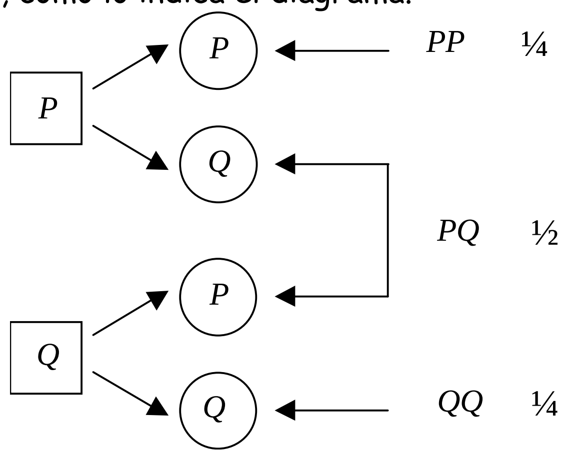
Problema correspondiente al curso de Álgebra y Geometría Analítica de primer año de las carreras de Ingeniería en la UTN Facultad Regional Haedo

Sistemas dinámicos discretos y matrices

Se conoce como sistema dinámico discreto a un modelo que describe la evolución temporal de un sistema pero en el cual los cambios que se producen se consideran en tiempos específicos. Consideraremos la siguiente situación para conceptualizar procesos de evolución discreta y la utilización de matrices para su representación y posterior análisis y resolución. La idea del ejemplo está inspirada en el artículo "*Artificial Inbreeding*" de Ronald A. Knigth, publicado en los *Proceedings Summer Conference for College Teachears on Applied Mathematics* (Universidad de Missouri-Rolla), pags. 188-192.

Supongamos que se desea que cierta clase de planta crezca y que todas la plantas sean lo más parecidas posible. Se aspira a cosechar plantas que sean todas del tipo PP o todas del tipo QQ. Las plantas están sometidas a continua autofecundación. Sea a_0 la fracción del número original de las plantas que son del tipo PP, sea b_0 la fracción de plantas originales del tipo PQ y sea c_0 la fracción de plantas originales del tipo QQ. Entonces $a_0 + b_0 + c_0 = 1$, y $a_0, b_0, c_0 \in [0, 1]$.

Las plantas del tipo PP producen plantas del tipo PP. Igualmente, las plantas tipo QQ sólo producen plantas del tipo QQ. Las plantas del tipo PQ producen una cuarta parte del tipo PP, una cuarta parte del tipo QQ y la mitad del tipo PQ, como lo indica el diagrama.



¿Se puede conocer el estado de la población en una generación en particular conocido el estado inicial? ¿Cómo se puede representar la dinámica del sistema? ¿Se consigue a largo plazo cosechar plantas que no sean del tipo PQ?

Nota: Si el problema parece demasiado botánico, bastará con cambiar pocas palabras, por ejemplo plantas por células y población por red y se estará, por ejemplo, analizando parte del diseño de una red neuronal artificial.

Se puede presentar una situación alternativa más simple de seguir.

Los habitantes de cierta localidad se abastecen en tres negocios del mismo ramo identificados con las letras A, B y C. Al iniciar el estudio las fracciones de los números de clientes correspondientes a los establecimientos A, B y C son, respectivamente, a_0, b_0 y c_0.

Se hace un relevamiento semanal de la distribución de clientes entre los negocios disponibles. Se encuentra que el negocio B pierde la mitad de sus clientes en cada semana (período de observación), y que los mismos se distribuyen en partes iguales en los otros dos establecimientos. A y C adicionan a la proporción de clientes que originalmente tenían los que provienen de B.

1) ¿Qué restricciones tienen las constantes a_0, b_0 y c_0?
2) La información dada, ¿garantiza que un habitante que originalmente se abastece en A, por ejemplo, lo haga siempre en ese negocio?
3) Proponer una representación gráfica de la dinámica del sistema.
4) ¿Se puede conocer la distribución de la población de clientes (estado del sistema) en una semana en particular (*n*-ésimo período) conocido su estado inicial? Proponer una representación matricial.
5) ¿Cuántos períodos de observación pasan hasta que el negocio B se queda con 1/32 de la proporción de clientes que tenía al inicio del estudio?
6) ¿Qué sucede a largo plazo? Comprobar esta predicción tomando el límite para *n* grande del ítem 4.
7) Discutir algunas limitaciones tiene este modelo con respecto a las situaciones reales que se pueden llegar a presentar.

En el planteo y resolución de este problema es esperable que se produzcan una serie de procedimientos, ya sea en forma libre por parte del alumno o en forma dirigida por el docente, destacándose las siguientes instancias resumidas a continuación.

- ✓ Reconocimiento de las incógnitas y los datos del problema. Utilización de una simbología adecuada.

  Las proporciones de clientes de *A*, *B* y *C* en el *n*-ésimo período, simbolizadas, repectivamente, por a_n, b_n y c_n, esto es una incógnita vectorial de tres componentes de la forma

  $$X_n^T = [a_n \quad b_n \quad c_n],\ n \in \mathbf{N}.$$

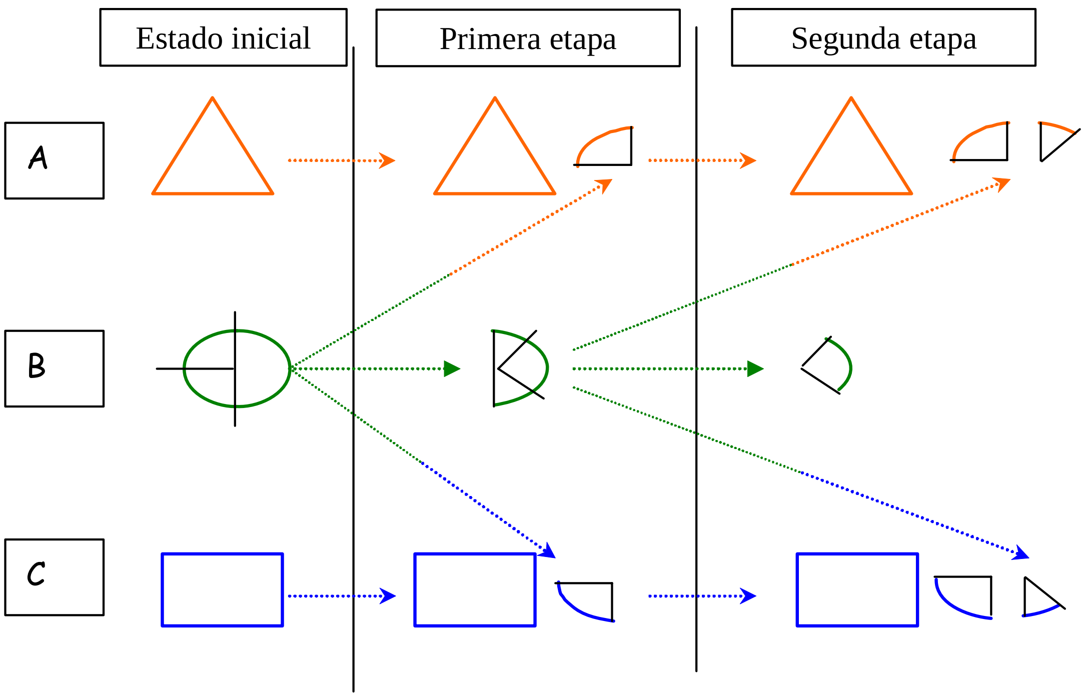
  Los datos corresponden a las fracciones iniciales de clientes de *A*, *B* y *C*, identificadas con a_0, b_0, $c_0 \in [0, 1]$ donde $a_0 + b_0 + c_0 = 1$, y la descripción en lenguaje vernáculo de la dinámica.

- ✓ Concientización de que para conocer el estado de la población en una generación *n*-ésima, basta conocer el estado en la generación anterior (*n*–1), y esto es una característica de los sistemas dinámicos discretos más simples. Este es el descubrimiento clave que permite inferir la plausibilidad de la respuesta: sólo habrá que avanzar o retroceder, convenientemente, por los estados de las distintas generaciones para hallar lo deseado.

  Existe un vínculo entre $X_n^T = [a_n \quad b_n \quad c_n]$ y $X_{n-1}^T = [a_{n-1} \quad b_{n-1} \quad c_{n-1}]$.

- ✓ Visualización de la situación a partir de una representación gráfica.

  Entre las muchas alternativas, una podría ser la presentada a continuación



- ✓ Representación de la dinámica del sistema en lenguaje algebraico y recodificación a un lenguaje matricial. Planteo de un sistema de ecuaciones representativo.

• El lenguaje algebraico que representa el vínculo entre la primera etapa de observación y el estado inicial para la proporción de clientes de *A*, *B* y *C*, es un sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} a_1 = 1\cdot a_0 + \frac{1}{4}\cdot b_0 + 0\cdot c_0 \\ b_1 = 0\cdot a_0 + \frac{1}{2}\cdot b_0 + 0\cdot c_0 \\ c_1 = 0\cdot a_0 + \frac{1}{4}\cdot b_0 + 1\cdot c_0 \end{cases} \text{, equivalente a } X_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = A\cdot X_0 .$$

• El vínculo entre la segunda etapa y la primera es análogo.

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + \frac{1}{4}\cdot b_1 \\ b_2 = \frac{1}{2}\cdot b_1 \\ c_2 = \frac{1}{4}\cdot b_1 + c_1 \end{cases} ,\ X_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = A\cdot X_1 ,$$

y así sucesivamente entre una generación y la anterior a partir de la primera.

✓ Generalización de estas observaciones particulares en el sistema y en las matrices.

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + \frac{1}{4}\cdot b_{n-1} \\ b_n = \frac{1}{2}\cdot b_{n-1} \\ c_n = \frac{1}{4}\cdot b_{n-1} + c_{n-1} \end{cases} ,n\in \mathbf{N},\ X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = AX_{n-1} .$$

$\boxed{X_n = AX_{n-1}}$ Característico de estos sistemas discretos

✓ Concepción de una estrategia para generar la vinculación con los datos inciales a partir de un proceso de inducción.

Como $X_2 = AX_1 = A(AX_0) \Rightarrow X_2 = A^2 X_0$,

$$X_3 = AX_2 = A\left(A^2 X_0\right) \Rightarrow X_3 = A^3 X_0$$

y asi sucesivamente ...

$$X_n = AX_{n-1} = A\left(A^{n-1} X_0\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{X_n = A^n X_0}$$

✓ Reducción del problema a una situación diferente de la planteada.

Inducir la potencia *n*-ésima de una matriz, A^n.

✓ Proceso de inducción para resolver A^n

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1/4 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 1/4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1/4 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 1/4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3/8 & 0\\ 0 & 1/4 & 0\\ 0 & 3/8 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}1 & 3/8 & 0\\ 0 & 1/4 & 0\\ 0 & 3/8 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1/4 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 1/4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 7/16 & 0\\ 0 & 1/8 & 0\\ 0 & 7/16 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix}1 & 7/16 & 0\\ 0 & 1/8 & 0\\ 0 & 7/16 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1/4 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 1/4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 15/32 & 0\\ 0 & 1/16 & 0\\ 0 & 15/32 & 1\end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A^n=\begin{pmatrix}1 & \frac{2^n-1}{2^{n+1}} & 0\\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0\\ 0 & \frac{2^n-1}{2^{n+1}} & 1\end{pmatrix}, n\in\mathbf{N}$$

- ✓ Resolución final.

$$\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{2^n-1}{2^{n+1}} & 0\\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0\\ 0 & \frac{2^n-1}{2^{n+1}} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ b_0\\ c_0\end{pmatrix}, n\in\mathbf{N}$$

$$\begin{cases}a_n=a_0+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)b_0\\ b_n=\frac{1}{2^n}b_0\\ c_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)b_0+c_0\end{cases}, n\in\mathbf{N}.$$

- ✓ Creación de un tabla particularizando lo obtenido.

Tabla de valores de a_n, b_n y c_n redondeados a cinco decimales, para n = 0, 1, 5 y 10.

n	0	1	5	10
a_n	a_0	a_0 + 0.25000 b_0	a_0 + 0.48438 b_0	a_0 + 0.49951 b_0
b_n	b_0	0.25000 b_0	0.03125 b_0	a_0 + 0.25000 b_0
c_n	c_0	0.25000 b_0 + c_0	0.48438 b_0 + c_0	0.49951 b_0 + c_0

- ✓ Paso al límite

Discusión de que existe un comportamiento a largo plazo (asintótico) dado por, a medida que n crece :

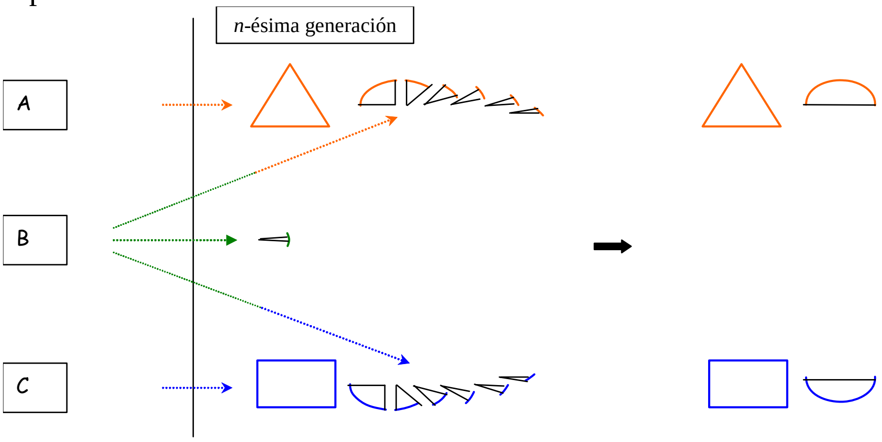
$$\begin{cases} a_n \to a_0 + (1/2)b_0 \\ b_n \to 0 \\ c_n \to (1/2)b_0 + c_0 \end{cases}.$$

- ✓ Respuesta al problema (alguno de los ítems)

  Efectivamente, a largo plazo no quedan clientes en el negocio B. Es posible conocer el estado en cualquier generación conocidas las condiciones iniciales.

- ✓ Convalidación del resultado

  Se puede visualizar fácilmente con extender el gráfico propuesto para valores de n muy grande, o completar numéricamente la tabla con más columnas.



- ✓ Valoración de la factibilidad de aplicación de este método.

  Fue posible inducir una hipótesis en forma sencilla para la potencia n-ésima de la matriz A.

- ✓ ¿Y si no? ... ¿No se puede resolver?

Se puede proponer una modificación en la dinámica del sistema con la idea de comparar los resultados. También que quede iniciada la discusión de los posibles límites y propuestas de mejoras al contrastar con la realidad.

Limitación importante: se supone que la población es siempre la misma, sin oportunidad de que egrese o ingrese algún habitante en la misma; …

Desarrollo ... unas clases después ...

Pero queda la pregunta pendiente desde la primera situación didáctica planteada: ¿qué sucede si la potencia n-ésima no es sencilla de inducir? Además, ¿todos los sistemas de este tipo llegarán a una situación de estado permanente? También se puede conversar acerca de la convergencia en la suma de una sucesión infinita de números.

Una vez que se ha desarrollado el tema transformaciones lineales y de autovalores y autovectores, se puede retomar este problema a fin contestar los interrogantes que se motivaron con anterioridad. Se podrá observar que la modificación que sufre el sistema analizado entre una generación y otra corresponde a una transformación lineal, cuya representación es la matriz A en la expresión característica de

$$X_n = AX_{n-1}, n \in \mathbf{N},$$

que sigue la ley $f(X) = AX$.

Como la matriz A resulta diagonalizable, se puede proponer la utilización de matrices semejantes para resolver la dificultad de la inducción para A^n en un caso que resultara no tan evidente.

Presentamos a continuación, por completitud, la idea de la dirección en la resolución del problema, sin mencionar explícitamente los procesos esperados. Tenemos por objetivo recalcar que esta situación problémica no sólo sirve como iniciadora de una temática, sino que la misma puede continuarse a lo largo del curso para realizar la deseada integración de sus contenidos.

✓ Cálculo alternativo. A partir del cálculo de autovalores y autovectores de A y la relación de semejanza con matrices diagonales. Valoración de la importancia de esta característica en una matriz.

- El cálculo de autovalores y los autovectores asociados a los mismos de A dará un resultado equivalente al siguiente:

$$\lambda_1 = \lambda_3 = 1 \leftrightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } \lambda_2 = \frac{1}{2} \leftrightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- La relación de semejanza entre la matriz del sistema y la matriz diagonal es $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, donde

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Algortimo de cálculo para la potencia n-ésima de A está dado por la relación $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$. El resultado es idéntico al obtenido por inducción.

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2^{n-1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & 1 \end{pmatrix}.$$

✓ Cambio de presentación. Utilización del concepto genético de Álgebra Lineal de combinación lineal.

- Escritura de las condiciones iniciales como combinación lineal única de la base de los autovectores de A. La expresión matricial es de la forma

$$X_0 = \alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3,$$

de donde resulta que:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \left(a_0 + \frac{1}{2} b_0 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2} b_0 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(c_0 + \frac{1}{2} b_0 \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

• Utilización de las propiedades de matrices para resolver el problema. En forma genérica se siguen los pasos siguientes. A partir de

$$X_0 = \alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3,$$

multiplicando ambos miembros por A^n (aunque no se conozca se supone que existe y es no nula)

$$A^n X_0 = A^n \left(\alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3\right).$$

Por constituir las matrices un espacio vectorial con respecto a la suma de matrices y producto de una matriz por un escalar, es válido que

$$X_n = \alpha A^n V_1 + \beta A^n V_2 + \gamma A^n V_3.$$

Dado que se trabaja con una base de autovectores, $\{V_1, V_2, V_3\}$, se cumplirá que

$$AV_1 = \lambda_1 V_1, AV_2 = \lambda_2 V_2, AV_3 = \lambda_3 V_3$$

y, como consecuencia que

$$A^n V_1 = \lambda_1^n V_1, A^n V_2 = \lambda_2^n V_2, A^n V_3 = \lambda_3^n V_3.$$

Al reemplazar en la expresión para la generación n-ésima, resulta que

$$X_n = \alpha \lambda_1^n V_1 + \beta \lambda_2^n V_2 + \gamma \lambda_3^n V_3.$$

Cuando se particulariza con los valores de los escalares α, β, γ, λ_1, λ_2 y λ_3, y las componentes de los autovectores,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \left(a_0 + \frac{1}{2} b_0\right)(1)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2} b_0\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(c_0 + \frac{1}{2} b_0\right)(1)^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

se obtiene la expresión hallada con anterioridad, es decir

$$\begin{cases} a_n = a_0 + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right) b_0 \\ b_n = \dfrac{1}{2^n} b_0 \\ c_n = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right) b_0 + c_0 \end{cases}, n \in \mathbf{N}.$$

✓ Comparar la resolución del problema utilizando estas dos alternativas basadas en el mismo cálculo de autovalores y autovectores. Discutir las ventajas y desventajas que las mismas ofrecen.

✓ Transferencia de conocimientos y abstracción del resultado a partir de la discusión del vínculo entre la existencia de un estado permanente y el hecho de que uno de los autovalores valga 1.

Si existe un estado permanente en la evolución del sistema, resultará que

$$X_n \cong X_{n-1}.$$

Esto implica que

$$X_n = AX_n,$$

es decir que el estado n-ésimo corresponde a un autovector con autovalor 1.

Esta observación conduce al siguiente interrogante, ¿constituye una condición necesaria y suficiente para la existencia de un estado permanente en el sistema que la matriz asociada posea un autovalor que valga 1?