RESPUESTAS GUÍA EJERCITACIÓN 2 MATRICES Y DETERMINANTES

Ejercicio 1.

$$A=((a_{i,j}))\in\mathbf{R}^{3\times 3},\ A=\begin{pmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}&a_{1,3}\\a_{2,1}&a_{2,2}&a_{2,3}\\a_{3,1}&a_{3,2}&a_{3,3}\end{pmatrix}$$

i) $\begin{pmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}&a_{1,3}\\a_{\mathbf{2},1}&a_{\mathbf{2},2}&a_{\mathbf{2},3}\\a_{3,1}&a_{3,2}&a_{3,3}\end{pmatrix} \rightarrow i=2$

ii) $\begin{pmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}&a_{1,\mathbf{3}}\\a_{2,1}&a_{2,2}&a_{2,\mathbf{3}}\\a_{3,1}&a_{3,2}&a_{3,\mathbf{3}}\end{pmatrix} \rightarrow j=3$

iii) $\begin{pmatrix}a_{\mathbf{1,1}}&a_{1,2}&a_{1,3}\\a_{2,1}&a_{\mathbf{2,2}}&a_{2,3}\\a_{3,1}&a_{3,2}&a_{\mathbf{3,3}}\end{pmatrix} \rightarrow i=j$

iv) $\begin{pmatrix}a_{1,1}&a_{\mathbf{1,2}}&a_{\mathbf{1,3}}\\a_{2,1}&a_{2,2}&a_{\mathbf{2,3}}\\a_{3,1}&a_{3,2}&a_{3,3}\end{pmatrix} \rightarrow i<j$

v) $\begin{pmatrix}a_{\mathbf{1,1}}&a_{1,2}&a_{1,3}\\a_{\mathbf{2,1}}&a_{\mathbf{2,2}}&a_{2,3}\\a_{\mathbf{3,1}}&a_{\mathbf{3,2}}&a_{\mathbf{3,3}}\end{pmatrix} \rightarrow i\geq j$

vi) $\begin{pmatrix}a_{1,1}&a_{\mathbf{1,2}}&a_{\mathbf{1,3}}\\a_{\mathbf{2,1}}&a_{2,2}&a_{\mathbf{2,3}}\\a_{\mathbf{3,1}}&a_{\mathbf{3,2}}&a_{3,3}\end{pmatrix} \rightarrow i\neq j$

vii) $\begin{pmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}&a_{1,3}\\a_{\mathbf{2,1}}&a_{2,2}&a_{2,3}\\a_{3,1}&a_{\mathbf{3,2}}&a_{3,3}\end{pmatrix} \rightarrow i=j+1$

viii) $\begin{pmatrix}a_{1,1}&a_{\mathbf{1,2}}&a_{1,3}\\a_{2,1}&a_{2,2}&a_{\mathbf{2,3}}\\a_{3,1}&a_{3,2}&a_{3,3}\end{pmatrix} \rightarrow i=j-1$

ix) $\begin{pmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}&a_{\mathbf{1,3}}\\a_{2,1}&a_{\mathbf{2,2}}&a_{2,3}\\a_{\mathbf{3,1}}&a_{3,2}&a_{3,3}\end{pmatrix} \rightarrow i+j=4$

Ejercicio 2.

2.1) **a)** $A=\begin{pmatrix}-4&-6&-8\\-1&-3&-5\end{pmatrix}$; **b)** $A=\begin{pmatrix}2&-1&-2\\3&4&-1\end{pmatrix}$; **c)** $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\end{pmatrix}$

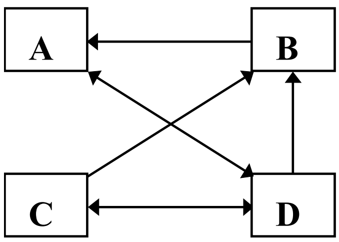
2.2) **a)** $A=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&1\\-1&1&-1&1&-1\\1&-1&1&-1&1\\-1&1&-1&1&-1\end{pmatrix}$; **b)** $A=\begin{pmatrix}0&-1&-2&-3&-4\\3&0&-1&-2&-3\\4&5&0&-1&-2\\5&6&7&0&-1\end{pmatrix}$; **c)** $A=\begin{pmatrix}0&0&0&1&1\\0&0&0&2&0\\1&1&2&2&1\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}&a_{1,3}&a_{1,4}&a_{1,5}\\a_{2,1}&a_{2,2}&a_{2,3}&a_{2,4}&a_{2,5}\\a_{3,1}&a_{3,2}&a_{3,3}&a_{3,4}&a_{3,5}\\a_{4,1}&a_{4,2}&a_{4,3}&a_{4,4}&a_{4,5}\end{pmatrix}$$

$\delta_{i+j,6}=1$ $\qquad \delta_{i,3}=1$ $\qquad \delta_{j,4}=1$

Ejercicio 3.

3.1) $M=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0\end{pmatrix}$; **3.2)**



Ejercicio 4.

4.1) $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$; **4.2)** $\alpha=-1/2 \wedge \beta=3$; **4.3)** $A \cdot C - C \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; $C \cdot A - A \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

4.4) $\begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; **4.5)** $B^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall\, n \in \mathbf{N}$; $C^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}, \forall\, n \in \mathbf{N}$

Ejercicio 6.

6.1) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \right\}$; **6.2)** $\alpha=0 \vee \alpha=2$

6.3) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & -5/7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 & 5/7 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \right\}$

Ejercicio 7.

7.1) n^2; **7.2)** n; **7.3)** 1; **7.4)** $\dfrac{n.(n+1)}{2}$; **7.5)** $\dfrac{n.(n-1)}{2}$; **7.6)** $\dfrac{n.(n+1)}{2}$

Ejercicio 9.

9.7) Sugerencia. Primer paso: $F_1 \leftarrow F_1 + F_2 + F_3 + F_4$. Segundo paso: $C_j \leftarrow C_j - C_1, j = 2,3,4$

Ejercicio 10.

10.1) 0; **10.2)** -166

Ejercicio 11.

11.1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; **11.2)** $B^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{a-4} & -\dfrac{2}{a-4} \\ -\dfrac{2}{a-4} & \dfrac{1}{a-4} \end{pmatrix}$ con $a \neq 4$, para $a = 4$ el det(B)=0 y, por lo tanto, no existe B^{-1}; **11.3)** no existe C^{-1} pues C no es una matriz cuadrada

11.4) $D^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **11.5)** $E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

11.6) **a)** Si $F = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, para $a \neq 0$ $F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$. Con $a = 0$, no existe F^{-1}

11.6) **b)** Si $G = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$, para $d_1 d_2 d_3 \neq 0$ $G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d_3} \end{pmatrix}$.

Si algún elemento de la diagonal es nulo, $\exists\, i$=1, 2, 3 tal que d_i=0, no existe G^{-1}

Ejercicio 12.

12.a) $k = -8$; **12.b.i)** $h = 0$; **12.b.ii)** $h = -3$

Ejercicio 13.

13.2) $\lambda = -a/c \wedge \mu = -b/c,\ c \neq 0$

Ejercicio 14.

14.1) A es una matriz ortogonal propia pues $A^{-1} = A^T, \det(A) = 1$; B no es ortogonal

14.2) Deben satisfacerse las siguientes condiciones: $\Rightarrow a = 0 \wedge (c = 1 \vee c = -1) \wedge (b = 1 \vee b = -1)$, lo que conduce a las siguientes posibles matrices M: $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

14.3) $A = ((a_{i,j})) \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times n}} \Rightarrow a_{i,j} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ a_{i,i} = 1 \vee a_{i,i} = -1 & i = j \end{cases}$

Ejercicio 16.

16.1) El rango de A es 2 y el rango de B es 3

16.2) Si $\alpha = 0$ el rango de la matriz A es cero y si $\alpha \neq 0$ el rango de la matriz A es 2

16.3) $\alpha = 1$

Ejercicio 19.

17.1) V; **17.2)** F; **17.3)** V; **17.4)** F; **17.5)** F; **17.6)** F; **17.7)** F; **17.8)** V; **17.9)** F

Miscelánea

M1.a) $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$$P^n = \begin{cases} I & n \text{ es par} \\ P & n \text{ es impar} \end{cases}, Q^n = \begin{cases} I & n \text{ es par} \\ Q & n \text{ es impar} \end{cases}.$$

M2.a) $X^2 = B \cdot A^T$; **M2.b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $X^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$

M4 $A \cdot (I - A)^n = A$

Aplicaciones

A1.b) $V_1 = \begin{pmatrix} 0,47 \\ 0,31 \\ 0,22 \end{pmatrix}$; $V_2 = \begin{pmatrix} 0,422 \\ 0,265 \\ 0,313 \end{pmatrix}$; …; $V_{k\to\infty} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

A2. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; **c)** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; **d)** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$; **f)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; **g)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 0 \\ -3 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$

h) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -4 \\ -3 & -4 & -3 \end{pmatrix}$, **i)** $A = \begin{pmatrix} a & d & e & 0 \\ d & b & f & 0 \\ e & f & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g \end{pmatrix}$; **j)** $A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$