RELACIONES Y FUNCIONES

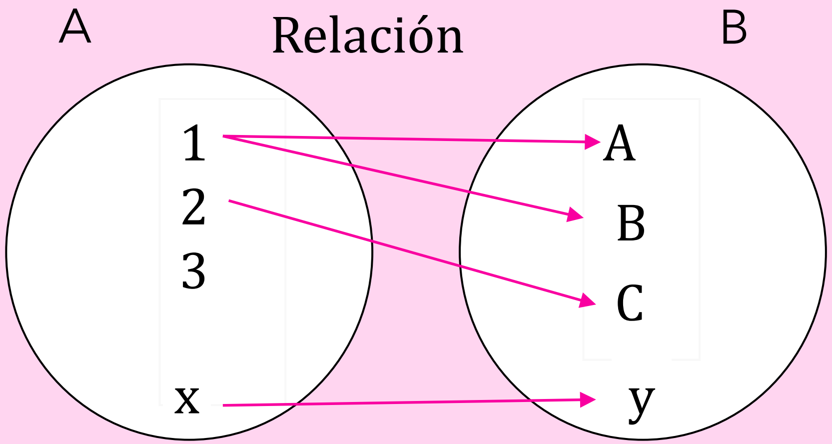
RELACIONES FUNCIONALES

Se llama **Relación** entre dos conjuntos A y B a toda ley que asocia elementos del conjunto A con elementos del conjunto B

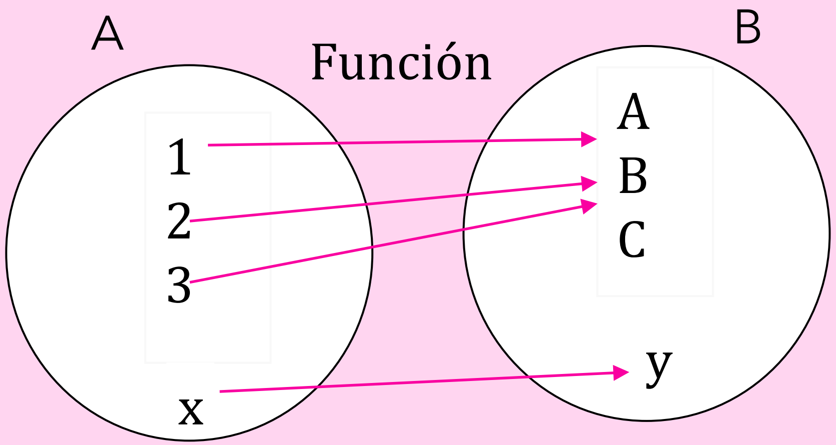
A es **conjunto de partida**

B es el **conjunto de llegada.**

Relación



Función



Para que una relación sea **función** a cada elemento del conjunto de partida le tiene que corresponder **un único elemento** del conjunto de llegada

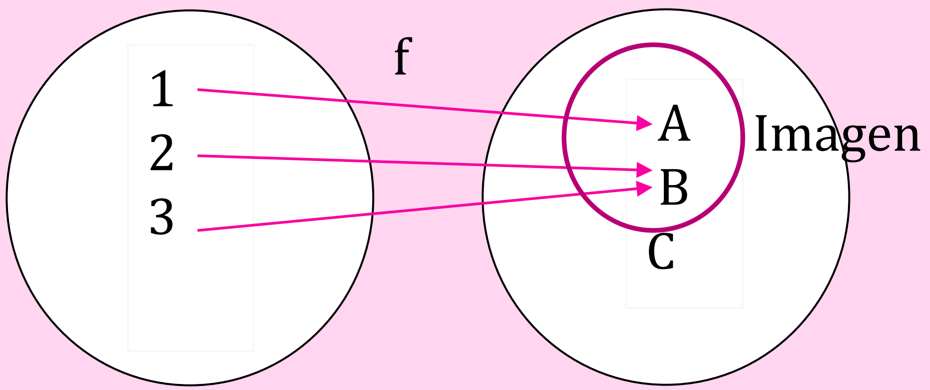
$$x \xrightarrow{f} y$$

Al conjunto **DE PARTIDA A**, lo llamamos **Dominio.**

Simbolizamos Dom (f) o Df.

A **Dominio**

B **conjunto de llegada o Codominio**



Los elementos de **B** que se obtienen a través de la función f forman el **CONJUNTO IMAGEN.**
Simbolizamos Im (f) o If

DEFINICIÓN

Una RELACIÓN para que sea función debe cumplir dos condiciones:

1. **Condición de existencia:** Todos los elementos *x* del conjunto de partida están relacionados con elementos de *y*.

Simbólicamente: $\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}, \exists\, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B} / (\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{f}$

2. **Condición de unicidad:** Cada elemento de *x* está relacionado con un **único** elemento de y.

Simbólicamente: si $(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \in \boldsymbol{f} \wedge (\mathbf{x}; \mathbf{z}) \in \boldsymbol{f} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{z}$

Simbología

Vas a observar frecuentemente esta simbología: f(x) =y.

y= f(x) o sea obtenemos el valor de y (la imagen) a través de la función (su fórmula) dependiendo del valor que le damos a x.

Variable independiente

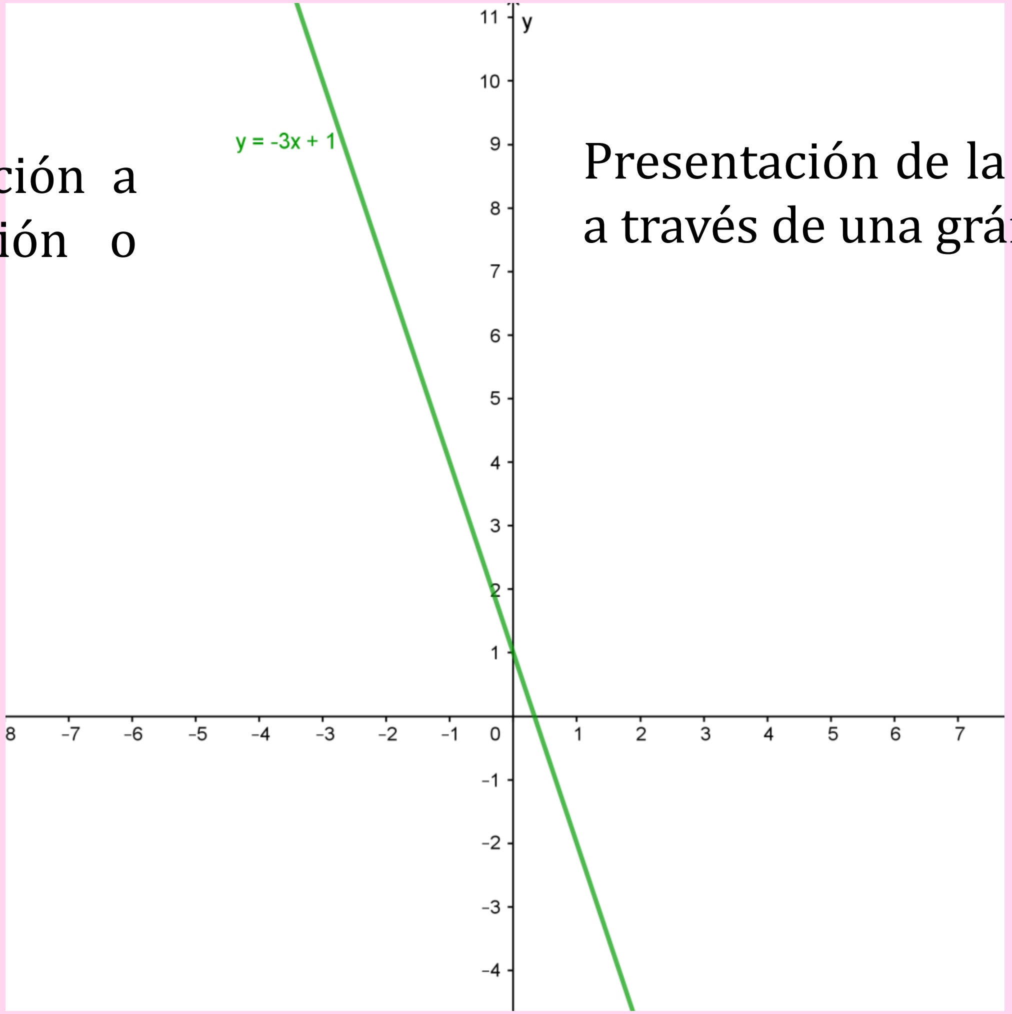
Variable dependiente ← $\boxed{y= f(x)}$

EJEMPLO

$f(x) = -3x+1$

$y = -3x+1$

Presentación de la función a través de una expresión o fórmula matemática



Presentación de la función a través de una gráfica

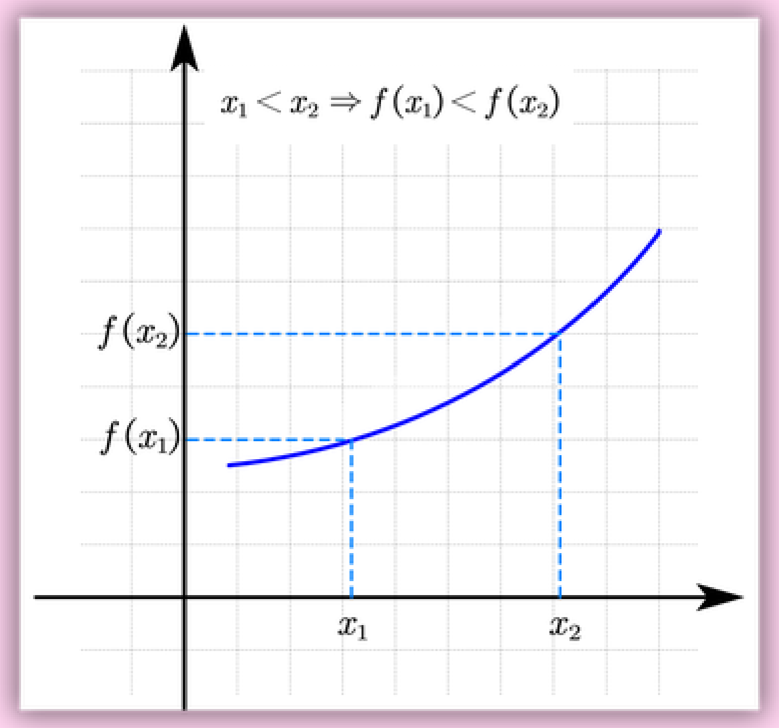
Función lineal

Dom (f) $= \mathcal{R}$ Im (f) $= \mathcal{R}$

FUNCIÒN CRECIENTE

Una función f es creciente en un intervalo si para cualquier par de valores x_1 y x_2 del intervalo:

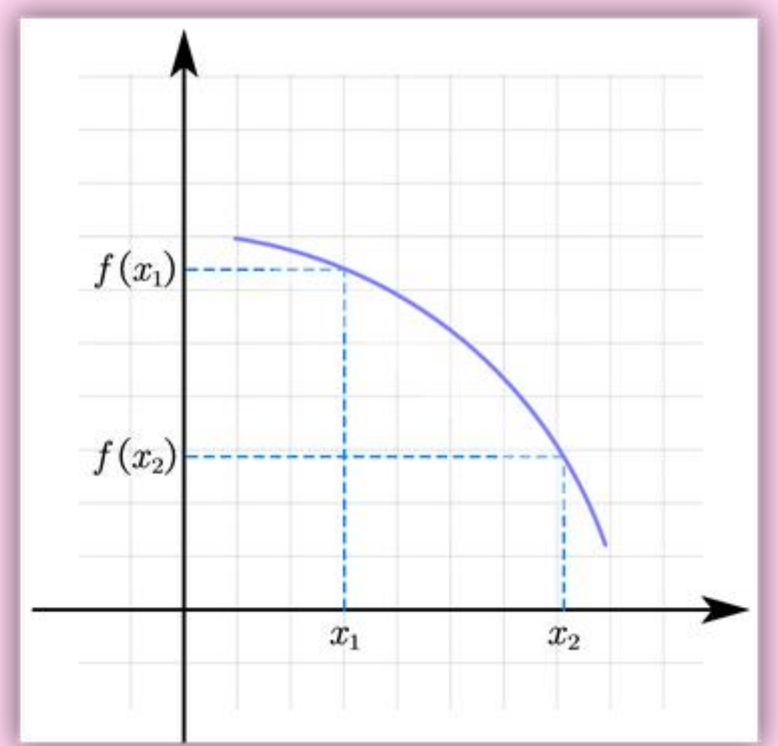
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



FUNCIÒN DECRECIENTE

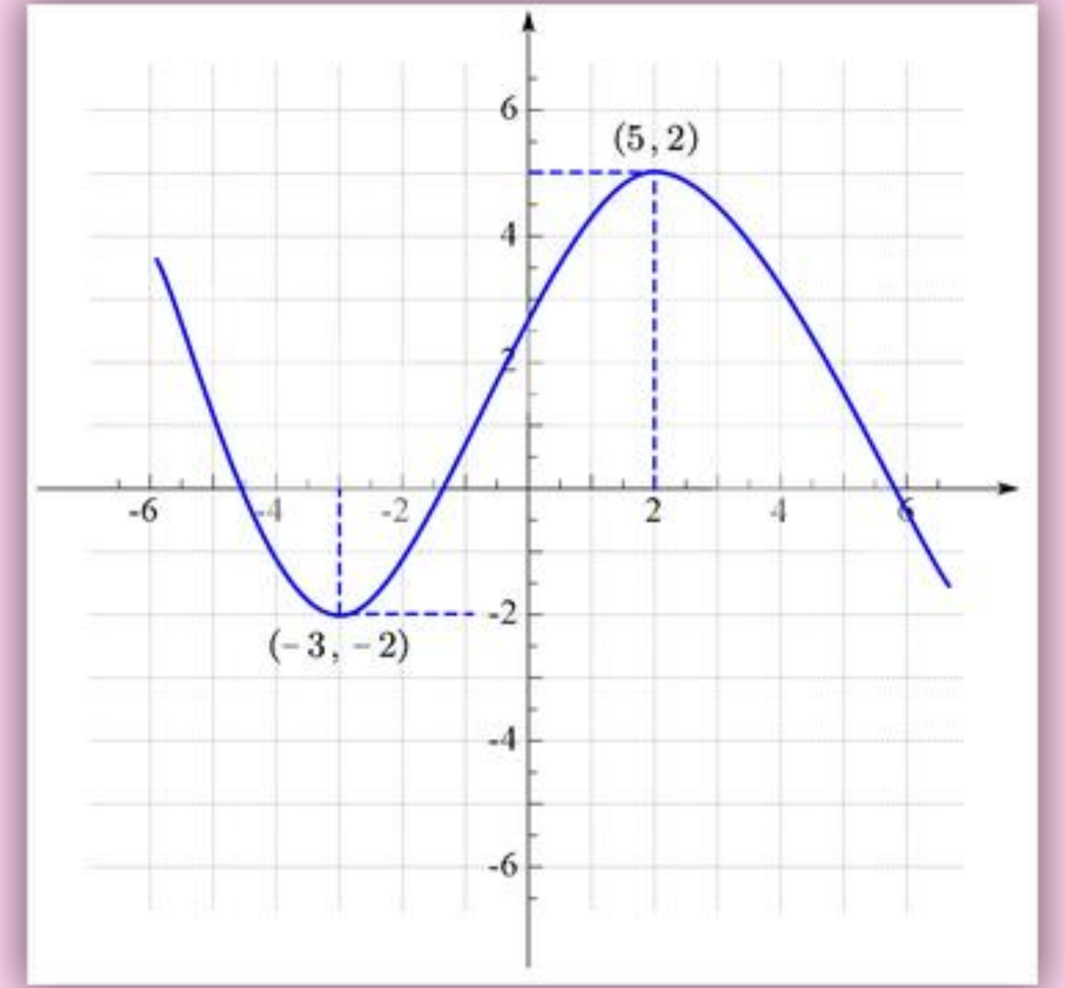
Una función f es decreciente en un intervalo si para cualquier par de valores x_1 y x_2 del intervalo:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



Decreciente: $(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$

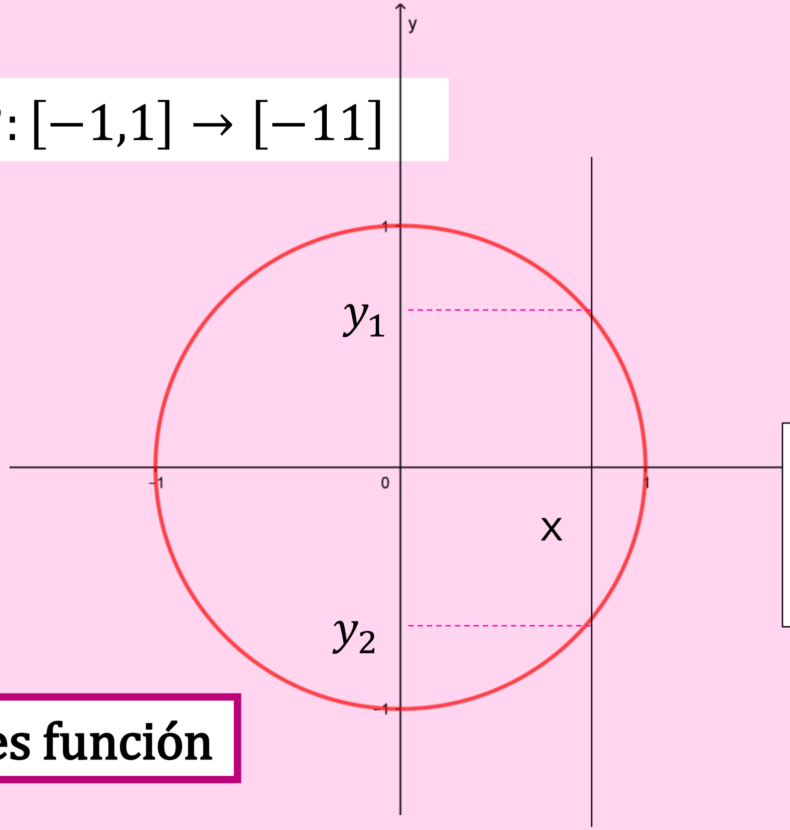
Creciente: (-3;2)



¿Cómo reconocemos si una relación es función?

a) Desde la **gráfica** podemos observar si se cumple la condición de existencia y unicidad a través del trazado de **una recta vertical**

$R: [-1,1] \rightarrow [-11]$

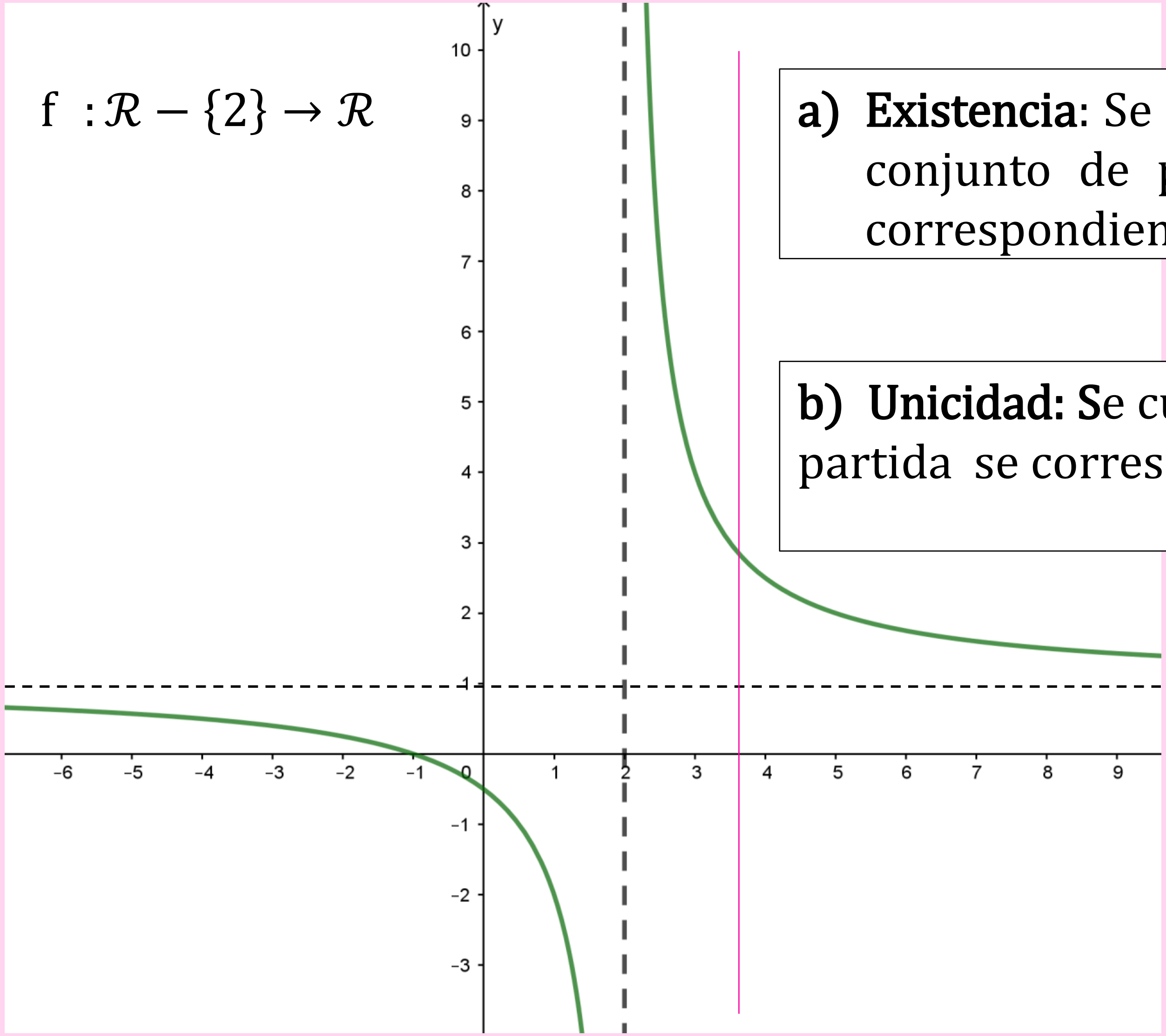


No es función

a) **Existencia**: Se cumple ya que todos los valores **x** del conjunto de partida tienen su correspondiente valor de **y.**

b) **Unicidad: No s**e cumple ya los valores **x** del conjunto de partida No se corresponden un Único valor de **y**.

$f : \mathcal{R} - \{2\} \to \mathcal{R}$



a) **Existencia**: Se cumple ya que todos los valores **x** del conjunto de partida/conjunto dominio tienen su correspondiente valor de **y.**

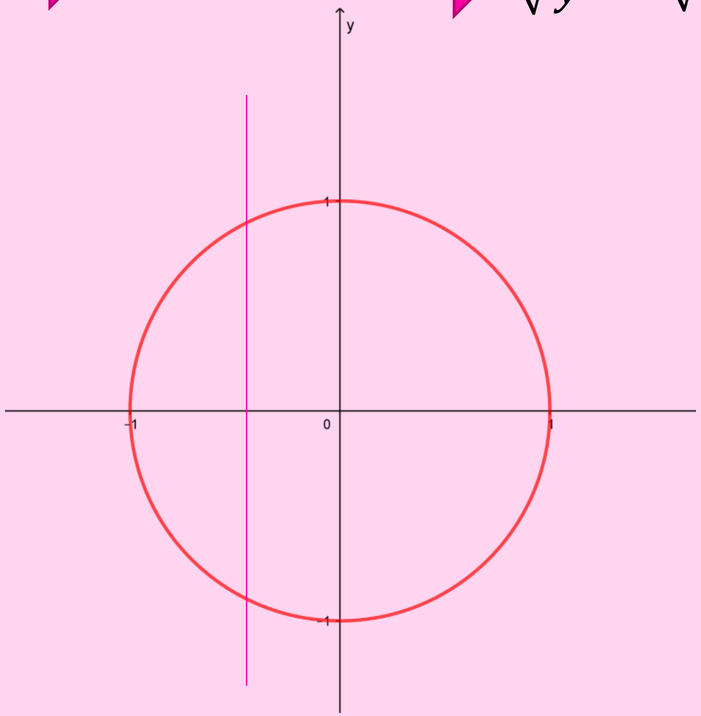
b) **Unicidad: S**e cumple ya los valores **x** del conjunto de partida se corresponden un Único valor de **y**.

$\text{Im}\,(\,f\,) = \mathcal{R} - \{1\}$

b) Desde la **fórmula** podemos observar que si la variable **dependiente** (y) esta elevada a un exponente **par** **no se cumple la condición de unicidad.** O sea, por cada valor que le damos a x obtenemos más de un valor de y

$$x^2+y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow \sqrt{y^2} = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow |y| = \sqrt{1-x^2}$$

FORMA IMPLICITA O GENERAL



$$y = \sqrt{1-x^2} \quad \text{ò} \quad y = -\sqrt{1-x^2}$$

FORMA EXPLICITA

DOMINIO

Es el conjunto de números que le asignamos a la variable **x,** y a través de la función (fórmula) podemos obtener su correspondiente valor de **y**.

IMAGEN

Es el conjunto de números que toma la variable **y** obtenido a través de la función.

EJEMPLO

Determinar el dominio de la siguiente función

a) $f(x) = x^2 + 9x - 1$ FUNCIÓN POLINÓMICA.

Observamos que si a la x le damos cualquier valor numérico real (condición de existencia), obtenemos un único valor de y (condición de unicidad) al realizar la cuenta que nos propone la fórmula

El dominio de las funciones polinómicas son todos los números reales.

$$D_f = \mathcal{R}$$

a) y = $\sqrt{x-2}$ FUNCIÓN IRRACIONAL

Observamos que la variable x forma parte del radicando de una raíz de índice 2. Cuando le damos valores numéricos a **x** para poder obtener el valor de **y**, necesitamos que el radicando sea positivo o cero. (Sabemos que una raíz de índice par no tiene resultado numérico en el conjunto de número reales)

¿Cuáles son los valores numéricos que le podemos dar a la variable x? Planteamos matemáticamente lo que hemos dicho en palabras "el radicando debe ser positivo o cero"

$x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$ Df $= [\mathbf{2}, +\infty)$

c) $f(x) = \ln(\boldsymbol{x} - \mathbf{1})$

FUNCIÒN LOGARITMICA

En este tipo de función (ejemplos c y d), cuando le damos valores numéricos a x para poder obtener el correspondiente valor de y, necesitamos que la expresión algebraica afectada por la logaritmación genere solamente valores numéricos positivos. Sabemos que el logaritmo de un número negativo o cero no existe en el conjunto de números reales

¿Cuáles son los valores numéricos que le podemos dar a x? Planteamos matemáticamente lo que hemos dicho en palabras "la expresión algebraica debe generar solamente valores positivos"

Para c) $x-1 > 0 \rightarrow \boldsymbol{x} > \mathbf{1}$

$Df = (1; +\infty)$

Para d) En esa situación tenemos que observar que la expresión |2-x| siempre genera valores numéricos positivos para cualquier valor que le damos a x. Pero |2-x| no puede ser 0.

¿Qué valor de x no podríamos considerar? |2-x|=0 → $\mathbf{2-x=0}$ →$2=\mathrm{x}$

$$\mathrm{Df}=\mathbb{R}-\{\mathbf{2}\}$$

$e)\ y=\frac{x+1}{2x-3}$ **FUNCIÓN RACIONAL FRACCIONARIA**

En este tipo de función, cuando le damos valores numéricos a x para poder obtener el valor de y, necesitamos que el denominador no sea igual a cero.

¿Qué valor de x no podríamos considerar? 2x-3≠ 0→x≠ $\mathbf{\frac{3}{2}}$ $\mathrm{Df}=\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}$

a) Sea f(x) = $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ .El dominio de las funciones polinómicas son todos los números reales

b) Sea f(x) = $\sqrt[n]{P(x)}$ si n es par, la condición que tenemos que escribir es:

$$P(x) \geq 0$$

c) Sea f(x) = log_bP(x) la condición que tenemos que escribir es:

$$P(x) > 0$$

d) Sea f(x) = $\frac{P(x)}{Q(x)}$, la condiciòn que tenemos que escribir es:

$$Q(x) \neq 0$$

FUNCION RACIONAL FRACCIONARIA

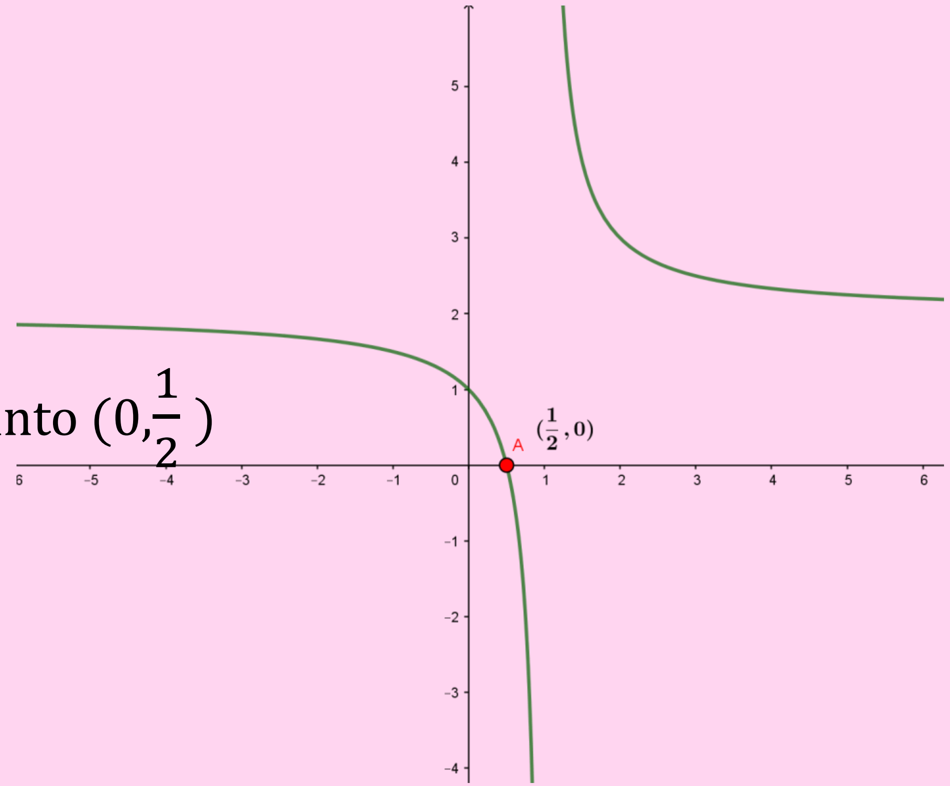
$y = \frac{2x-1}{x-1}$ 1°Obtenemos su dominio: x-1 $\neq$ 0→ x≠1. Df= $\mathbb{R} - \{1\}$

Ceros o raíces de una función-Intersección con el eje x

Ceros o raíces $= \{x \in Df / f(x) = 0\}$

2 ° Obtenemos ceros o raíces.
Igualamos a cero la fórmula de la función: $\frac{2x-1}{x-1}=0$

$2x - 1 = 0 \rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \in Df$ Intersecta al eje x en el punto $(0,\frac{1}{2})$



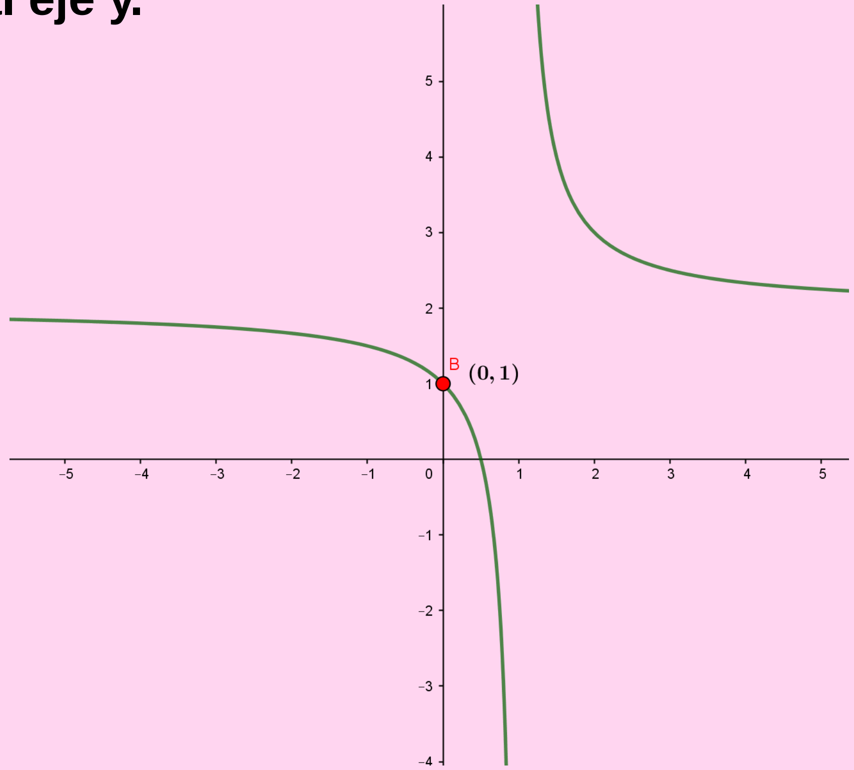
Geométricamente representan los puntos
donde la curva **intersecta al eje x**.

Ordenada al origen- Intersección con el eje y

Ordenada al origen= $\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R} / \mathbf{0} \in \mathbf{Df} \wedge \boldsymbol{f}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{y}\}$

f(x) $= \dfrac{2x-1}{x-1} \longrightarrow \mathrm{f}\,(0) = \dfrac{2.0-1}{0-1} = 1$

Geométricamente representa el punto donde la curva **intersecta al eje y.**



Conjunto de positividad y negatividad

$C^{+} = \{x \in \mathbb{R} / x \in Df \wedge f(x) > 0\}$

Buscamos los **x** que hacen positiva a la variable **y**

$C^{-} = \{x \in \mathbb{R} / x \in Df \wedge f(x) < 0\}$

Buscamos los x que hacen negativa a la variable y

$$\boxed{C^{+} = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)}$$

$$\frac{2x-1}{x-1} > 0$$

$$\boxed{C^{-} = \left(\frac{1}{2} : 1\right)}$$

$$\frac{2x-1}{x-1} < 0$$

Armamos la recta con los ceros del numerador y del denominador

$2x - 1 = 0 \longrightarrow x = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $x - 1 = 0 \longrightarrow x = 1$

$(-\infty; 1/2)$ $\qquad$ $(1/2; 1)$ $\qquad$ $(1;\ +\infty)$

x= 0 $\qquad$ x= 0,75 $\qquad$ x= 2

$\frac{1}{2}$ $\qquad$ 1

$\frac{-}{-} = +$ $\qquad$ $\frac{+}{-} = -$ $\qquad$ $\frac{+}{+} = +$

y= 0

No existe el valor de y

$\frac{1}{0}$

Como el grado del polinomio numerador es IGUAL al grado del polinomio denominador , podemos realizar la DIVISION

$$y = \frac{2x-1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}$$

$$\begin{array}{r|l} 2x - 1 & x - 1 \\ \hline -\ 2x - 2 & 2 \\ \hline 1 & \end{array}$$

2x : x = 2

2(x-1) = 2x-2

ANALIZAMOS

Si le damos a la x valores cada vez mas grande.

$$\boxed{x \longrightarrow +\infty}$$

La división nos da 0,… O sea decimos que tiende a 0

$$\frac{1}{x-1} \longrightarrow 0$$

Si le damos a la x valores cada vez mas pequeños.

$$\boxed{x \longrightarrow -\infty}$$

La división nos da −0,… O sea decimos que tiende a 0

$$\frac{1}{x-1} \longrightarrow 0$$

→ Tiende a 0

Con esta conclusión podemos decir que si en y= $2 + \frac{1}{x-1}$ entonces **y** se acerca a 2 **o sea tiende** a 2

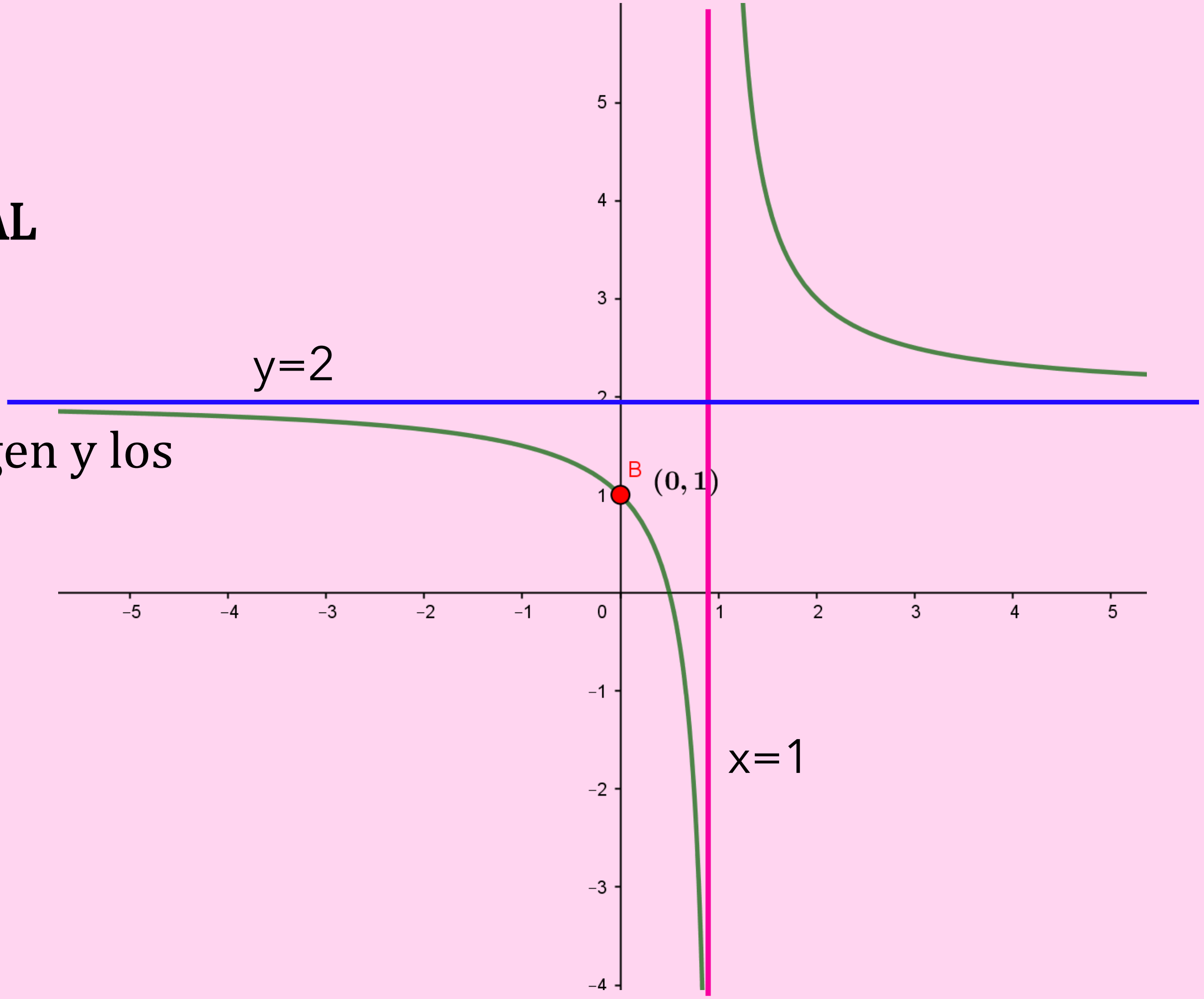
La grafica va a tener dos rectas

RECTA VERTICAL- ASINTOTA VERTICAL

x= 1

RECTA HORIZONTAL- ASINTOTA HORIZONTAL

y= 2



Con la grafica establecemos el conjunto Imagen y los intervalos de crecimiento y decrecimiento

IF= $\mathcal{R}-\{2\}$

Decrecimiento= $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$

Crecimiento={ } CONJUNTO VACÍO

FUNCION POLINOMICA

Sea $y = x^3 - 3x - 2$

$Df = \Re$

Ceros o raíces de una función-Intersección con el eje x

$$x^3-3x-2=0$$

En forma práctica buscamos los **ceros o raíces de x^3-3x-2**. Por tanteo o Método de Gauss observamos que x= 2 es un cero o raíz.

Realizamos la Regla de Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ 2 & & 2 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

El polinomio factorizado es: $x^3-3x-2 = (x-2)\,(x^2+2x+1) = 0$

Ahora resolvemos la ecuación $x^2+2x+1= 0$

Los ceros o raíces reales al polinomio **x^3-3x-2** son : $x_1=x_2= 1$ y $x_3=2$

Intersecta al eje x en los puntos (1;0) y (2;0)

Ordenada al origen- Intersección con el eje y

0 pertenece al dominio entonces podemos calcular el valor de y

$y = 0^3 - 3.0 - 2 = -2$

Conjunto de positividad y negatividad

C^+

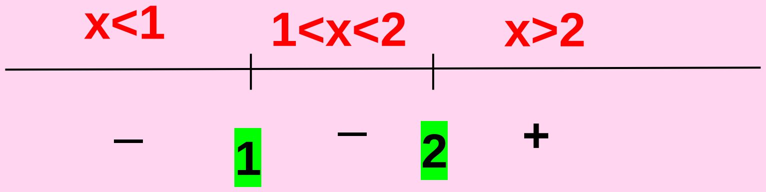
$x^3-3x-2 > 0$

C^-

$x^3-3x-2 > 0$

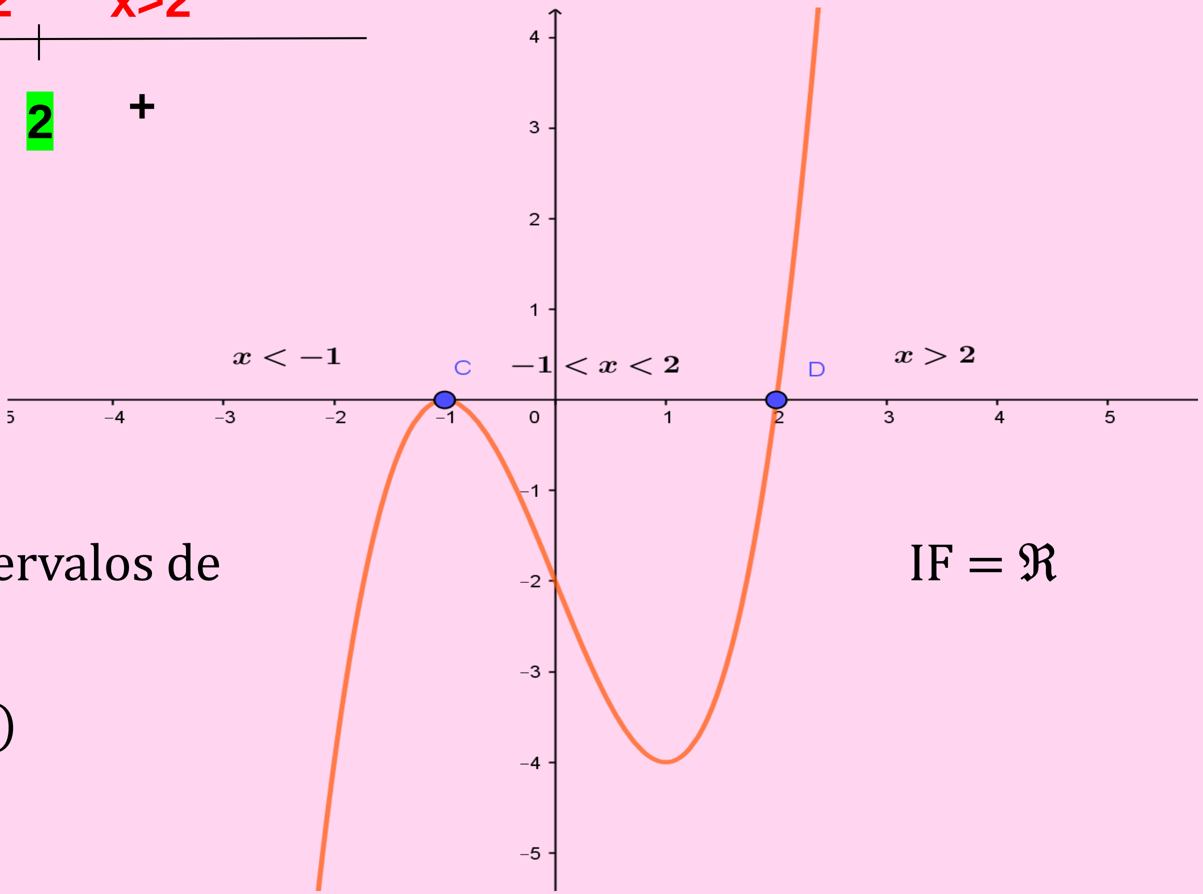
Los valores de x que hacen 0 a la expresión polinómica ya los obtuvimos. Ahora los ubicamos en la recta para analizar el signo que toma x^3-3x-2 cuando reemplazamos la x por un numero.

b) Ubicamos en la recta real (eje real x) los ceros o raíces: $x_1=x_2= 1$ y $x_3= 2$.



$C^{+}= (2, +\infty)$

$C^{-} = (-\infty,1) \cup (1,2)$



Con la grafica establecemos los intervalos de crecimiento y decrecimiento

$IF = \Re$

Crecimiento= $(-\infty; -1) \cup (1;\ +\infty)$

Decrecimiento= $(-1;\ 1)$