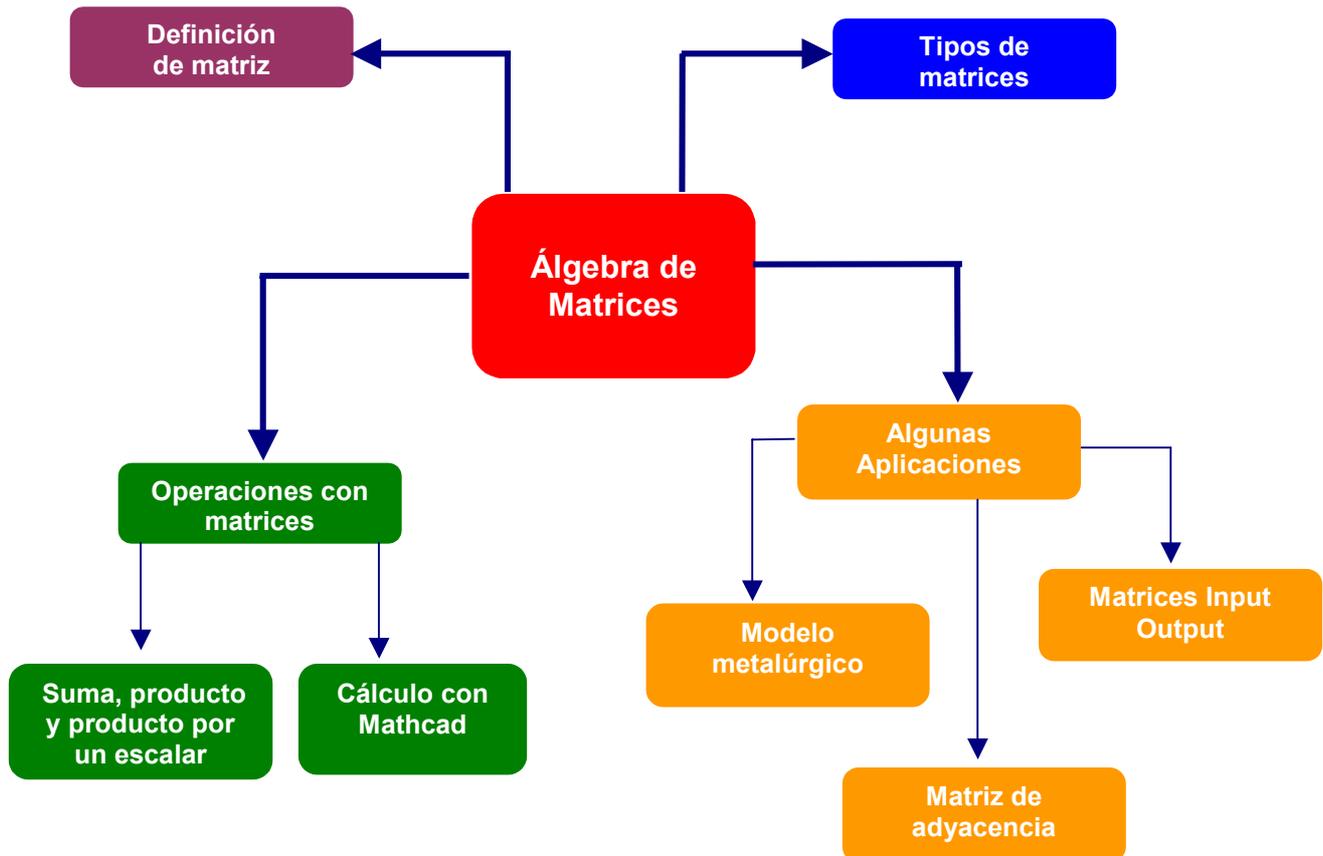


ÁLGEBRA DE MATRICES

Autores: Cristina Steegmann Pascual (csteegmann@uoc.edu), Juan Alberto Rodríguez Velázquez (jrodriguezvel@uoc.edu), Ángel Alejandro Juan Pérez (ajuanp@uoc.edu).

ESQUEMA DE CONTENIDOS



INTRODUCCIÓN

El concepto de matriz alcanza múltiples aplicaciones tanto en la representación y manipulación de datos como en el cálculo numérico y simbólico que se deriva de los modelos matemáticos utilizados para resolver problemas en diferentes disciplinas como, por ejemplo, las ciencias sociales, las ingenierías, economía, física, estadística y las diferentes ramas de las matemáticas entre las que destacamos las ecuaciones diferenciales, el cálculo numérico y, por supuesto, el álgebra. Para obtener información sobre la historia del álgebra de matrices recomendamos [W5].

En este *math-block* presentamos algunos tipos de matrices, analizamos las principales operaciones con matrices y damos algunas aplicaciones del álgebra de matrices. Además, mostramos las posibilidades que nos brinda el programa Mathcad para el cálculo matricial. Para completar el estudio sobre este tema, recomendamos la lectura de los *math-blocks* sobre determinantes, matriz inversa y sistemas de ecuaciones lineales.

OBJETIVOS

- Conocer algunos tipos de matrices.
- Conocer las principales operaciones con matrices.
- Conocer algunas aplicaciones del cálculo matricial.
- Conocer las facilidades del cálculo matricial usando el programa Mathcad.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Es recomendable haber leído, previamente, los *math-blocks* introductorios a Mathcad.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

□ Definición de matriz

Los arreglos rectangulares de números como el siguiente

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 \\ 5 & 0.5 & 3 \end{pmatrix}$$

reciben el nombre de **matrices**. Más formalmente, dado un conjunto X , se denomina **matriz** de n filas y m columnas a un conjunto de $n \times m$ elementos de X , dispuestos en un arreglo rectangular de n filas y m columnas. Las características de los elementos del conjunto X dependerán, en cada caso, de la naturaleza del problema que se esté estudiando. X puede ser un conjunto de funciones, de palabras de un alfabeto, de números, etc. De aquí en adelante, salvo que se especifique lo contrario, los elementos del conjunto X serán números reales y denotaremos el conjunto de todas las matrices de orden $n \times m$ (n filas y m columnas) por $M_{n \times m}$.

En general, para representar una matriz A de orden $n \times m$ se escribe

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

También se escribe $A = (a_{ij})$ ($i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m$) para indicar que A es la matriz de orden $n \times m$ que tiene elementos a_{ij} . Las matrices se denotan con letras mayúsculas y sus elementos con la misma letra minúscula acompañada de dos subíndices que indican su posición en la matriz; el primer subíndice indica la fila y el segundo la columna. Es decir, el elemento a_{ij} es aquel que se encuentra en la fila i y la columna j de la matriz A . Por ejemplo, si denotamos por M la matriz inicial, entonces el orden de M es 2×3 (2 filas y 3 columnas) y sus elementos son: $m_{11} = 8$, $m_{12} = -1$, $m_{13} = 0$, $m_{21} = 5$, $m_{22} = 0.5$ y $m_{23} = 3$.

Dos matrices $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$, de orden $n \times m$, son **iguales** si $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m$. Es decir, dos matrices son iguales si los elementos que ocupan la misma posición en ambas matrices coinciden.

□ Algunos tipos de matrices

Matriz Cuadrada: Es aquella que tiene igual número n de filas que de columnas ($n=m$). En ese caso se dice que la matriz es de orden n . Por ejemplo, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 4 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

es cuadrada de orden 3.

Denotaremos el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n por M_n . Así, en el ejemplo anterior, $A \in M_3$.

Los elementos de la *diagonal principal* de una matriz cuadrada son aquellos que están situados en la diagonal que va desde la esquina superior izquierda hasta la inferior derecha. En otras palabras, la diagonal principal de una matriz $A=(a_{ij})$ está compuesta por los elementos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. En el ejemplo anterior la diagonal principal está compuesta por los elementos: $a_{11} = 1, a_{22} = -3, a_{33} = 1$.

Matriz Nula: Una matriz es nula si todos sus elementos son iguales a cero. En el siguiente ejemplo se muestra la matriz nula de orden 3×2 .

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Más adelante veremos que la matriz nula, respecto a la adición y multiplicación de matrices, juega un papel similar al número cero respecto a la adición y multiplicación de números reales.

Matriz Diagonal: Una matriz cuadrada, $A=(a_{ij})$, es *diagonal* si $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$. Es decir, si todos los elementos situados fuera de la diagonal principal son cero. Por ejemplo, la siguiente matriz es diagonal:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Matriz Unidad: Es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son todos 1. A continuación mostramos la matriz unidad de orden 2.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Más adelante veremos que la matriz unidad, respecto a la multiplicación de matrices, juega un papel similar al número 1 respecto a la multiplicación de números reales.

Matriz triangular: Es una matriz cuadrada en la que todos los elementos situados por debajo (o por encima) de la diagonal principal son cero. Por ejemplo, la siguiente matriz es triangular:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Este tipo de matrices también se conoce como *matriz escalonada*. En algunos casos se hace la distinción entre las matrices *triangulares superiores* o *inferiores* en dependencia de los elementos nulos de la matriz; los que están por debajo o por encima de la diagonal principal.

Según se puede ver en el *Math-block* sobre sistemas de ecuaciones lineales, el concepto de matriz triangular (o escalonada) es de vital importancia en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales.

Más adelante, después de estudiar las operaciones con matrices, veremos algunos tipos importantes de matrices como es el caso de las simétricas y las ortogonales.

□ Adición de matrices

Sean $A, B \in M_{n \times m}$. La matriz $C = (c_{ij}) \in M_{n \times m}$ es la *suma* de las matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, y se denota $C = A + B$, si sus elementos cumplen:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m)$$

Ejemplo

Consideremos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Las matrices A y B son de orden 3×2 , mientras la matriz M es cuadrada de orden 3. Por tanto, no podemos calcular la suma de A y M y tampoco la suma de B y M , en cambio, sí podemos sumar A y B ya que tienen el mismo orden. Esto es,

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4 & 4+4 \\ (-1)+2 & 3+4 \\ 0+(-1) & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Es fácil deducir las siguientes propiedades de la adición de matrices de orden $n \times m$:

- Conmutativa: $A + B = B + A$, $\forall A, B \in M_{n \times m}$ ¹
- Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$, $\forall A, B, C \in M_{n \times m}$

¹ \forall : Cuantificador universal. Se lee "Para todo". \exists : Cuantificador existencial. Se lee "Existe"

- Elemento neutro (la matriz nula): $\exists O \in M_{n \times m} \quad \forall A \in M_{n \times m} : A + O = O + A = A$
- Elemento opuesto: $\forall A \in M_{n \times m} \quad \exists (-A) \in M_{n \times m} : A + (-A) = (-A) + A = O$

En virtud de las propiedades anteriores de la adición de matrices, “+”, (ley interna) resulta que $(M_{n \times m}, +)$ tiene estructura de *grupo conmutativo*. (Ver [8] para profundizar en la estructura de grupo)

□ Multiplicación de una matriz por un número

Se denomina *producto de una matriz*² $A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}$ por un número λ a una matriz $B = (b_{ij}) \in M_{n \times m}$ cuyos elementos son de la forma

$$b_{ij} = \lambda a_{ij} \quad (i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m)$$

Es decir, la matriz producto, B , es la que se obtiene multiplicando el número λ por cada uno de los elementos de A . De aquí en adelante consideraremos que λ es un número real.

Ejemplo

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ y el número $\lambda = -5$. Entonces, el producto de A

por λ es:

$$\lambda \cdot A = (-5) \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 5 \\ 10 & 0 & -20 \\ -25 & -35 & 0 \end{pmatrix}$$

El producto de una matriz por un número es una ley de composición externa que cumple las siguientes propiedades (Ver [8] para profundizar en leyes de composición):

- Distributiva mixta del producto respecto a la suma de matrices

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall A, B \in M_{n \times m}$$

- Distributiva mixta del producto respecto a la suma de números reales

$$(\lambda + \delta)A = \lambda A + \delta A \quad \forall \lambda, \delta \in \mathbb{R}, \quad \forall A \in M_{n \times m}$$

- Asociativa mixta

$$(\lambda \cdot \delta)A = \lambda(\delta A) \quad \forall \lambda, \delta \in \mathbb{R}, \quad \forall A \in M_{n \times m}$$

- Elemento neutro para la ley externa

² En esta definición damos por supuesto que se cumple la propiedad conmutativa de la multiplicación del número λ por los elementos de A .

$$1 \cdot A = A \quad \forall A \in M_{n \times m} \text{ y } 1 \in R$$

En virtud de estas propiedades y de las anteriores de la suma de matrices, resulta que el conjunto $M_{n \times m}$ de las matrices de orden $n \times m$, respecto a la ley de composición interna, "+", y a la ley de composición externa, producto de una matriz por un número, tiene estructura de *espacio vectorial* sobre el cuerpo de los números reales (Ver [W7] y [2] para profundizar en la estructura de espacio vectorial).

□ Multiplicación de matrices

Se denomina *matriz producto* de la matriz $A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}$ por la matriz $B = (b_{jk}) \in M_{m \times p}$ a una matriz $C = (c_{ik}) \in M_{n \times p}$ cuyos elementos son de la forma

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{im}b_{mk} = \sum_{j=1}^m a_{ij}b_{jk}$$

Es decir, los elementos que ocupan la posición ik , en la matriz producto, se obtienen sumando los productos que resultan de multiplicar los elementos de la fila i en la primera matriz por los elementos de la columna k de la segunda matriz. Observemos en detalle como se obtiene el elemento c_{23} en el siguiente ejemplo:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 14 \\ 0 & 4 & 7 \\ -8 & 0 & 12 \end{pmatrix} = C$$

fila 2 por columna 3 = elemento que ocupa la posición 23

$$c_{23} = \sum_{j=1}^2 a_{2j}b_{j3} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} = 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 3 = 10 - 3 = 7$$

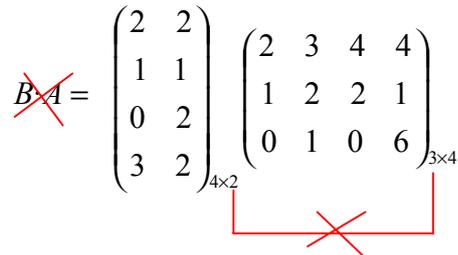
Dos matrices se pueden multiplicar sólo cuando el número de columna de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda. En ese caso se dice que las matrices son enlazadas.

En el siguiente ejemplo podemos ver además cuál es el orden de la matriz producto.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}_{3 \times 4} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 2}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}_{3 \times 4} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 2} = \begin{pmatrix} 19 & 23 \\ 7 & 10 \\ 19 & 13 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

Nótese, además, que no podemos calcular $B \cdot A$.

$$\cancel{B \cdot A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}_{3 \times 4}$$


Hay casos, como veremos en el siguiente ejemplo, en los que se pueden calcular ambos productos aunque se obtienen resultados diferentes.

Consideremos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, por un lado,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 17 \\ 11 & 8 \end{pmatrix}$$

y por otro lado,

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 7 & 9 & 11 \\ 12 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Según se pudo comprobar a través de los ejemplos anteriores, para la multiplicación de matrices no se cumple la propiedad conmutativa. Veamos algunas propiedades de esta operación:

- Asociativa
 $A(B \cdot C) = (A \cdot B)C, \quad \forall A, B, C : A \in M_{n \times m}, B \in M_{m \times k}, C \in M_{k \times p}$
- Elemento neutro (Es la matriz unidad)
 $\exists I \in M_n \quad \forall A \in M_n : A \cdot I = I \cdot A = A$
- Distributiva (mixta)
 $A(B + C) = A \cdot B + A \cdot C, \quad \forall A, B, C : A \in M_{n \times m}, B, C \in M_{m \times k}$

En virtud de estas propiedades y de las anteriores de la suma de matrices, resulta que el conjunto $(M_n, +, \cdot)$ de las matrices cuadradas de orden n , respecto a las dos leyes de composición interna, "+" y "\cdot", tiene estructura de *anillo unitario no conmutativo* (Ver [8] para profundizar en la estructura de anillo).

Otras observaciones importantes:

- Existen divisores de cero: En general, $A \cdot B = 0$ no implica que $A = 0$ o $B = 0$. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- No se cumple la propiedad cancelativa: En general, $A \cdot B = A \cdot C$ no implica $B = C$. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

- No se cumple la fórmula del binomio: En general, $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ ya que el producto no es conmutativo.

□ Matriz invertible

Una matriz cuadrada A es invertible si existe una matriz, que denotaremos por A^{-1} , que cumple

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I,$$

donde I es la matriz unidad. En ese caso se dice que A^{-1} es la inversa de A .

Por ejemplo, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{31} & -\frac{4}{31} & \frac{7}{31} \\ \frac{13}{31} & -\frac{7}{31} & -\frac{11}{31} \\ -\frac{9}{31} & \frac{12}{31} & \frac{10}{31} \end{pmatrix}$$

ya que

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{31} & -\frac{4}{31} & \frac{7}{31} \\ \frac{13}{31} & -\frac{7}{31} & -\frac{11}{31} \\ -\frac{9}{31} & \frac{12}{31} & \frac{10}{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Para un estudio detallado sobre matriz inversa recomendamos el *math-block* titulado "Matriz Inversa".

□ Matriz traspuesta

La traspuesta de una matriz $A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}$, es la matriz $A^T = (a_{ji}) \in M_{m \times n}$, que se obtiene a partir de la matriz A al intercambiar las filas por las columnas (o viceversa).

La traspuesta de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es $A^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Propiedades:

- Dada una matriz, siempre existe la traspuesta y además es única
- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$, con $\lambda \in R$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

□ Otros tipos de matrices

Matriz simétrica: Es una matriz igual a su traspuesta:

$$A \text{ es simétrica} \Leftrightarrow A^T = A$$

Un ejemplo de matriz simétrica es el siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 9 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} = A^T.$$

Las matrices simétricas tienen ese nombre debido a que presentan simetría respecto a la diagonal principal. En otras palabras, una matriz $A = (a_{ij}) \in M_n$ es simétrica si cumple $a_{ij} = a_{ji}$ para $i = 1, \dots, n$, y $j = 1, \dots, n$.

Matriz antisimétrica: Es una matriz igual a la opuesta de su traspuesta. En otras palabras,

$$A \text{ es antisimétrica} \Leftrightarrow A^T = -A.$$

La siguiente matriz es antisimétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -9 & 3 \\ 9 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz ortogonal: Es aquella cuya traspuesta es igual a su inversa. Es decir, es aquella que multiplicada por su traspuesta da como resultado la matriz unidad. Esto es,

$$A \text{ es ortogonal} \Leftrightarrow A \cdot A^T = I \Leftrightarrow A^T = A^{-1}$$

La siguiente matriz de funciones es ortogonal:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & -\operatorname{cos} x \\ \operatorname{cos} x & \operatorname{sen} x \end{pmatrix}$$

Para comprobarlo es suficiente con aplicar la definición y tener en cuenta que $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1$.

Las matrices ortogonales de orden 2 son de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

donde a y b son números reales tales que $a^2 + b^2 = 1$.

Matriz involutiva: Es una matriz que coincide con su inversa. Esto es,

$$A \text{ es involutiva} \Leftrightarrow A^2 = I$$

La siguiente matriz es involutiva:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es evidente que esta matriz también es ortogonal.

Matriz idempotente: Es una matriz igual a su cuadrado. Es decir,

$$A \text{ es idempotente} \Leftrightarrow A^2 = A.$$

La siguiente matriz es idempotente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz nilpotente: Si A es una matriz cuadrada y $A^k = 0$ para algún número natural k , se dice que A es *nilpotente*. Si k es tal que $A^{k-1} \neq 0$ y $A^k = 0$, se dice que A es *nilpotente de orden* k . A continuación mostramos una matriz nilpotente de orden 2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

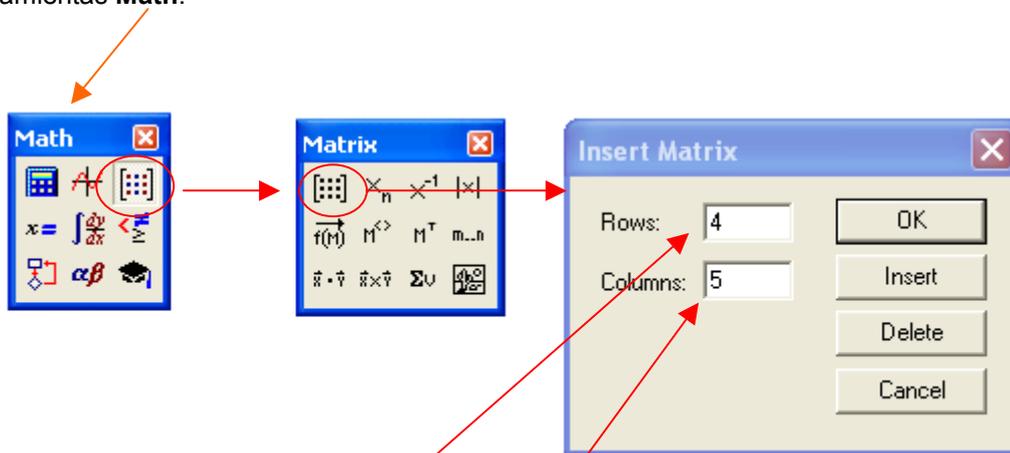
Naturalmente, la matriz A es un divisor de cero.

CASOS PRÁCTICOS CON SOFTWARE

❑ **Operaciones con matrices usando Mathcad**

¿Cómo editar matrices?

Para editar matrices utilizando Mathcad se siguen los siguientes pasos usando la barra de herramientas **Math**:



Se introduce el número de filas y de columnas y luego se introducen los elementos de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 & -4 \\ 9 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

¿Cómo asignar una matriz a una variable?

Para asignar una matriz a una variable se escribe la variable y luego dos puntos, “:”. Después se introduce la matriz por el procedimiento de antes.

¿Cómo calcular?

Una vez asignada la matriz a una variable, la suma, producto, producto por un número y potencias, se hacen como si se tratase de números. En el caso de la traspuesta y otras operaciones exclusivas de las matrices se utiliza la barra de herramientas **Matrix**.

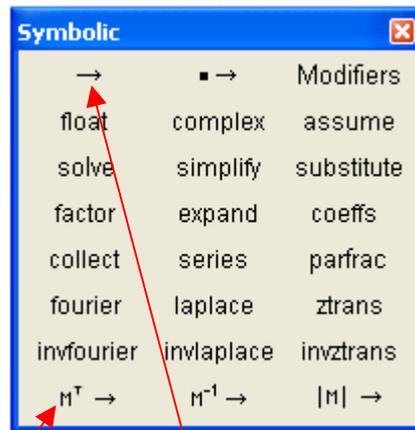
Por ejemplo, introducimos las siguientes matrices:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M := \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego calculamos:

$$\begin{aligned}
 B \cdot M &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 7 & 9 & 11 \\ 12 & 9 & 6 \end{pmatrix} & M \cdot B &= \begin{pmatrix} 9 & 17 \\ 11 & 8 \end{pmatrix} & A^3 &= \begin{pmatrix} 73 & 96 & 132 \\ 48 & 43 & 54 \\ 36 & 72 & 85 \end{pmatrix} \\
 A + 3 \cdot (B \cdot M) &= \begin{pmatrix} 8 & 16 & 21 \\ 20 & 30 & 37 \\ 39 & 27 & 19 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Además de la barra de herramientas **Matrix**, como mostramos a través del siguiente ejemplo, podemos usar la barra de herramientas **Symbolic**:



$$M := \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad M^T \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad M^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 15 & 12 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$$

□ Matrices input-output

Las matrices input-output (entrada-salida) se aplican al considerar un modelo simplificado de la economía de un país en el que la actividad de cualquier empresa puede considerarse en algunos de los sectores básicos: la industria (I), la agricultura (A), el turismo (T) y los servicios (S). Las empresas compran (inputs), transforman los productos y luego venden (outputs).

Para tener una idea del modelo, supongamos que los datos de la economía de un país ficticio son los de la tabla siguiente, donde las cantidades se dan en algún tipo de unidad monetaria.

	I	A	T	S	Demanda	Output
I	50	23	4	6	200	283
A	12	70	15	9	70	176
T	1	1	50	15	350	417
S	80	90	85	87	43	385

En cada fila se indica el valor de las **ventas** efectuadas por cada sector a cada uno de los sectores restantes así como las ventas internas, la **demanda**, que representa el valor de las ventas efectuadas a los consumidores y a otros países, y el **output** total del sector que se obtiene sumando todas las ventas de ese sector. Por ejemplo, en el caso de la

industria, el valor de las ventas internas fue de 50, el valor de las ventas al sector agrario fue de 23, en el caso del turismo fue de 4, y en los servicios de 6. El valor de las ventas efectuadas a los consumidores y a otros países (demanda) fue de 200. Entonces el output total fue de 283.

A partir de la tabla anterior se definen las siguientes matrices:

Matriz de transacciones

Matriz demanda final

Matriz de outputs

$$M := \begin{pmatrix} 50 & 23 & 4 & 6 \\ 12 & 70 & 15 & 9 \\ 1 & 1 & 50 & 15 \\ 80 & 90 & 85 & 87 \end{pmatrix}$$

$$D := \begin{pmatrix} 200 \\ 70 \\ 350 \\ 43 \end{pmatrix}$$

$$O := \begin{pmatrix} 283 \\ 176 \\ 417 \\ 385 \end{pmatrix}$$

Y a partir de los elementos de las matrices M y O se puede construir una **matriz tecnológica**, T, que representa la proporción de las transacciones intersectoriales respecto al output total de cada sector.

$$T := \begin{pmatrix} \frac{50}{283} & \frac{23}{176} & \frac{4}{417} & \frac{6}{385} \\ \frac{12}{283} & \frac{70}{176} & \frac{15}{417} & \frac{9}{385} \\ \frac{1}{283} & \frac{1}{176} & \frac{50}{417} & \frac{15}{385} \\ \frac{80}{283} & \frac{90}{176} & \frac{85}{417} & \frac{87}{385} \end{pmatrix}$$

Toda la información de la tabla se puede expresar en forma matricial a través de la siguiente relación: $O = T \cdot O + D$, es decir,

$$\begin{pmatrix} \frac{50}{283} & \frac{23}{176} & \frac{4}{417} & \frac{6}{385} \\ \frac{12}{283} & \frac{70}{176} & \frac{15}{417} & \frac{9}{385} \\ \frac{1}{283} & \frac{1}{176} & \frac{50}{417} & \frac{15}{385} \\ \frac{80}{283} & \frac{90}{176} & \frac{85}{417} & \frac{87}{385} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 283 \\ 176 \\ 417 \\ 385 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 70 \\ 350 \\ 43 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 283 \\ 176 \\ 417 \\ 385 \end{pmatrix}$$

Esta fórmula permite hacer estudios destinados a planificar la economía.

□ Modelo metalúrgico

Supongamos que una empresa fabrica tres modelos de máquinas herramientas, M1, M2 y M3, y como materia prima fundamental utiliza tres tipos de metales, Hierro (H), Níquel (N) y Cobalto (C). La cantidad de materia prima que necesita para fabricar cada máquina, expresada en toneladas, se muestra en la siguiente tabla a la cual le hacemos corresponder la matriz A.

	H	N	C
M1	5	0.4	0.2
M2	4	0.3	0.1
M3	3.5	0.5	0.2

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 0.4 & 0.2 \\ 4 & 0.3 & 0.1 \\ 3.5 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Las mejores ofertas de la materia prima corresponden a los proveedores P1, P2 y P3. Los precios por tonelada (expresados en cierta unidad monetaria) impuestos por cada uno de los proveedores a cada uno de los metales aparecen en la siguiente tabla:

	P1	P2	P3
H	160	155	150
N	6000	6250	7200
C	3000	3010	2995

$$B := \begin{pmatrix} 160 & 155 & 150 \\ 6000 & 6250 & 7200 \\ 3000 & 3010 & 2995 \end{pmatrix}$$

Queremos hacer una tabla de doble entrada que muestre el gasto en materia prima por modelo de máquina y proveedor. Dicha tabla se obtiene a través del siguiente producto matricial:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3800 & 3877 & 4229 \\ 2740 & 2796 & 3059.5 \\ 4160 & 4269.5 & 4724 \end{pmatrix}$$

La tabla obtenida es:

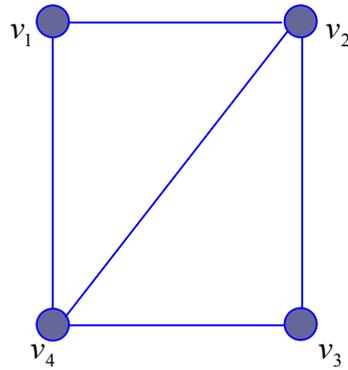
	P1	P2	P3
M1	3800	3877	4229
M2	2740	2796	3059.5
M3	4160	4269.5	4724

Para interpretar los datos de esta tabla tomaremos como ejemplo el modelo M3 con el proveedor P1: Si compramos la materia prima al proveedor P1, los gastos por cada máquina del modelo M3 serán de 4160 unidades monetarias. Analizando la tabla podemos concluir que resulta más económico comprar la materia prima al proveedor P1.

□ Matriz de adyacencia de un grafo

Un *grafo* $G=(V, E)$ es un par ordenado formado por un conjunto V (finito no vacío) de objetos llamados *vértices* y un conjunto E de pares no ordenados de vértices diferentes denominados *aristas*. Una arista formada por los vértices v_i, v_j se denota por $v_i v_j$ y se dice que los vértices v_i y v_j son *adyacentes*.

Consideremos el grafo representado en el siguiente diagrama:



En este caso el conjunto de vértices es $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y el conjunto de aristas es $E = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$.

Un *recorrido* de longitud l , del vértice u al vértice v es una secuencia finita de vértices, $u = v_0, v_1, \dots, v_l = v$, tal que v_{i-1} es adyacente a v_i para $1 \leq i \leq l$.

La matriz de adyacencia de un grafo G de n vértices, denotada por $A(G)$, es una matriz cuadrada de orden n que tiene un 1 en la posición ij si los vértices v_i y v_j son adyacentes y un 0 en caso contrario. Es decir la matriz de adyacencia de un grafo se define como $A(G) = (a_{ij})$, donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i v_j \in E \\ 0 & \text{si } v_i v_j \notin E \end{cases}$$

La matriz de adyacencia es simétrica y sus elementos de la diagonal principal son todos cero.

La matriz de adyacencia del grafo de antes es:

$$A(G) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Un resultado conocido y muy utilizado en teoría algebraica de grafos es el siguiente:

El número de recorridos de longitud l en un grafo G , del vértice v_i al vértice v_j , es el elemento que está en la posición ij de la matriz A^l .

Para ilustrar el resultado anterior vamos a calcular el número de recorridos entre los vértices v_1 y v_3 del grafo anterior para $0 \leq l \leq 5$. Las potencias de la matriz de adyacencia son:

$$A(G)^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A(G)^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A(G)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A(G)^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad A(G)^4 = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 10 & 9 \\ 9 & 15 & 9 & 14 \\ 10 & 9 & 10 & 9 \\ 9 & 14 & 9 & 15 \end{pmatrix} \quad A(G)^5 = \begin{pmatrix} 18 & 29 & 18 & 29 \\ 29 & 32 & 29 & 33 \\ 18 & 29 & 18 & 29 \\ 29 & 33 & 29 & 32 \end{pmatrix}$$

Entonces, como podemos comprobar en el dibujo del grafo, el número de recorridos de longitud l ($0 \leq l \leq 5$) entre v_1 y v_3 está dado por el elemento $a^{(l)}_{13}$ de la matriz $A^l(G)$. Así, $a^{(0)}_{13} = 0$, $a^{(1)}_{13} = 0$, $a^{(2)}_{13} = 2$, $a^{(3)}_{13} = 2$, $a^{(4)}_{13} = 10$ y $a^{(5)}_{13} = 18$. (Ver [7] para profundizar en teoría algebraica de grafos)

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Carl D. Meyer's (2000): "Matrix analysis and applied linear algebra", Philadelphia SIAM, 461, 468-470
- [2] Montes Lozano, A (1998): "Álgebra", Ediciones UOC, Módulo 3: "Matrices, vectores y sistemas de ecuaciones lineales", 45-48, 41-43, 43-45
- [3] G. J. Porter, D. R. Hill (1996): "Interactive Linear Algebra. A laboratory course using Mathcad", Springer-Verlag New York, Inc., Section 3.1, 3.2, 3.3
- [4] H. Benker (1999): "Practical use of Mathcad. Solving mathematical problems with a computer algebra system", Springer-Verlag New York, Inc., 178-180
- [5] J. A. Moreno, D. Ser (1999): "Mathcad 8. Manual de usuario y guía de referencia de Mathcad 8", ediciones Anaya Multimedia, S.A., 155, 296.
- [6] H. Anton, C. Rorres (2000): "Elementary Linear Algebra: Applications Version", John Wiley&Sons.
- [7] N. Biggs (1974, 1993): "Algebraic graph theory", Cambridge University Press.
- [8] F. Cedó (1997): "Álgebra bàsica" Universitat Autònoma de Barcelona

ENLACES

- [W1] <http://www.planetmath.org/encyclopedia/LinearAlgebra.html>
Página web de la enciclopedia de PlanetMath.org sobre álgebra lineal. En inglés.
- [W2] <http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0289-02/ed99-0289-02.html>
Página web de la "Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES" donde se explica, con gran cantidad de ejemplos aclaratorios, diferentes conceptos todos ellos relacionados con las matrices y otros temas de álgebra lineal. En español.
- [W3] <http://www.lafacu.com/apuntes/matematica/matrices/default.htm>
El sitio de los estudiantes y docentes universitarios. Recopilación de apuntes, con ejemplos, sobre matrices. En español.
- [W4] <http://rinconprog.metropoliglobal.com/CursosProg/ProgGraf/MatGraf/index.php?cap=2>
Página web de "El Rincón del Programador". En la sección de "Programación Gráfica" aparecen los "Fundamentos matemáticos de la Informática Gráfica" donde se explican

diversos conceptos relacionados con el álgebra de matrices y otros temas de álgebra lineal. En español.

[W5] <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Indexes/Algebra.html>

Página web de la School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland. Trata sobre la historia del álgebra. En inglés.

[W6] <http://www.richland.cc.il.us/james/lecture/m116/matrices/applications.html>

Página web con aplicaciones de matrices y determinantes. En inglés.

[W7] <http://www.math.unl.edu/~tshores/linalgtext.html>

Página web del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nebraska-Lincoln. Libro on-line sobre álgebra lineal y sus aplicaciones. En inglés.

[W8] <http://www.numbertheory.org/book/>

Página web sobre teoría de números. Libro on-line sobre álgebra lineal. En inglés.

[W9] <http://archives.math.utk.edu/topics/linearAlgebra.html>

Página web de enlaces relacionados con álgebra lineal y teoría de matrices. En inglés.

[W10] <http://www.tu-chemnitz.de/iic/ela/>

Página web de la publicación "The Electronic Journal of Linear Algebra" publicada por "The International Linear Algebra Society". En inglés.

[W11] <http://www.netlib.org/utk/people/JackDongarra/la-sw.html>

Página en la que está recogida la información relacionada con el software disponible gratuitamente en la red para la solución de problemas de álgebra lineal. En inglés.

[W12] <http://ceee.rice.edu/Books/LA/linearbook.pdf>

Página web del "Center for Excellence and Equity in Education" de la Universidad de Rice. Libro sobre álgebra lineal. En inglés.