\boldsymbol{P(x) = x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0}$ el numero máximo de raíces positivas es tres.

Por otra parte, $\boldsymbol{P(-x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 7x - 3}$ contiene sólo un cambio de signo, por lo tanto el número máximo de raíces negativas que puede tener es uno.