UNIDAD Nº: 5 - CUADRICAS

Definición: Se llama ecuación general completa de segundo grado con tres variables, a toda expresión de la forma:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

con: $\forall\, a_{ij} \in R$ con $i \in I$ y $j \in I$ $\wedge$ $(a_{11} \neq 0 \vee a_{22} \neq 0 \vee a_{33} \neq 0 \vee a_{12} \neq 0 \vee$ $\vee\ a_{13} \neq 0 \vee a_{23} \neq 0)$

Las ecuaciones que responden a esta forma, se llaman superficies cuádricas o smplemente cuádricas.

Efectuando transformaciones adecuadas (rotaciones de ejes y/o traslaciones de ejes), es posible llevar la ecuación a una de las siguientes formas:

$$M.x^2 + N.y^2 + P.z^2 = R \quad - \text{ Cuádrica con centro}$$

o bien

$$M.x^2 + N.y^2 = S.z \quad - \text{ Cuádrica sin centro}$$

CUADRICAS CON CENTRO

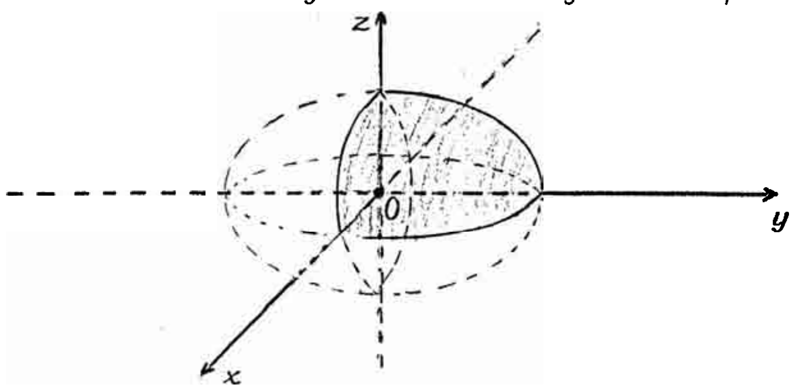
Si: $M \neq 0 \wedge N \neq 0 \wedge P \neq 0 \wedge R \neq 0$, la ecuación: $Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = R$, puede escribirse de la forma:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$$

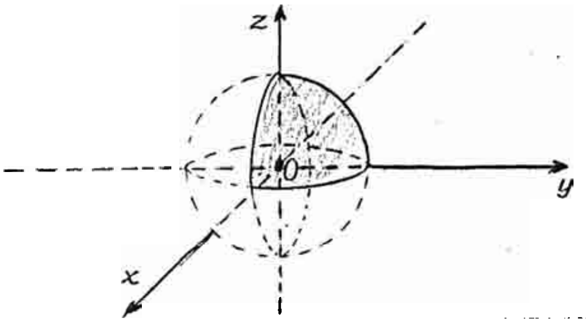
que según los signos de los coeficientes, la ecuación corresponde a la representación de distintas cuádricas:

a) Si todos los coeficientes son positivos: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

su representación gráfica corresponde a un ELIPSOIDE
(En todos los casos para determinar la gráfica, resulta conveniente estudiar las intersecciones con los ejes coordenados y con los planos coordenados)



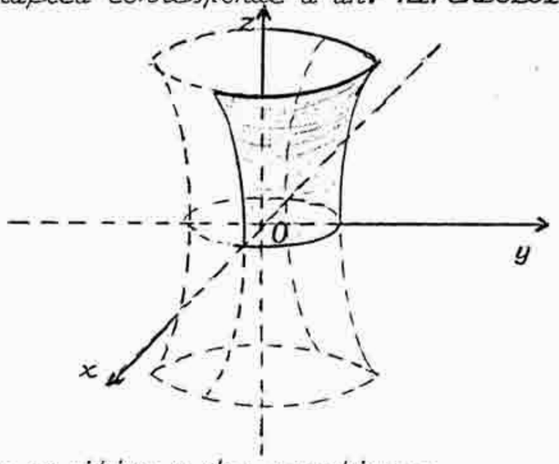
Si: $a = b = c$, la representación gráfica corresponde a una ESFERA



b) *Si dos ceoficientes son positivos y uno negativo:*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1} \quad \vee \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \vee \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

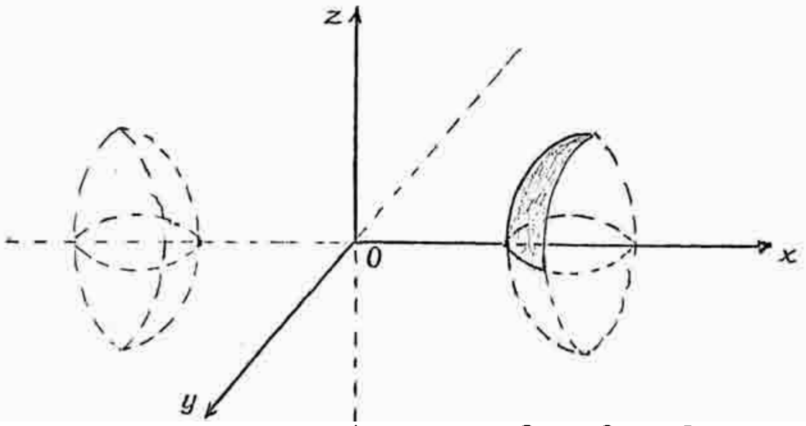
Su representación gráfica corresponde a un: **HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA**



c) *Si un coeficiente es positivo y dos negativos:*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1} \quad \vee \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \vee \quad -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

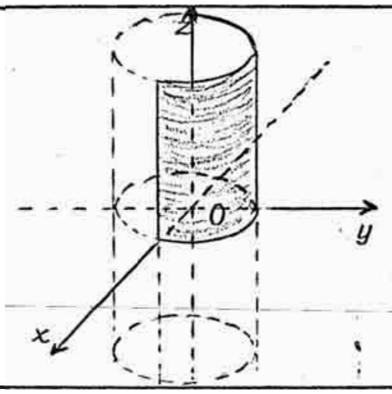
su representación gráfica corresponde a un: **HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS**

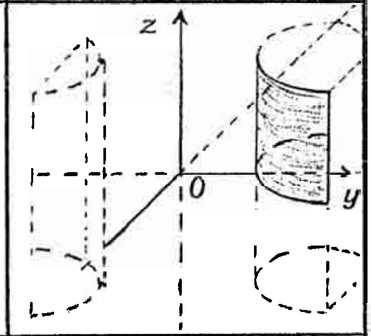
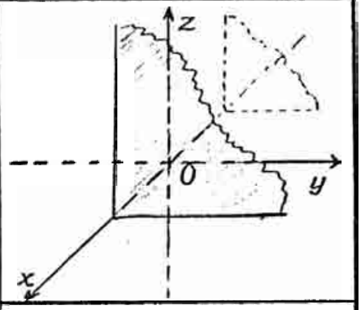
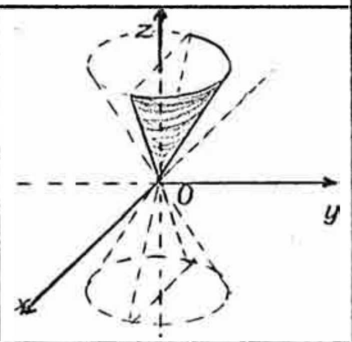
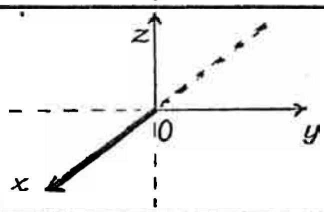
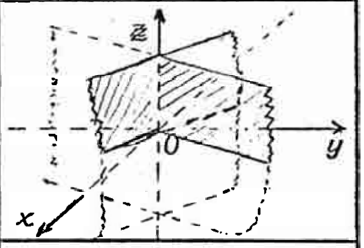
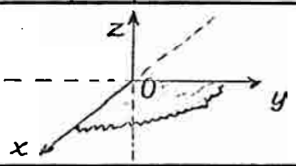


d) *Si todos sus coeficientes son negativos:* $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

No representa lugar geométrico.

Hasta aquí analizamos los casos en que todos los ceoficientes de: $Mx^2+Ny^2+Pz^2=R$ *son distintos de cero. Pero es posible que alguno de ellos se anule, lo cual determina diferentes lugares geométricos, que podemos resumirlos en:*

R	Coeficientes: M , N , P	Lugar geométrico	Representación gráfica
> 0	Uno cero y dos positivos	CILINDRO ELIPTICO RECTO (Caso particular: CILINDRO CIRCULAR RECTO). $Mx^2+Ny^2=R$	

> 0	Uno cero y dos negativos	Ningún lugar geométrico	
	Uno cero, uno positivo y uno negativo	CILINDRO HIPERBOLICO RECTO $Mx^2 - Ny^2 = R$	
	Dos ceros y uno positivo	DOS PLANOS PARALELOS NO COINCIDENTES $Mx^2 = R$	
	Dos ceros y uno negativo	Ningún lugar geométrico	
$= 0$	Todos del mismo signo	UN PUNTO: EL ORIGEN DE COORDENADAS	
	Dos positivos y uno negativo	CONO RECTO $Mx^2 + Ny^2 - Pz^2 = 0$	
	Uno cero y los otros dos del mismo signo	UNO DE LOS EJES COORDENADOS $Ny^2 + Pz^2 = 0$	
	Uno cero y los otros dos de signos contrarios	DOS PLANOS QUE SE CORTAN $Mx^2 - Ny^2 = 0$	
	Dos ceros	UNO DE LOS PLANOS COORDENADOS $Pz^2 = 0$	
< 0	Se busca la ecuación equivalente, multiplicando miembro a miembro por: -1 y se considera el análisis de los diferentes casos para: $R > 0$.		

CUADRICAS SIN CENTRO

Si: $M \neq 0 \wedge N \neq 0 \wedge S \neq 0$, la ecuación: $Mx^2 + Ny^2 = S.z$, puede escribirse de la forma:

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = c.z$$

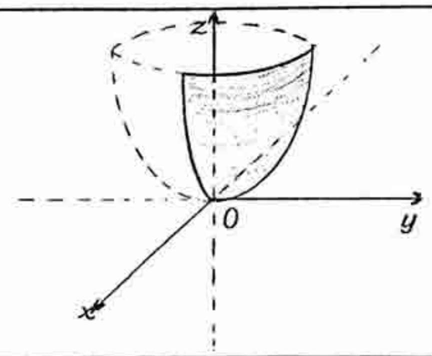
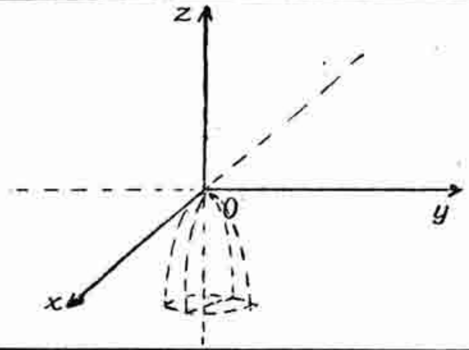
Si efectuamos el análisis de los diferentes signos posibles de los coeficientes se obtienen las siguientes cuádricas:

a) Si los coeficientes de los términos de segundo grado son del mismo signo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c.z \quad \vee \quad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = c.z$$

su representación gráfica, corresponde a un: PARABOLOIDE ELIPTICO

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c.z$$

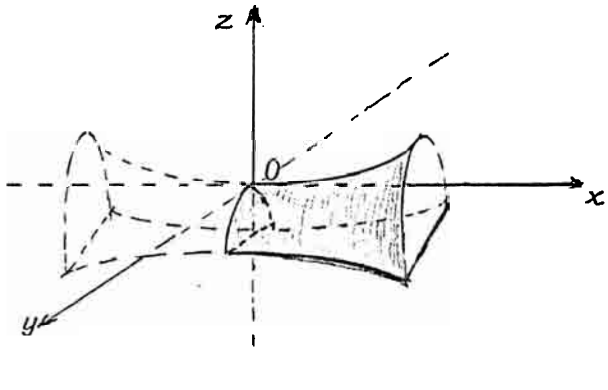
$c > 0$	$c < 0$
	

b) Si los coeficientes de los términos de segundo grado, son de signos contrarios:

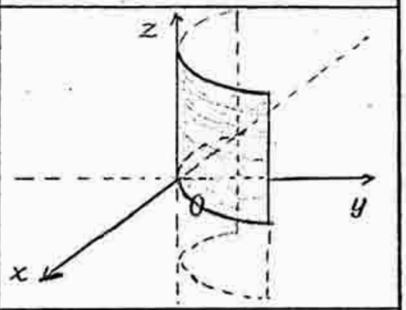
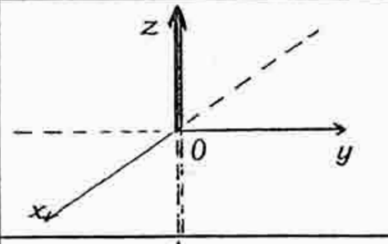
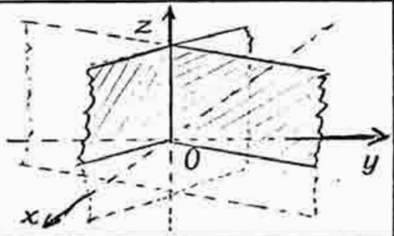
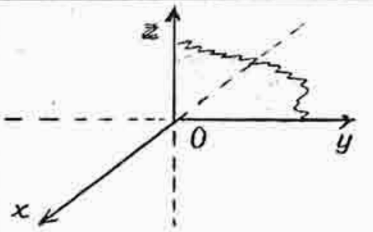
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = c.z \quad \vee \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c.z$$

su representación gráfica, corresponde a un: PARABOLOIDE HIPERBOLICO

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = c.z \quad \text{con} \quad c > 0$$



Si alguno de los coeficientes de: $Mx^2 + Ny^2 = S.z$, se anula, analizamos estos casos, resumiendo las diferentes posibilidades en el siguiente cuadro:

S	Coeficientes: M , N	Lugar geométrico	Representación gráfica
> 0	Uno cero	CILINDRO PARABOLICO RECTO $Ny^2 = S.z$	
$= 0$	Del mismo signo	UNO DE LOS EJES COORDENADOS $Mx^2 + Ny^2 = 0$	
	Signos opuestos	DOS PLANOS QUE SE CORTAN $Mx^2 - Ny^2 = 0$	
	Uno cero	UNO DE LOS PLANOS COORDENADOS $Mx^2 = 0$	
< 0	Se obtiene una ecuación equivalente, multiplicando a ambos miembros por -1 y su estudio coincide con $S > 0$.		

EXPRESION MATRICIAL DE LA ECUACION GENERAL COMPLETA DE SEGUNDO GRADO CON TRES VARIABLES

Recordamos que la misma tiene la forma:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

y es posible expresarla como:

$$X^t.A.X = 0$$

donde:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Pero también es posible expresar la ecuación general completa de segundo grado en tres variables, en la forma:

$$X^t.A_{44}.X + 2.A_4^t.X + a_{44} = 0$$

donde:

$$A_{44} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

manteniendose A_{44} matriz simétrica.

INVARIANTES

En toda ecuación de segundo gardo con tres variables, es posible distinguir cuatro invariantes:

1) **Invariante cuadrático: det (A)**
2) **Invariante cúbico: det (A_{44})**
3) **Invariante bicuadrático:**

$$J = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

4) **Invariante lineal: tr (A_{44})**

Mediante una transformación afín ortogonal, es posible expresar la ecuación:

$$X^t.A.X = 0$$

en:

$$(X')^t.A'.X' = 0$$

donde: $A' = (B^{-1})^t.A.B^{-1}$, siendo B matriz ortogonal.

Para eliminar los términos rectángulares de la ecuación general de segundo grado en tres variables, es necesario efectuar una rotación y luego para eliminar los términos lineales una traslación.

Efectuadas estas transformaciones, la ecuación general de segundo grado con tres variables, queda reducida a la forma canónica:

$$\lambda_1.x^2 + \lambda_2.y^2 + \lambda_3.z^2 + \lambda_4 = 0 \qquad \text{con: } \det(A_{44}) \neq 0$$

donde: λ_1, λ_2 y λ_3 son los autovalores de A_{44} y:

$$\lambda_4 = \frac{\det(A)}{\det(A_{44})}$$

y además:

$$\det(A) = \det(A') = \lambda_1.\lambda_2.\lambda_3.\lambda_4$$

$$\det(A_{44}) = \det(A'_{44}) = \lambda_1.\lambda_2.\lambda_3$$

$$J = J' = \lambda_1.\lambda_2 + \lambda_1.\lambda_3 + \lambda_2.\lambda_3$$

$$I = I' = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

luego el polinomio característico de A_{44}, queda expresado mediante:

$$\lambda^3 - I.\lambda^2 + J.\lambda - \det(A_{44}) = 0$$

Si: $\det(A_{44}) = 0$ y $\det(A) \neq 0$ y $J \neq 0$, la ecuación queda reducida a:

$$\lambda_1.x^2 + \lambda_2.y^2 + 2.a'_{34} = 0$$

siendo: λ_1, λ_2 y λ_3, los autovalores de A_{44} y: $a'_{34} = \sqrt{-\det(A)/J}$

CLASIFICACION DE CUADRICAS
SEGUN EL VALOR DE LOS INVARIANTES

1) Si: $\det(A_{44}) \neq 0$ (cuádricas con centro)

a) signo de I = signo de $\det(A_{44})$ $\wedge$ $J > 0$ $\wedge$ $\det(A) > 0$: **elipsoide imaginario**

b) signo de I = signo de det (A_{44}) $\wedge$ $J > 0$ $\wedge$ det $(A) < 0$: **elipsoide real**

c) signo de I = signo de det (A_{44}) $\wedge$ $J > 0$ $\wedge$ det $(A) = 0$: **cono imaginario**

d) det $(A) > 0$: **hiperboloide de una hoja**

e) det $(A) < 0$: **hiperboloide de dos hojas**

f) det $(A) = 0$: **cono real**

2) Si: **det $(A_{44}) = 0$ (cuádricas sin centro único)**

a) det $(A) \neq 0$ $\wedge$ $J > 0$: **paraboloide elíptico**

b) det $(A) \neq 0$ $\wedge$ $J < 0$: **paraboloide hiperbólico**

c) det $(A) = 0$ $\wedge$ $J > 0$: **cilindro elíptico o par de planos imaginarios**

d) det $(A) = 0$ $\wedge$ $J < 0$: **cilindro hiperbólico o par de planos reales**

e) det $(A) = 0$ $\wedge$ $J = 0$: **cilindro parabólico o par de planos paralelos**

-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-

UNIDAD Nº: 5 - TRANSFORMACIONES LINEALES

Trabajo práctico - Cuarta parte

1) Halle la ecuación canónica de cada una de las siguientes cuádricas, identifíquela y efectue su representación gráfica, si:

a) $2x^2 - 3y^2 + 4z^2 - 8x - 6y + 12z - 10 = 0$

b) $2x^2 - 3y^2 - 4z^2 - 12x - 6y - 21 = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 6x - 2y + z - 13 = 0$

d) $2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y - 4z - 3 = 0$

e) $x^2 - y^2 - 2x - 4y - z + 4 = 0$

2) Hallar la ecuación del elipsoide con centro en el origen y pasa por los puntos: $A(2;2;4)$, $B(0;0;6)$ y $C(2;4;2)$. Representarlo.

3) Hallar la ecuación del hiperboloide de dos hojas, con centro en el origen, con ejes coincidentes con los ejes coordenados y que pasa por los puntos: $P_0(3;1;2)$, $P_1(2;\sqrt{11};3)$ y $P_3(6;2;\sqrt{15})$.

4) Hallar la ecuación del paraboloide con vértice en el origen, con eje coincidente con el eje "z" y pasa por los puntos: $P_0(1;0;1)$ y $P_1(0;2;1)$.

5) Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al eje "x", sea el triple de la correspondiente al punto $P(2;3;-3)$.

6) Por medio de una rotación, eliminar los términos rectángulares y expresar la ecuación en el nuevo sistema de ejes coordenados, identificandola:

a) $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 80x - 60y = 0$

b) $2x^2 + 3y^2 + 23z^2 + 72xz + 150 = 0$

c) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 5 = 0$

d) $144x^2 + 100y^2 + 81z^2 - 216xz - 540x - 720z = 0$

e) $xy + yz + xz = 1$

7) Para cada una de las siguientes ecuaciones se pide:

i) Identificar la forma cuadrática, la lineal y el término independiente:

ii) Expresarla en forma matricial (Recuerde: $X^t.A_{44}.X + 2.A_4^t.X + a_{44} = 0$).

iii) Determine los autovalores correspondientes a A_{44} y la correspondiente matriz que la diagonaliza ortonormalmente y aplicar estos resultados para expresar la ecuación en un nuevo sistema de ejes $(X';Y';Z')$.

iv) Escribir la ecuación anterior en un nuevo sistema $(X'';Y'';Z'')$, donde se eliminan los términos lineales.

v) Reconocer los invariantes y según sus valores clasificar a la cuadrica.

vi) Representar la cuádrica utilizando la ecuación expresada en el sistema: $(X'';Y'';Z'')$.

a) $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy - 9 = 0$

b) $x^2 - y^2 - z^2 + 2yz + x + y - z - 5 = 0$

c) $x^2 + z^2 + 2xz \pm 2x + 2z = 0$

d) $2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 4z = -9$

e) $7x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz - 12x + 12y + 60z - 24 = 0$

f) $2x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz + 2yz + 10x - 26y - 2z = 0$

g) $2xy - 6x + 10y + z - 31 = 0$

-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-