

RESPUESTAS GUÍA DE EJERCITACIÓN 5 TRANSFORMACIONES LINEALES

Ejercicio 1.

1.1) Es transformación lineal (T.L.); se corresponde con una proyección sobre el eje vertical para luego efectuar una rotación en $\pi/2$ en sentido horario.

$$f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 / f(x_1, x_2) = (x_2, 0); A \cdot X = F(X) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Nu}(f) = \{(0, x_2) \mid \forall x_2 \in \mathbf{R}\} \text{ (todo el eje vertical); } \dim(\text{Nu}(f)) = 1; B(\text{Nu}(f)) = \{(0, 1)\}$$

$$\text{Im}(f) = \{(x_1, 0) \mid \forall x_1 \in \mathbf{R}\} \text{ (todo el eje horizontal); } \dim(\text{Im}(f)) = 1; B(\text{Im}(f)) = \{(1, 0)\}$$

1.2) No es T.L. Contraejemplo $\left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = (2,5); \bar{y} = (3,4) \quad \bar{x} + \bar{y} = (5,9) \\ f(\bar{x}) + f(\bar{y}) \neq f(\bar{x} + \bar{y}) \\ (10,0) + (12,0) \neq (5 \cdot 9, 0) \\ (22,0) \neq (45,0) \end{array} \right. .$

1.3) No es T.L. Contraejemplo $\left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = (2,5); \bar{y} = (3,4) \quad \bar{x} + \bar{y} = (5,9) \\ f(\bar{x}) + f(\bar{y}) \neq f(\bar{x} + \bar{y}) \\ (2 - 1, 5 + 2) + (3 - 1, 4 + 2) \neq (5 - 1, 9 + 2) . \\ (1,7) + (2,6) \neq (4,11) \\ (3,13) \neq (4,11) \end{array} \right. .$

1.4) Es T.L.

$$f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 / f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 6x_3, 0, -4x_1 + 12x_3); \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 6x_3 \\ 0 \\ -4x_1 + 12x_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 - 3x_3 = 0\} = \{(3x_3, x_2, x_3) \mid \forall x_2, \forall x_3 \in \mathbf{R}\}$$

$$\dim(\text{Nu}(f)) = 2; B(\text{Nu}(f)) = \{(0, 1, 0); (3, 0, 1)\}$$

$$\text{Im}(f) = \{(\omega_1, 0, -2\omega_1) \mid \forall \omega_1 \in \mathbf{R}\}; \dim(\text{Im}(f)) = 1; B(\text{Im}(f)) = \{(1, 0, -2)\}$$

1.5) Es T.L.

$$f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3 / f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1, x_1 + x_2); \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Nu}(f) = \{(0, 0)\}; \dim(\text{Nu}(f)) = 0$$

$$\text{Im}(f) = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbf{R}^3 \mid \omega_1 - \omega_2 - 2\omega_3 = 0\} = \{(\omega_1, \omega_1 - 2\omega_3, \omega_3) \mid \forall \omega_1, \forall \omega_3 \in \mathbf{R}\}$$

$$\dim(\text{Im}(f)) = 1; B(\text{Im}(f)) = \{(1, 1, 0); (0, -2, 1)\}$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{1.6) No es T.L. Contraejemplo} \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}; \bar{y} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \quad \bar{x} + \bar{y} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \\
 \\
 f(\bar{x}) + f(\bar{y}) \neq f(\bar{x} + \bar{y}) \\
 5 - (-6) + (-10) - (-7) \neq 0 - 4 \\
 11 + (-3) \neq -4 \\
 8 \neq -4
 \end{array} .$$

1.7) Es T.L.

$$f: \mathbf{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbf{R}^{2 \times 2} / f(X) = X - X^T \text{ con } X \in \mathbf{R}^{2 \times 2}. X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2 \times 2} \text{ isomorfo con } (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 - x_3 \\ -x_2 + x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Nu}(f) = \{X \in \mathbf{R}^{2 \times 2} / X = X^T\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}, \forall x_1, \forall x_2, \forall x_4 \in \mathbf{R} \right\} \text{ (matrices simétricas de orden 2)}$$

$$\dim(\text{Nu}(f)) = 3; B(\text{Nu}(f)) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Im}(f) = \{X \in \mathbf{R}^{2 \times 2} / X = -X^T\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -x_3 \\ x_3 & 0 \end{pmatrix}, \forall x_3 \in \mathbf{R} \right\} \text{ (matrices antisimétricas de orden 2)}$$

$$\dim(\text{Im}(f)) = 1; B(\text{Im}(f)) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejercicio 2.

- $f_1(x, y) = (x, -y), A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, reflexión con respecto al eje x .

- $f_2(x, y) = (-x, y), A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, reflexión con respecto al eje y .

- $f_3(x, y) = (y, x), A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, reflexión con respecto a la recta $y=x$.

- rotación en $\pi/4$ alrededor del origen con sentido antihorario

$$f_4(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \right), A_4 = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\text{sen}(\pi/4) \\ \text{sen}(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

- composición de dos transformaciones: una rotación en $\pi/4$ alrededor del origen con sentido horario (g) y una reflexión con respecto al eje y (h), esto es $h \circ g \Rightarrow A_h \cdot A_g$.

$$f_5(x, y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \right), A_5 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\pi/4) & -\text{sen}(-\pi/4) \\ \text{sen}(-\pi/4) & \cos(-\pi/4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

- $f_6(x, y) = \left(\frac{3}{2}x, y \right), A_6 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, expansión en la dirección del eje x con factor $k = \frac{3}{2}$.
- $f_7(x, y) = \left(\frac{7}{8}x, y \right), A_7 = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, compresión en la dirección del eje x con factor $k = \frac{7}{8}$.
- $f_8(x, y) = \left(x, \frac{3}{2}y \right), A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, expansión en la dirección del eje y con factor $k = \frac{3}{2}$.
- $f_9(x, y) = \left(x + \frac{1}{2}y, y \right), A_9 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, deslizamiento cortante o cizalladura en la dirección del eje x con factor $k = \frac{1}{2}$.

$$f_{10}(x, y) = \left(x, \frac{1}{2}x + y \right), A_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \text{deslizamiento cortante o cizalladura en la dirección del eje } y$$

con factor $k = \frac{1}{2}$.

Ejercicio 3.

Caso 1: $f(x, y) = (1,5x, 1,5y)$, cambio de escala en un factor 1,5, $A = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix}$.

Caso 2: $f(x, y) = (-1,5x, -1,5y)$, cambio de escala en un factor 1,5 y rotación en π alrededor del origen, $A = \begin{pmatrix} -1,5 & 0 \\ 0 & -1,5 \end{pmatrix}$.

Caso 3: $f_i(x, y) = (-x, y)$, reflexión con respecto al eje y , $A_i = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$f_{ii}(x, y) = (-y, x)$, rotación en $\pi/2$ alrededor del origen con sentido antihorario,

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Caso 4: $f(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \right)$, rotación en $\pi/4$ alrededor del origen con sentido

antihorario, $A = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\text{sen}(\pi/4) \\ \text{sen}(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$.

Caso 5: $f_i(x, y, z) = (-x, y, z)$, reflexión con respecto al plano coordenado (yz) , $A_i = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$f_{ii}(x, y, z) = (-x, -y, z)$, rotación en π con respecto al eje z en sentido antihorario,

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4.

Caso 1: a) $\text{Im}(f)$: recta sobre la cual se proyecta; $\text{Im}(f) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / y = x\}$.

$\text{Nu}(f)$: recta que pasa por el origen y es perpendicular a aquella sobre la que se proyecta;

$$\text{Nu}(f) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / y = -x\}.$$

b) $\lambda=0$; $S_{\lambda=0} = \text{Nu}(f) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / y = -x\}$.

$\lambda=1$; $S_{\lambda=1} = \text{Im}(f) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / y = x\}$ (los vectores de este subespacio son invariantes).

No puede haber otro valor de λ pues esta transformación, salvo para los vectores que pertenecen a la recta $y=x$ implica cambio de dirección.

c) $f(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$; $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Caso 2: a) $\text{Im}(f) \equiv \mathbf{R}^2$; $\text{Nu}(f) = \{\vec{0}_{\mathbf{R}^2}\}$.

b) $\lambda=1$; $S_{\lambda=1} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / y = x\}$ (los vectores que pertenecen a la recta sobre la que se refleja; subespacio invariante).

$\lambda=-1$; $S_{\lambda=-1} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / y = -x\}$ (los vectores que pertenecen a la recta que pasa por el origen y es perpendicular a aquella sobre la que se refleja; cada vector se transforma en su opuesto).

c) $f(x, y) = (y, x)$; $A = ((a_{i,j})) = 1 - \delta_{i,j} = \begin{cases} a_{1,1} = a_{2,2} = 0 \\ a_{1,2} = a_{2,1} = 1 \end{cases}$.

Caso 3: a) $\text{Im}(f)$: plano sobre el que se proyecta; $\text{Im}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / y = 0\}$.

$\text{Nu}(f)$: recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano sobre el que se proyecta;

$$\text{Nu}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x = z = 0\}.$$

b) $\lambda=0$; $S_{\lambda=0} = \text{Nu}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x = z = 0\}$.

$\lambda=1$; $S_{\lambda=1} = \text{Im}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / y = 0\}$ (los vectores de este subespacio son invariantes).

c) $f(x, y, z) = (x, 0, z)$; $A = ((a_{i,j})) = \delta_{i,j} - \delta_{2,2} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i = j = 1) \vee (i = j = 3) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$.

Caso 4: a) $\text{Im}(f)$: plano sobre el que se proyecta $\equiv \pi$.

$\text{Nu}(f)$: recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano sobre el que se proyecta;

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{x} = 0.$$

b) $\lambda = 0$; $S_{\lambda=0} = \text{Nu}(f)$. $\lambda = 1$; $S_{\lambda=1} = \text{Im}(f)$.

c) $\pi \equiv x + y + z = 0$.

Caso 5: a) $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ es transformación lineal;
 $\text{Im}(f) = \{\vec{0}_{\mathbf{R}^3}\}$, $\dim(\text{Im}(f))=0$; $\text{Nu}(f)=\mathbf{R}^3$, $\dim(\text{Nu}(f))=3$.

b) $\text{Nu}(f)$: el conjunto de todos los vectores paralelos a \vec{v}_0 ;
 $\text{Nu}(f) = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 / \vec{x} = \alpha \vec{v}_0 \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}\}$.

$\text{Im}(f)$: plano que pasa por el origen y es perpendicular a \vec{v}_0 ;

$\text{Im}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / ax + by + cz = 0\}$.

$$f(x, y, z) = (cy - bz, -cx + az, bx - ay); \quad A = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Si $\vec{v}_0 = \vec{0}$, el único autovalor es $\lambda=0$ con $S_{\lambda=0}=\mathbf{R}^3$.

Si $\vec{v}_0 \neq \vec{0}$, el único autovalor es $\lambda=0$ con $S_{\lambda=0}=\text{Nu}(f)$.

Ejercicio 5.

5.1) $r': x-y=0$; **5.2)** $r': 2x-7y=0$; **5.3)** $r': 2x+y=0$; **5.4)** $r': x-2y=0$; **5.5)** $r': (8+5\sqrt{3})x+11y=0$

Ejercicio 6.

6.1) i. $\text{Nu}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x = y = 0\}$; recta coincidente con el eje z .

$\text{Im}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / z = 0\}$; plano coordenado xy .

ii. $\lambda=0$; $S_{\lambda=0} = \text{Nu}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x = y = 0\}$.

$\lambda=-1$; $S_{\lambda=-1} = \text{Im}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / z = 0\}$

iii. $f(x, y, z) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, 0)$; $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

iv. $g(x, y, z) = (x, y, 0)$; $A_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$h(x, y, z) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, 1)$; $A_h = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(h \circ g) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = h \left(g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

6.2) i. Para $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $(f \circ g) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es diferente de $(g \circ f) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Para $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$: $(f \circ g) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es diferente de $(g \circ f) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{ii. } f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+y)/2 \\ (x+y)/2 \\ 0 \end{pmatrix}; (f \circ g) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+y)/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; (g \circ f) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/2 \\ x/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

O, en forma equivalente: $f(x, y, z) = (x, 0, 0)$; $g(x, y, z) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, 0\right)$;

$$(f \circ g)(x, y, z) = \left(\frac{x+y}{2}, 0, 0\right); (g \circ f)(x, y, z) = \left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}, 0\right).$$

$$\text{iii. } A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; A_g = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_{f \circ g} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_f \cdot A_g; A_{g \circ f} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_g \cdot A_f.$$

$$\text{6.3) No son posibles: } g \circ h, f \circ g. (h \circ g) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 + x_3 \\ -3x_2 + x_3 \end{pmatrix}; (g \circ f) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ 0 \\ 4x_1 - 8x_2 \end{pmatrix};$$

$$(f \circ h) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}; (h \circ f) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 4x_2 \\ -2x_2 \end{pmatrix}.$$

Observación. Si en el par se pudiera utilizar una misma función, esto es la composición de una función consigo misma, sólo podría realizarse $g \circ g$.

$$\text{6.4) } g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_3, x_2 - x_3, x_3); A_g = (A_f)^{-1}.$$

6.5) Si se rota seis veces un ángulo $\theta = \pi/3$, se llega nuevamente al punto de partida. Esta situación indica que la potencia sexta de A será la matriz identidad de orden 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}; A^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.6) Si al vector reflejado según el plano $\alpha \equiv x + y - z = 0$, se le aplica nuevamente la transformación, o sea se lo vuelve a reflejar, se vuelve al punto de partida. Por lo tanto, la transformación resultante $f \circ f$ es la transformación identidad. Esto indica que $A^2 = I$, es decir que A es involutiva.

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}, A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 7. a)

$$f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 / f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_2 + 3x_3, 3x_3)$$

Autovalores: $\lambda = 1$; $\lambda = 2$; $\lambda = 3$

$\lambda = 1$; $S_{\lambda=1} = \{(x, 0, 0), \forall x \in \mathbf{R}\}$; $B = \{(1, 0, 0)\} \rightarrow B'_{S(\lambda=1)} = \{(1, 0, 0)\}$ base normalizada

$$\lambda = 2; S_{\lambda=2} = \{(2y, y, 0), \forall y \in \mathbf{R}\}; B = \{(2, 1, 0)\} \rightarrow B'_{S(\lambda=2)} = \left\{ \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0 \right) \right\}$$

$$\lambda = 3; S_{\lambda=3} = \left\{ \left(\frac{5}{2}z, 3z, z \right), \forall z \in \mathbf{R} \right\}; B = \{(5, 6, 2)\} \rightarrow B'_{S(\lambda=3)} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{65}}{13}, \frac{6\sqrt{65}}{65}, \frac{2\sqrt{65}}{65} \right) \right\}$$

$$A \text{ es diagonalizable. Matriz de pasaje } P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

No es posible hallar una matriz que diagonalice ortogonalmente a A . Esta matriz no es simétrica. Esto puede verse también fácilmente si se toma la base de autovectores y se la ortonormaliza

$$B_A = \{(1, 0, 0); (2, 1, 0); (5, 6, 2)\} \rightarrow B'_A = \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\},$$

no se obtiene una base de autovectores que permita diagonalizar a A .

$$g: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 / g(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_2 - x_3, 2x_2 + 4x_3)$$

Autovalores: $\lambda = 2$ (multiplicidad 2); $\lambda = 3$

$$\lambda = 2; S_{\lambda=2} = \{(x, 0, 0), \forall x \in \mathbf{R}\}; B = \{(1, 0, 0)\} \rightarrow B'_{S(\lambda=2)} = \{(1, 0, 0)\} \text{ base normalizada}$$

$$\lambda = 3; S_{\lambda=3} = \{(y, y, -2y), \forall y \in \mathbf{R}\}; B = \{(1, 1, -2)\} \rightarrow B'_{S(\lambda=3)} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right) \right\}$$

A no es diagonalizable.

Observar que si se ortonormaliza la base de autovectores, deja de ser una base de autovectores

$$B_A = \{(1, 0, 0); (1, 1, -2)\} \rightarrow B'_A = \left\{ (1, 0, 0); \left(0, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{-2\sqrt{5}}{5} \right) \right\}$$

$$h: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 / h(\vec{x}) = \text{proy}_{\pi}(\vec{x}) \text{ proyección del vector } \vec{x} \text{ sobre el plano } \pi \equiv x + y + z = 0$$

$$h(\vec{x}) = \left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-x + 2y - z}{3}, \frac{-x - y + 2z}{3} \right)$$

Autovalores: $\lambda = 1$ (multiplicidad 2); $\lambda = 0$

$$\lambda = 1; S_{\lambda=1} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x + y + z = 0\}; B = \{(-1, 1, 0); (1, 1, -2)\} \rightarrow$$

$$B'_{S(\lambda=1)} = \left\{ \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right); \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{3} \right) \right\} \text{ base ortonormalizada}$$

$$\lambda = 0; S_{\lambda=0} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x = y = z\}; B = \{(1, 1, 1)\} \rightarrow B' = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right\}$$

Base de autovectores ortonormal

$$B = \left\{ \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right); \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{3} \right); \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right\}$$

$$A \text{ es diagonalizable. Matriz de pasaje } P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

A es diagonalizable ortogonalmente. Matriz de pasaje $P = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$.

Ejercicio 7.b)

i. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$; ecuación característica: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$.

Autovalores $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2$. Autovectores: $\vec{v}_{\lambda=1} = (-1, 1)$, $S_{\lambda=1} = \{(x, -x), \forall x \in \mathbf{R}\}$;
 $\vec{v}_{\lambda=2} = (-2, 1)$, $S_{\lambda=2} = \{(-2y, y), \forall y \in \mathbf{R}\}$.

Es diagonalizable. $P = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $D = P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

ii. $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 3$; no existen autovalores reales ($\exists \lambda \in \mathbf{R}$).

No es diagonalizable.

iii. $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^2 - 25$; ecuación característica: $\lambda^2 - 25 = 0$.

Autovalores $\lambda_1 = 5; \lambda_2 = -5$. Autovectores: $\vec{v}_{\lambda=5} = (1, 2)$, $S_{\lambda=5} = \{(x, 2x), \forall x \in \mathbf{R}\}$;
 $\vec{v}_{\lambda=-5} = (-2, 1)$, $S_{\lambda=-5} = \{(-2y, y), \forall y \in \mathbf{R}\}$.

$$D = P^{-1} \cdot B \cdot P = P^T \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

iv. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; ecuación característica $(5 - \lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 5) = 0$.

Autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 5; \lambda_3 = 1$. Autovectores $\vec{v}_{\lambda=1} = (1, 1, 0)$; $B(S_{\lambda=5}) = \{(-1, 1, 0); (0, 0, 1)\}$ base ortogonal.

Ortonormalizando los autovectores para hallar la matriz de pasaje ortogonal:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; D = P^{-1} \cdot F \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

vi. $G = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; ecuación característica $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$.

Autovalores $\lambda_1 = 2$. Autovectores $\vec{v}_{\lambda=2} = (1, 1, -3)$. No existe la matriz de pasaje P .

Ejercicio 8.

8.1) i. Sí es suficiente;

$$f(2,0,2) = f[(1,-1,2) + (1,1,0)] = f(1,-1,2) + f(1,1,0) = (0,3,1) + (1,2,-1) = (1,5,0).$$

ii. No. $\{(1,-1,2);(1,1,0)\}$ no es base de \mathbf{R}^3 .

Es posible hallar los transformados de los vectores: $(a;b;c) / -a + b + c = 0$.

8.2) No. $(-2,2,-4) = (-2) \cdot (1,-1,2) \wedge f(-2,2,-4) \neq (-2) \cdot f(1,-1,2)$

8.3) Si: $\{(1,-1,2);(1,1,-4);(1,0,-2)\}$ es base de \mathbf{R}^3 . $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 / f(x,y,z) = \left(0, -2y + \frac{1}{2}z, x \right)$

8.4) $\{(1,-1);(1,1)\}$ es base de \mathbf{R}^2 .

$\forall \vec{x} \in \mathbf{R}^2 : \vec{x} = \alpha \cdot (1,-1) + \beta \cdot (1,1)$ y esta combinación lineal es única, por ser combinación lineal de vectores de una base.

Luego: $f(\vec{x}) = \alpha \cdot f(1,-1) + \beta \cdot f(1,1)$, que es también combinación lineal única.

$$f(x,y) = (4x - 2y, -x - 3y).$$

8.5) Existe la transformación lineal f , pero no es única: $\{(1,-1,2);(1,1,-4);(0,-2,6)\}$, no es base para \mathbf{R}^3 (Observación: $(0,-2,6) = (1,-1,2) - (1,1,-4)$).

Para definir alguna transformación lineal, basta con completar el conjunto $\{(1,-1,2);(1,1,-4)\}$, a una base para \mathbf{R}^3 y determinar el transformado de dicho vector.

Ejemplo 1: si $\begin{cases} f(1,-1,2) = (0,3,1) \\ f(1,1,-4) = (0,-4,1) \\ f(1,0,0) = (0,0,0) \end{cases} \Rightarrow f_1 : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 / f_1(x,y,z) = \left(0, -2y + \frac{1}{2}z, -3y - z \right).$

Ejemplo 2: si $\begin{cases} f(1,-1,2) = (0,3,1) \\ f(1,1,-4) = (0,-4,1) \\ f(0,1,0) = (1,1,1) \end{cases} \Rightarrow$

$$f_2 : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 / f_2(x,y,z) = \left(\frac{1}{3}x + y + \frac{1}{3}z, x + y + \frac{3}{2}z, \frac{4}{3}x + y + \frac{1}{3}z \right).$$

Ejercicio 9.

9.1) $\dim(\text{Nu}(f))=1$ si $k=0 \vee k=-3/2$.

9.2) Por ejemplo, $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 / f(x_1,x_2,x_3) = (-x_1 - x_2 - x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$.

9.3) $a=1 \wedge b=-1$; **9.4)** Por ejemplo, $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 / f(x_1,x_2) = (-2x_1 + x_2, -4x_1 + 2x_2)$.

Ejercicio 10.

10.1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; el polinomio característico es: $P(\lambda) = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 18\lambda$ y los autovalores que se

obtienen resolviendo la ecuación característica, $\lambda^3 - 9\lambda^2 + 18\lambda = 0$, son:

$$\lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 = 3 \wedge \lambda_3 = 6.$$

Los subespacios asociados son:

$$S_{\lambda=0} = \{ \vec{x} \in \mathbf{R}^3 / \vec{x} = \alpha(-2, 2, 1), \forall \alpha \in \mathbf{R} \}$$

$$S_{\lambda=3} = \{ \vec{x} \in \mathbf{R}^3 / \vec{x} = \beta(1, 2, -2), \forall \beta \in \mathbf{R} \}$$

$$S_{\lambda=6} = \{ \vec{x} \in \mathbf{R}^3 / \vec{x} = \delta(2, 1, 2), \forall \delta \in \mathbf{R} \}$$

10.2) La transformación lineal es: $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 / f(x, y, z) = (3x + y, y + 3z, y - z)$ y la correspondiente matriz asociada, utilizando la base canónica para \mathbf{R}^3 , resulta:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

10.3) i. La afirmación es verdadera dado que \vec{u} y \vec{v} son autovectores linealmente independientes, con un mismo autovalor, igual a cero, por lo cual se transforman en el vector nulo del segundo espacio, y $\{\vec{u}; \vec{v}\}$, es una base para el núcleo de la transformación lineal, que tendrá dimensión dos. Es posible agregar otro vector, linealmente independiente con los vectores \vec{u} y \vec{v} , cuyo transformado también sea el vector nulo, con lo cual la dimensión para el núcleo será tres.

ii. El conjunto $\{(1,1,0); (0,1,1)\}$, debemos completarlo a una base para \mathbf{R}^3 . Para completar a la base, debemos elegir vectores: $(a, b, c) / a - b + c \neq 0$.

Si el vector elegido es $(a, b, c) = (1, 0, 1) \rightarrow f(1, 0, 1) = (1, 1, 0)$ y para esta elección la transformación lineal es:

$$f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 / f(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z, \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z, 0 \right).$$

Ejercicio 11.

- i. Ecuación Característica: $(1 - \lambda)^2 \cdot (3 - \lambda) = 0$; autovalores: $\lambda_1 = 1$ (doble); $\lambda_2 = 3$ (simple).
La matriz sólo diagonaliza para $k = 1$. $B = \{(1, 0, 0); (0, 1, -2); (1, 0, 2)\}$.
- ii. Ecuación Característica: $(\lambda - 1) \cdot [-(\lambda^2 - 1)] = 0$; autovalores: $\lambda_1 = 1$ (doble); $\lambda_2 = -1$ (simple)
La matriz sólo diagonaliza para $k = 0$. $B = \{(1, 0, 2); (0, 1, -1); (0, 1, 1)\}$.