PRODUCTO VECTORIAL

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

PRODUCTO VECTORIAL

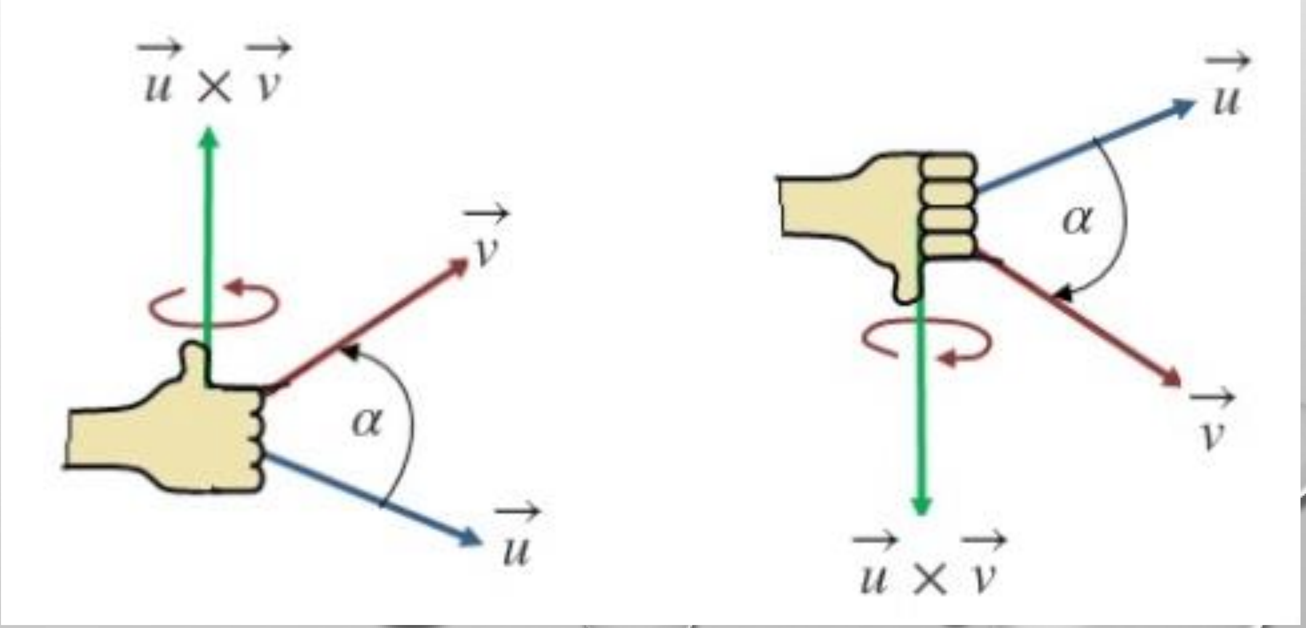
EL PRODUCTO VECTORIAL ENTRE DOS VECTORES DEL ESPACIO R^3, DISTINTOS DEL VECTOR NULO DA POR RESULTADO OTRO VECTOR DEL MISMO ESPACIO.

$\bar{u}\ x\ \bar{v} = \bar{w}$

Dirección: $\bar{w}\quad es\ perpendicular\ al\ vector\ \bar{u}\ y\ al\ vector\ \bar{v}$

Sentido

Para realizar esta regla, pon tu mano derecha apuntando con los dedos en el mismo sentido del vector u y cierra la mano dirigiendo tus dedos hacia el vector v por el camino más corto (ángulo más pequeño). **El dedo pulgar determinará el sentido del producto vectorial**:



REGLA DE RESOLUCIÓN DEL PRODUCTO VECTORIAL

Dados los vectores $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3) \quad y \quad \bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\bar{u}\ x\ \bar{v} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \check{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \check{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \check{k}$$

$$\bar{u}\ x\ \bar{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

EJEMPLO: $\vec{u}=(2,-3,1)$ $\vec{v}=(-3,1,2)$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & 1\\ -3 & 1 & 2\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\check{\imath}-\begin{vmatrix}2 & 1\\ -3 & 2\end{vmatrix}\check{\jmath}+\begin{vmatrix}2 & -3\\ -3 & 1\end{vmatrix}\check{k}=$$

$$\bar{u}\ x\ \bar{v}=-7\check{\imath}-7\check{\jmath}-7\check{k}$$

u = Vector((2, −3, 1))

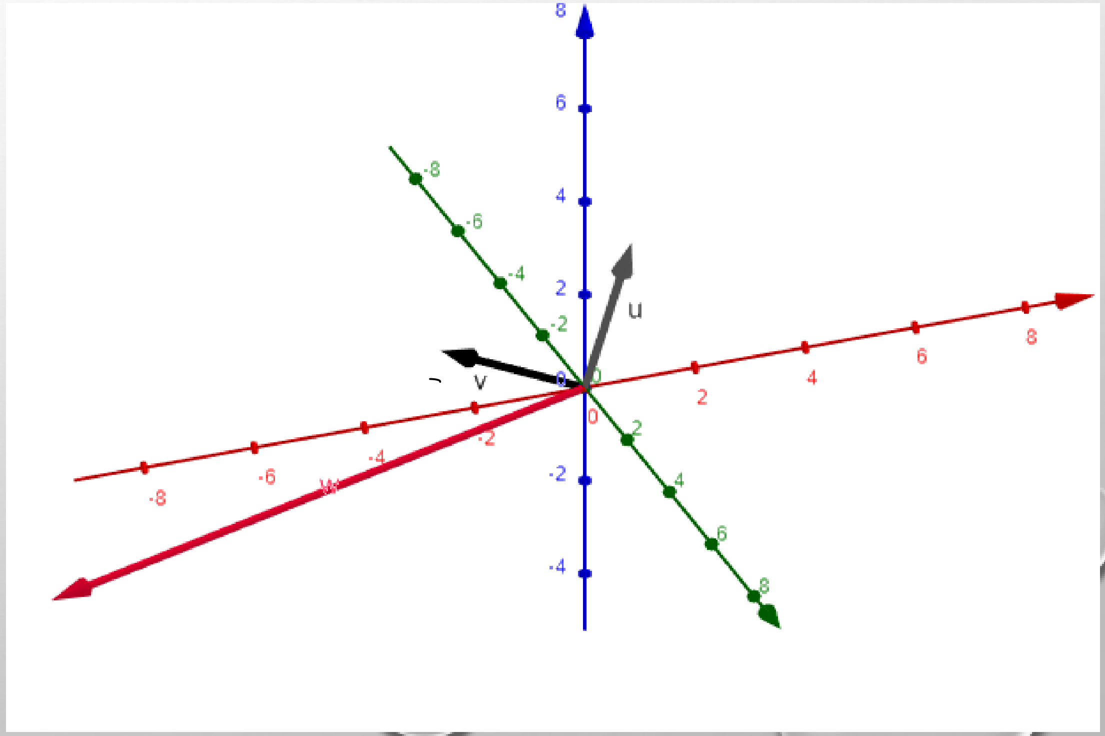
$\rightarrow \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$

v = Vector((−3, 1, 2))

$\rightarrow \begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$

w = u ⊗ v

$\rightarrow \begin{pmatrix}-7\\-7\\-7\end{pmatrix}$



Propiedades

Propiedades del producto vectorial

P1. $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall \vec{b} \in \mathbf{R}^3, (\vec{a} \times \vec{b}) = -(\vec{b} \times \vec{a})$ Propiedad anticonmutativa.

P2. $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall \vec{b} \in \mathbf{R}^3, \forall \vec{c} \in \mathbf{R}^3, \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ Prop distributiva con respecto a la suma.

P3. $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall \vec{b} \in \mathbf{R}^3, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$ Propiedad asociativa mixta.

P4. $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, (\vec{0} \times \vec{a}) = (\vec{a} \times \vec{0}) = \vec{0}$

P5. $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall \vec{b} \in \mathbf{R}^3 / \vec{a} \neq \vec{0} \wedge \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$. Condición de paralelismo

P6. $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall \vec{b} \in \mathbf{R}^3$, $|\vec{a} \times \vec{b}|$ es igual al área del paralelogramo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$

P1. $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall \vec{b} \in \mathbf{R}^3, (\vec{a} \times \vec{b}) = -(\vec{b} \times \vec{a})$ **Propiedad anticonmutativa.**

$$\bar{u}\ x\ \bar{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

$$\bar{v}\ x\ \bar{u} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

REGLA DE RESOLUCIÓN DEL PRODUCTO VECTORIAL

Dados los vectores $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3) \quad y \quad \bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\bar{u}\ x\ \bar{v} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \check{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \check{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \check{k}$$

$$\bar{u}\ x\ \bar{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

REGLA DE RESOLUCIÓN DEL PRODUCTO VECTORIAL

Dados los vectores $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\bar{u}\ x\ \bar{v} = \begin{vmatrix} \check{\imath} & \check{\jmath} & \check{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \check{\imath} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \check{\jmath} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \check{k}$$

$$\bar{u}\ x\ \bar{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

P 7 $|\bar{u}\ x\ \bar{v}| = |\bar{u}|\ |\bar{v}|\ sin\ \alpha$

H

$\bar{u}, \bar{v}\ \in\ R^3$

T

$|\bar{u}\ x\ \bar{v}| = |\bar{u}|\ |\bar{v}|\ \ sin\ \alpha$

D

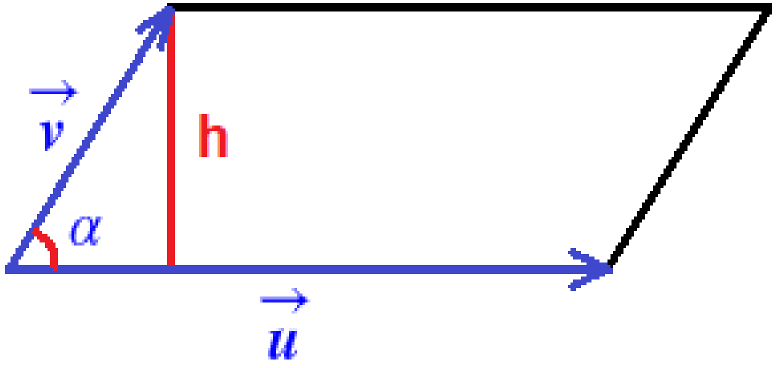
$|\bar{u}\ x\ \bar{v}|^2 = (\bar{u}\ x\ \bar{v})\ \cdot (\bar{u}\ x\ \bar{v})$ Por propiedad del P. escalar

Próxima clase los demostramos con las propiedades de los productos que nos faltan ver.

P 6 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Interpretación geométrica

- *El módulo del producto vectorial de dos vectores no nulos es igual al área del paralelogramo que tiene por lados a ambos vectores.*
- *área* $\mathcal{P} = |\vec{u} \times \vec{v}|$



Sin $\alpha = \frac{h}{|\vec{v}|}$

H $\bar{u}, \bar{v} \in R^3$

T $|\bar{u} \; x \; \bar{v}| = área \; paralelogramo$

D

Área ▱ = base por altura

Área ▱ $= |\bar{u}| \sin \hat{\alpha} |\bar{v}|$

Área ▱ $= |\bar{u} \; x \bar{v}|$

Por lo tanto el áre del triángulo que tiene por lados los vectores $\bar{u} \; x \; \bar{v}$ es igual $\frac{|\bar{u} \; x \bar{v}|}{2}$

P 5 CONDICIÓN DE PARALELISMO

$$\forall\, \bar{a}, \forall \bar{b} \in R^3 / \bar{a} \neq \bar{0} \wedge \bar{b} \neq \bar{0}, \bar{a}\, x\, \bar{b} = \bar{0} \iff \bar{a} \parallel \bar{b}$$

H $\bar{a}\, x\, \bar{b} = \bar{0}$

T $\bar{a} \parallel \bar{b}$

D $|\bar{a}\, x\, \bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}| \sin \alpha$

$$|\bar{0}| = \underbrace{|\bar{a}||\bar{b}|}_{\boxed{\neq 0\ por\ H}} \sin \alpha$$

$\sin \hat{\alpha} = 0 \quad \hat{\alpha} = 0^0\ o\ 180^0$

$\bar{a} \parallel \bar{b}$

H $\bar{a} \parallel \bar{b}$

T $\bar{a}\, x\, \bar{b} = \bar{0}$

D $Si\ \bar{a} \parallel \bar{b} \Rightarrow \bar{a} = \lambda \bar{b}$

$\bar{a}\, x\, \bar{b} = \lambda \bar{b}\, x\, \bar{b}$ reemplazo

$\bar{a}\, x\, \bar{b} = \lambda(\bar{b}\, x\, \bar{b})$ P. asociativa mixta

$\bar{a}\, x\, \bar{b} = \lambda\ \ \bar{0}$

$\bar{a}\, x\, \bar{b} = \bar{0}$

POR LO TANTO:
$\bar{a}\, x\, \bar{a} = \bar{0}$

Ejercicio 1

Hallar las componentes de $\bar{v}$ sabiendo que el módulo de $\bar{v}$ es igual 51, $\bar{v}$ es perpendicular al eje Z y al vector $\bar{a}=(8,-15,3)$ y forma un ángulo agudo con el eje x.

Ejercicio 2

Hallar el área de un triángulo cuyos vértices son:

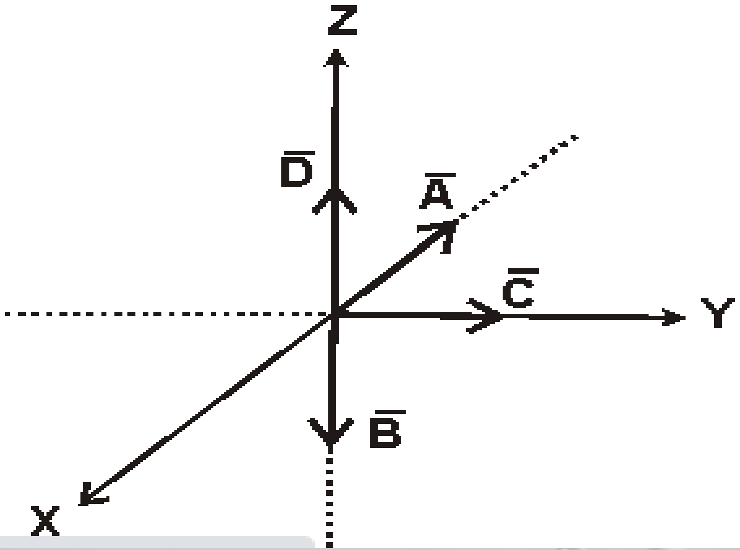
A (2, 1,3) B (-1, 1,5) C (1,-1,1)

Ejercicio 3

Estudiar si los puntos A (2,-1,0), B (3, 0,1) y C (-1, 2,1) estén alineados.

PROBLEMA 1 :

En la figura se muestran cuatro vectores $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$. Los vectores $\vec{D}$ y $\vec{B}$ están sobre el eje **Z** . El vector $\vec{A}$ está sobre el eje **X** y el vector $\vec{C}$ está sobre el eje **Y**. Si $|\vec{A} \times \vec{B}| = 4$ y $|\vec{C} \times \vec{D}| = 2$, entonces el módulo del vector $\vec{E} = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{C} \times \vec{D}$ es:



PROBLEMA 2 :

El producto vectorial $2\hat{j}\times(-3\hat{i})$, es igual a:

A)6 B) $-6\hat{k}$ C) $6\hat{j}$ D) $-6\hat{j}$ E) $6\hat{k}$

PROBLEMA 3 :

De las siguientes operaciones:

I) $\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C}$ II) $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$

III) $(\vec{A}\cdot\vec{B})\times\vec{C}$ IV) $(\vec{A}\cdot\vec{B})\times(\vec{C}\cdot\vec{B})$

Es posible realizar:

A)I, II y III B)I y II C)I, II y IV D)III y IV E)II y III