

**RESPUESTAS A LA GUÍA DE EJERCITACIÓN 1 VECTORES GEOMÉTRICOS**

**Ejercicio 1.**

**1.1)**

**CI:**  $\vec{OA} = (2,0,0)$ ;  $\vec{CB} = (2,0,0)$ ;  $\vec{GF} = (2,0,0)$ ;  $\vec{FG} = (-2,0,0)$ ;  $\vec{OB} = (2,5,0)$ ;  $\vec{DF} = (2,5,0)$ ;  
 $\vec{CE} = (2,-5,3)$ ;  $\vec{GA} = (2,-5,-3)$

Vectores equipolentes:  $\vec{OA} \sim \vec{DE} \sim \vec{CB} \sim \vec{GF}$ ;  $\vec{AO} \sim \vec{BC} \sim \vec{ED} \sim \vec{FG}$ ;  $\vec{OB} \sim \vec{DF}$ ;  $\vec{BO} \sim \vec{FD}$ ;  
 $\vec{OC} \sim \vec{AB} \sim \vec{DG} \sim \vec{EF}$ ;  $\vec{CO} \sim \vec{BA} \sim \vec{GD} \sim \vec{FE}$ ;  $\vec{OD} \sim \vec{AE} \sim \vec{BF} \sim \vec{CG}$ ;  
 $\vec{DO} \sim \vec{EA} \sim \vec{FB} \sim \vec{GC}$ ;  $\vec{OG} \sim \vec{AF}$ ;  $\vec{GO} \sim \vec{FA}$ ;  $\vec{OE} \sim \vec{CF}$ ;  $\vec{EO} \sim \vec{FC}$

Longitud lados:  $|\vec{AB}| = |\vec{EF}| = |\vec{DG}| = |\vec{OC}| = 5$ ;  $|\vec{DE}| = |\vec{GF}| = |\vec{CB}| = |\vec{OA}| = 2$ ;  $|\vec{OD}| = |\vec{AE}| = |\vec{BF}| = |\vec{CG}| = 3$

Longitud diagonales principales:  $|\vec{OF}| = |\vec{EC}| = |\vec{AG}| = |\vec{BD}| = \sqrt{38}$

**CII:**  $\vec{V_1V_6} = (a;a;a)$ ;  $\vec{V_2V_7} = (-a;a;a)$ ;  $\vec{V_3V_8} = (-a;-a;a)$ ;  $\vec{V_4V_5} = (a;-a;a)$

**1.2)** Sea  $P(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$  el punto descrito.

Si  $P \in$  eje  $x$ :  $y = z = 0$ ,  $P(x, 0, 0)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . Si  $P \in$  eje  $y$ :  $x = z = 0$ ,  $P(0, y, 0)$ ,  $y \in \mathbf{R}$ .

Si  $P \in$  eje  $z$ :  $x = y = 0$ ,  $P(0, 0, z)$ ,  $z \in \mathbf{R}$

Si  $P \in r_1$  ( $r_1$ : recta paralela al eje  $x$  que pasa por  $P_0$ ):  $y=b \wedge z=c$ ,  $P(x, b, c)$ ,  $x \in \mathbf{R}$

Si  $P \in r_2$  ( $r_2$ : recta paralela al eje  $y$  que pasa por  $P_0$ ):  $x=a \wedge z=c$ ,  $P(a, y, c)$ ,  $y \in \mathbf{R}$

Si  $P \in r_3$  ( $r_3$ : recta paralela al eje  $x$  que pasa por  $P_0$ ):  $x_x=a \wedge y=b$ ,  $P(a, b, z)$ ,  $z \in \mathbf{R}$

**1.3)** Sea  $P(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ .

Si  $P \in$  plano  $xy$ :  $z = 0$ ,  $P(x, y, 0)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ,  $y \in \mathbf{R}$ .

Si  $P \in$  plano  $yz$ :  $x = 0$ ,  $P(0, y, z)$ ,  $y \in \mathbf{R}$ ,  $z \in \mathbf{R}$ .

Si  $P \in$  plano  $xz$ :  $y = 0$ ,  $P(x, 0, z)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ,  $z \in \mathbf{R}$ .

Si  $P \in \pi_1$  ( $\pi_1$ : plano paralelo al plano  $xy$  que pasa por  $P_0$ ):  $z=c$ ,  $P(x, y, c)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ,  $y \in \mathbf{R}$

Si  $P \in \pi_2$  ( $\pi_2$ : plano paralelo al plano  $yz$  que pasa por  $P_0$ ):  $x=a$ ,  $P(a, y, z)$ ,  $y \in \mathbf{R}$ ,  $z \in \mathbf{R}$

Si  $P \in \pi_3$  ( $\pi_3$ : plano paralelo al plano  $xz$  que pasa por  $P_0$ ):  $y=b$ ,  $P(x, b, z)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ,  $z \in \mathbf{R}$

**1.4)** Cara 1 ( $ABFE$ ) =  $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / (x, y, z) = (2, \lambda, \mu) \wedge 0 \leq \lambda \leq 5 \wedge 0 \leq \mu \leq 3\}$

Cara 2 ( $BFGC$ ) =  $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / (x, y, z) = (\lambda, 5, \mu) \wedge 0 \leq \lambda \leq 2 \wedge 0 \leq \mu \leq 3\}$

Cara 3 ( $OCGD$ ) =  $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / (x, y, z) = (0, \lambda, \mu) \wedge 0 \leq \lambda \leq 5 \wedge 0 \leq \mu \leq 3\}$

Cara 4 ( $AEDO$ ) =  $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / (x, y, z) = (\lambda, 0, \mu) \wedge 0 \leq \lambda \leq 2 \wedge 0 \leq \mu \leq 3\}$

Cara 5 ( $ABCO$ ) =  $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / (x, y, z) = (\lambda, \mu, 0) \wedge 0 \leq \lambda \leq 2 \wedge 0 \leq \mu \leq 5\}$

Cara 6 ( $EFGD$ ) =  $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / (x, y, z) = (\lambda, \mu, 3) \wedge 0 \leq \lambda \leq 2 \wedge 0 \leq \mu \leq 5\}$

**Ejercicio 2.**

**2.1)**  $\vec{v}_1 = (3,0,0)$ ;  $\vec{v}_2 = (-3,0,0)$       **2.2)**  $\vec{v}_1 = (0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ ;  $\vec{v}_2 = (0, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

**2.3)**  $\vec{v}_1 = (0,0,2)$ ;  $\vec{v}_2 = (0,0,-2)$       **2.4)**  $\vec{v}_1 = (\lambda;0;\lambda)$ ;  $\vec{v}_2 = (\lambda;0;-\lambda)$ ;  $\lambda \in \mathbf{R}$

**2.5)**  $\vec{v}_1 = (1,1,0)$ ;  $\vec{v}_2 = (-1,-1,0)$

**Ejercicio 3.**

**3.1.a)**  $\vec{AB} = (2,8)$ ; **3.1.b)**  $d(A;B) = \sqrt{68}$ ; **3.1.c)**  $M(5,6)$ ; **3.1.d)**  $C\left(\frac{11}{2}, 8\right)$

**3.2)** En  $\mathbf{R}^2$ :  $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ . En  $\mathbf{R}^3$ :  $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

3.3) En  $\mathbf{R}^2$ :  $d(A;B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .

En  $\mathbf{R}^3$ :  $d(A;B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

3.4) En  $\mathbf{R}^2$ :  $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ . En  $\mathbf{R}^3$ :  $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$

**Ejercicio 4.**

4.1)  $d(A_{(1)}; A_{(3)}) = 2$ ;  $d(B_{(1)}; B_{(3)}) = 2$ ;  $d(C_{(1)}; C_{(3)}) = \sqrt{34}$ ;  $d(D_{(1)}; D_{(3)}) = \sqrt{34}$

4.2)  $d(A_{(1)}; A_{(3)}) = 2$ ;  $d(B_{(1)}; B_{(3)}) = \sqrt{22}$ ;  $d(C_{(1)}; C_{(3)}) = \sqrt{22}$ ;  $d(D_{(1)}; D_{(3)}) = 2$

**Ejercicio 5.**

5.1)  $\vec{a} + 2\vec{b} = (5, -1, -1)$ ;  $\vec{a} - \vec{c} = (0, 1, -2)$ ;  $\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c} = (2, -1, -4)$ ;  $5(\vec{b} - 4\vec{c}) = (-10, -5, -20)$ ;  $-3(2\vec{a} - 5\vec{b}) = (24, -21, 6)$

5.2)  $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 3\sqrt{3}$ ;  $|\vec{a}| + 2|\vec{b}| = \sqrt{3} + 2\sqrt{5}$ ;  $|-2\vec{c}| + |2\vec{c}| = 4\sqrt{2}$ ;  $\frac{1}{|\vec{a}}\vec{a} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ;  $\left|\frac{1}{|\vec{a}}\vec{a}\right| = 1$

5.3)  $\vec{x} = \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

**Ejercicio 6.**

6.1.a)  $|\vec{v}_R| = 20\sqrt{61} \text{ km/h} \cong 156,2 \text{ km/h}$ ; orientación SO con un ángulo  $\alpha = 39^\circ 48' 20''$  con respecto a línea NS; 6.1.b)  $|\vec{v}_R| = 50\sqrt{35} \text{ km/h} \cong 295,8 \text{ km/h}$

6.2)  $f_x = 10 \text{ kgr}$

6.3.a) Sugerencia: Partir de  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$  6.3.b) Sugerencia: Partir de  $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$

**Ejercicio 7.**

7.1) a)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2\sqrt{3}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{3}$ ; b)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$

c)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$ ,  $\theta \cong 54^\circ 44' 8''$ ; d)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$ ,  $\theta \cong 79^\circ 35' 21''$

7.2)  $\theta \cong 35^\circ 15'$

7.3) Sugerencia: Demostrar que dos lados son perpendiculares. El ángulo recto está en el vértice Q.

7.4. a)  $\alpha = 10$ ; b)  $\alpha = -1/2$ ; c)  $\alpha = 4 \vee \alpha = -32$

**Ejercicio 8.** Sugerencia: Utilizar  $|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$

**Ejercicio 9.**

9.1)  $(-1, -2, -3)$ ;  $(-9, 2, -7)$ ;  $(-1, -6, -7)$ ;  $(0, -2, -2)$

9.2)  $\vec{d} = \frac{-3\sqrt{14}}{14}(1, 2, 3)$ ; el vector  $-\vec{d}$  también es respuesta

9.3)  $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{14}$  9.4)  $\frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$  9.5)  $\alpha_1 = \frac{-1 + \sqrt{29}}{2}$ ;  $\alpha_2 = \frac{-1 - \sqrt{29}}{2}$

9.6) Área =  $\frac{\sqrt{14}}{2}$  9.7) No existe  $\vec{x}$  9.8)  $\vec{x} = (-2 + \lambda, \lambda, -\lambda) \forall \lambda \in \mathbf{R}$

**Ejercicio 10.**

10.1) a)  $\alpha = -\frac{4}{3}$ ; b)  $\alpha = -3 \vee \alpha = 1/3$  10.2) No son coplanares 10.3) No existe  $m$

10.4) Sugerencia: Utilizar la interpretación geométrica del producto vectorial.

**Ejercicio 11.**

**11.1)**  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2$ ;  $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = 2\vec{v} \times \vec{u}$ ;  $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$

**11.2) a)**  $\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \vec{w}$ ;  $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$ ;  $\vec{u} \cdot (3 + \vec{v})$ ;  $\vec{u}^3$ ;  $\vec{u} \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$ ;  $\vec{u} \times \vec{v} \times \vec{w}$ ;  $\vec{u} \times \vec{u} \times \vec{u}$

**b)**  $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$ ;  $\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{u}) = \vec{0}$ ;  $(\vec{u} \times \vec{u}) \times (\vec{v} \times \vec{v}) = \vec{0}$ ;  $(\vec{u} \times \vec{u}) \cdot (\vec{v} \times \vec{v}) = 0$

**c)**  $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} = \vec{0}$ ;  $\vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{w}) = \vec{0}$ ;  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = 0$ ;  $\vec{u} \cdot (3\vec{v}) = 0$ ;  $(\vec{u} \cdot \vec{v}) + 3 = 3$ ;  $(\vec{u} \cdot \vec{v})^3 = 0$ ;  
 $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$ ;  $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{w}|^2$  ó  $-|\vec{w}|^2$ ;  $\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{u}) = \vec{0}$ ;  $(\vec{u} \times \vec{u}) \times (\vec{v} \times \vec{v}) = \vec{0}$ ;  $(\vec{u} \times \vec{u}) \cdot (\vec{v} \times \vec{v}) = 0$

**11.3) a) V; b) V; c) F; d) V; e) F; f) F**

**Ejercicio 12.**

**12.1) a)**  $5\hat{i} - \hat{j}$ , punto:  $(5, -1)$ ; **b)**  $-\hat{i} + 2\hat{j}$ , punto:  $(-1, 2)$ ; **c)**  $\lambda\hat{i} + \lambda\hat{j}$  con  $0 \leq \lambda \leq 1$ , segmento

**d)**  $\vec{v} = \lambda\hat{i} + \lambda\hat{j}$ ,  $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ , recta que pasa por el origen; **e)**  $\vec{v} = (1 + \lambda)\hat{i} + \lambda\hat{j}$ ,  $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ , recta

**f)**  $\vec{v} = (\mu + \lambda)\hat{i} + \lambda\hat{j}$ ,  $0 \leq \mu \leq 1, \lambda \geq 0$ , franja semi-infinita inclinada

**g)**  $\vec{v} = (\mu + \lambda)\hat{i} + \lambda\hat{j}$ ,  $\forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R}$ , todo el plano

**12.2) a)**  $\vec{v} = \lambda(1, 0) + \mu(0, 1)$  con  $\lambda > 2 \wedge \mu \geq 1$ ; **b)**  $\vec{v} = \lambda(2, -1) + \mu(0, 1)$   $\forall \lambda \in \mathbf{R} \wedge \mu > 0$

**c)**  $\vec{v} = \lambda(2, -1) + \mu(0, 1)$   $\forall \lambda \in \mathbf{R} \wedge \mu \geq 1$ ; **d)**  $\vec{v} = \lambda(1, 0) + \mu(1, 3)$ ;  $0 \leq \lambda \leq 4 \wedge 0 \leq \mu \leq 1$

**e)**  $\vec{v} = \lambda(1, 0) + \mu(1, 3)$  con  $0 \leq \lambda \leq 4 \wedge 1 \leq \mu \leq 2$

**Ejercicio 13.**

**13.1)**  $\vec{x} = (1, -1, 2) + \lambda(3, 2, -2)$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$ ;  $\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda, \forall \lambda \in \mathbf{R} \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}$ ;  $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-2}$

Sin intersección con los ejes coordenados

$r \cap$  plano  $(xy)$ :  $P(4, 1, 0)$ ;  $r \cap$  plano  $(yz)$ :  $P(0, -5/3, 8/3)$ ;  $r \cap$  plano  $(xz)$ :  $P(5/2, 0, 1)$

**13.2)**  $\vec{x} = (1, -1, 2) + \lambda(1, 0, 1)$ ,  $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ ;  $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$ ,  $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ ;  $\begin{cases} x - 1 = z - 2 \\ y = -1 \end{cases}$

Sin intersección con los ejes coordenados

$r \cap$  plano  $(xy)$ :  $P(-1, -1, 0)$ ;  $r \cap$  plano  $(yz)$ :  $P(0, -1, 1)$ ;  $r \cap$  plano  $(xz)$ : no hay

**13.3)**  $\vec{x} = (1, -1, 2) + \lambda(0, 0, 1)$ ,  $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ ;  $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ \forall z \in \mathbf{R} \end{cases}$

Sin intersección con los ejes coordenados

$r \cap$  plano  $(xy)$ :  $P(1, -1, 0)$ ;  $r \cap$  plano  $(yz)$ : no hay;  $r \cap$  plano  $(xz)$ : no hay

**13.4)**  $\vec{x} = (1, -1, 2) + \lambda(1, 0, 0)$ ,  $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ ;  $\begin{cases} y = -1 \\ z = 2 \\ \forall x \in \mathbf{R} \end{cases}$

Sin intersección con los ejes coordenados

$r \cap$  plano  $(xy)$ : no hay;  $r \cap$  plano  $(yz)$ :  $P(0, -1, 2)$ ;  $r \cap$  plano  $(xz)$ : no hay

**13.5)**  $\vec{x} = (1, -1, 2) + \lambda(-2, 3, -4)$ ,  $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ ;  $\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda, \forall \lambda \in \mathbf{R} \\ z = 2 - 4\lambda \end{cases}$ ;  $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-4}$

Sin intersección con el eje  $x$ ; sin intersección con el eje  $z$ ;  $r \cap$  eje  $y$ :  $P(0, 1/2, 0)$ ;

$r \cap \text{plano } (xy): P(0, 1/2, 0); r \cap \text{plano } (xz): P(1/3, 0, 2/3); r \cap \text{plano } (yz): P(0, 1/2, 0)$

$$13.6) \quad \bar{x} = (1, -1, 2) + \lambda(2, 1, -1), \forall \lambda \in \mathbf{R}; \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda, \forall \lambda \in \mathbf{R} \\ z = 2 - \lambda \end{cases}; \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z-2}{-1}$$

$$13.7) \quad \bar{x} = (1, -1, 2) + \lambda(2, 0, -1), \forall \lambda \in \mathbf{R}; \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1, \forall \lambda \in \mathbf{R} \\ z = 2 - \lambda \end{cases}; \begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{z-2}{-1} \\ y = -1 \end{cases}$$

$$13.8) \quad \bar{x} = (1, -1, 2) + \lambda(-1, 0, 0), \forall \lambda \in \mathbf{R}; \begin{cases} y = -1 \\ z = 2 \\ \forall x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

$$(r_1; r_2) = \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{30}}\right); (r_1; r_3) = \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{6}}\right); (r_2; r_3) = \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$$

#### Ejercicio 14.

$$14.1) \quad 4x + 2y - 3z - 4 = 0; \bar{x} = (3, -1, 2) + \lambda(1, -2, 0) + \mu(0, 3, 2), \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R}$$

$$\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda + 3\mu, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R} \\ z = 2 + 2\mu \end{cases}$$

$$14.2) \quad y + 1 = 0; \bar{x} = (3, -1, 2) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 0, 1), \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R}; \begin{cases} y = -1 \\ \forall x \in \mathbf{R}, \forall z \in \mathbf{R} \end{cases}$$

$\pi \cap$  con eje  $x$ : no hay;  $\pi \cap$  con eje  $y$ :  $P(0, -1, 0)$ ;  $\pi \cap$  con eje  $z$ : no hay

$\pi \cap$  con plano  $(xy)$ :  $P(\lambda, -1, 0) \forall \lambda \in \mathbf{R}$ ;  $(x, y, z) = (0, -1, 0) + \lambda(1, 0, 0), \forall \lambda \in \mathbf{R}$

$\pi \cap$  con plano  $(yz)$ :  $P(0, -1, \lambda) \forall \lambda \in \mathbf{R}$ ;  $(x, y, z) = (0, -1, 0) + \lambda(0, 0, 1), \forall \lambda \in \mathbf{R}$

$$14.3) \quad x + 1 = 0; \bar{x} = (-1, 1, 2) + \lambda(0, 1, 0) + \mu(0, 0, 1), \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R}; \begin{cases} x = -1 \\ \forall y \in \mathbf{R}, \forall z \in \mathbf{R} \end{cases}$$

$$14.4) \quad \bar{x} = (1, -1, 0) + \lambda(2, 1, 3) + \mu\overrightarrow{P_3P_r}, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R}, \text{ siendo } P_r(1, 0, 2) \text{ (una respuesta posible)}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda + \mu, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R}; x + 4y - 2z + 3 = 0 \\ z = 3\lambda + 2\mu \end{cases}$$

$$14.5) \quad 5x + 2y - 4z - 3 = 0; \bar{x} = (1, -1, 0) + \lambda(2, 1, 3) + \mu(2, -3, 1), \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 2\mu \\ y = -1 + \lambda - 3\mu, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R} \\ z = 3\lambda + \mu \end{cases}$$

$$14.6) \quad 2x - 3y + 4z - 37 = 0; \bar{x} = (3, -1, 7) + \lambda(1, 0, -1/2) + \mu(0, -1, -3/4), \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R}$$

$$\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 - \mu, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R} \\ z = 7 - (1/2)\lambda - (3/4)\mu \end{cases}$$

$$14.7) \quad x + y + z - 1 = 0; \bar{x} = (1, 0, 0) + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R} \text{ (una respuesta posible)}$$

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \lambda, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R} \\ z = \mu \end{cases}$$

**14.8)**  $11x + 6y + z - 19 = 0$ ;  $\vec{x} = (0, 3, 1) + \lambda(-1, 1, 5) + \mu(1, -2, 1), \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R}$

$$\begin{cases} x = -\lambda + \mu \\ y = 3 + \lambda - 2\mu, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R} \\ z = 1 + 5\lambda + \mu \end{cases}$$

Ángulo entre  $(y+1=0; x+1=0) = \pi/2$

**Ejercicio 15.**

**15.1) a)**  $S = \{3\}$  (un punto);

**b)**  $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / x = 3\} = \{(3, y) / \forall y \in \mathbf{R}\}$ . Ecuación general (E.G.)  $x - 3 = 0$  (una recta)

Ec. vect-param. (E.V.P.):  $\vec{x} = (3, 0) + \lambda(0, 1), \forall \lambda \in \mathbf{R}$ ; Ecs. cart-param. (E.C.P.):  $\begin{cases} x = 3 \\ y = \lambda \end{cases}, \forall \lambda \in \mathbf{R}$

**c)**  $x - 3 = 0$ ;  $(x, y, z) = (3, 0, 0) + \lambda(0, 1, 0) + \mu(0, 0, 1), \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R}$ ;  $\begin{cases} x = 3 \\ y = \lambda, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R} \\ z = \mu \end{cases}$

**15.2) a)** E.G.:  $x - 2y - 4 = 0$ ; ec. explícita:  $y = -2 + (1/2)x$ ; ec. segmentaria:  $\frac{x}{4} + \frac{y}{-2} = 1$  (una recta)

E.V.P.:  $\vec{x} = (4, 0) + \lambda(2, 1), \forall \lambda \in \mathbf{R}$ ; E.C.P.:  $\begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = \lambda \end{cases}, \forall \lambda \in \mathbf{R}$ ; ec. simétrica:  $\frac{x-4}{2} = \frac{y-0}{1}$

**b)** E.G.:  $x - 2y - 4 = 0$ ; E.V.P.:  $\vec{x} = (4, 0, 0) + \lambda(0, 0, 1) + \mu(4, 2, 0), \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R}$  (un plano)

Ec. normal:  $\frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{2}{\sqrt{5}}y = \frac{4}{\sqrt{5}}$ ; E.C.P.:  $\begin{cases} x = 4 + 4\mu \\ y = 2\mu \\ z = \lambda \end{cases}, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R}$

**15.3) a)**  $S = \{(0, -2)\}$  (un punto)

**b)** E.V.P.:  $\vec{x} = (0, -2, 0) + \lambda(0, 0, 1), \forall \lambda \in \mathbf{R}$ ; E.C.P.:  $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2, \forall \lambda \in \mathbf{R} \\ z = \lambda \end{cases}$  (una recta)

**15.4)** E.V.P.:  $\vec{x} = (0, -2, -2) + \lambda(-2, -1, 2), \forall \lambda \in \mathbf{R}$ ; E.C.P.:  $\begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}, \forall \lambda \in \mathbf{R}$  (una recta)

Ecs. simétricas:  $\frac{x}{-2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+2}{2}$ ; ecs. reducidas:  $\begin{cases} x = -z - 2 \\ y = -(1/2)z - 2 \end{cases}$

**15.5)** E.V.P.:  $\vec{x} = (0, 3, 1) + \lambda(1, 0, 0), \forall \lambda \in \mathbf{R}$ ; E.C.P.:  $\begin{cases} x = \lambda, \forall \lambda \in \mathbf{R} \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$  (una recta)

**15.6)** E.G.:  $z - 1 = 0$ ; E.C.P.:  $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \alpha, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \alpha \in \mathbf{R} \\ z = 1 \end{cases}$  (un plano)

**15.7)** E.G.:  $x = 0$ ; E.C.P.:  $\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R} \\ z = \mu \end{cases}$ ; E.V.P.:  $\vec{x} = \lambda(0, 1, 0) + \mu(0, 0, 1), \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R}$   
(un plano)

**15.8)**  $(-2x_1 + 2x_2)x + (-2y_1 + 2y_2)y + (-2z_1 + 2z_2)z + (x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 + z_1^2 - z_2^2) = 0$ , plano  $\pi$  que tiene por normal  $\vec{n}_\pi \parallel \overrightarrow{P_1P_2}$  y pasa por el punto medio entre  $P_1$  y  $P_2$

**15.9)**  $\pi: (x, y, z) = (3, 0, 0) + \lambda(3, -4, 0) + \mu(0, 0, 1), \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R}; \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = -4\lambda, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R}; \\ z = \mu \end{cases}$

$$4x + 3y - 12 = 0$$

$r: (x, y, z) = (3, 0, 0) + \lambda(3, -4, 0), \forall \lambda \in \mathbf{R}; \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = -4\lambda, \forall \lambda \in \mathbf{R}; \\ z = 0 \end{cases}; \begin{cases} \frac{x-3}{3} = \frac{y}{-4} \\ z = 0 \end{cases}$

$r_1: (x, y, z) = (0, 0, 3) + \lambda(0, 1, 0), \forall \lambda \in \mathbf{R}; \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda, \forall \lambda \in \mathbf{R} \\ z = 3 \end{cases}$

$\pi_1: (x, y, z) = (0, 0, 3) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 1, 0), \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R}; \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R}; \\ z = 3 \end{cases}; z - 3 = 0$

$\pi_2: (x, y, z) = (3, 0, 0) + \lambda(0, 1, 0) + \mu(0, 0, 1), \lambda \in \mathbf{R}, \mu \in \mathbf{R}; \begin{cases} x = 3 \\ y = \lambda, \lambda \in \mathbf{R}, \mu \in \mathbf{R}; \\ z = \mu \end{cases}; x - 3 = 0$

$r_2: (x, y, z) = (3, 0, 3) + \lambda(0, 1, 0), \lambda \in \mathbf{R}; \begin{cases} x = 3 \\ y = \lambda, \lambda \in \mathbf{R}; \\ z = 3 \end{cases}; \begin{cases} x = 3 \\ z = 3 \end{cases}$

### Ejercicio 16.

**16.1)**  $d(A; B) = 5$     **16.2)**  $\pi: \frac{8}{9}x + \frac{4}{9}y - \frac{1}{9}z + 2 = 0; d(O; \pi) = 2$     **16.3)**  $k = 2 \vee k = -2;$

**16.4)**  $d(A; r) = \frac{\sqrt{77}}{7}$     **16.6)**  $d(r_1; r_2) = 3; P_1(2, -1, -4) \in r_1, P_2(1, 1, -2) \in r_2$

**16.7)** Si  $m=4$ ,  $r$  y  $\pi$  son paralelos con distancia  $d(r; \pi) = \frac{|n|}{\sqrt{3}}$ . Sólo si  $n=0$ ,  $r \subset \pi$ . Si  $m \neq 4$ , son secantes y su distancia es 0

### Ejercicio 17.

**17.1)**  $A(0, 0, 0), B(0, 1, 0), C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

**17.2)**  $\left\{P(x, 3, 0) \forall x \in \mathbf{R}\right\} \cup \left\{P\left(x, \frac{1}{2}, 0\right) \forall x \in \mathbf{R}\right\}$ . Lugar geométrico: dos rectas paralelas al eje  $x$ .

**17.3)** a)  $(2, \sqrt{2}, \sqrt{2});$  b)  $2\sqrt{2};$  c)  $\pi \equiv y - z = 0, \pi' \equiv y + z = 0$

**17.4)** Rectángulo de área  $8\sqrt{2} \text{ cm}^2$

**17.5)** a)  $A'(1, 0, 6)$     b)  $A'(-5, 2, 4)$

### Ejercicio 18.

**18.1)**  $r: \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 1 = 0$ ;  $d(O;r) = 1$ ; **18.2)**  $d(A;r) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

**18.3)** **a)**  $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 5$ , circunferencia; **b)**  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ , elipse

**c)**  $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ , hipérbola; **d)**  $y^2 = 12x$ , parábola de eje horizontal

**Miscelánea.**

**M1**  $k=18 \vee k=-18$ ; **M3**  $A(5,4)$ ;  $B(1,2)$ ;  $C\left(\frac{51}{11}, \frac{32}{11}\right)$ ;  $D\left(\frac{15}{11}, \frac{34}{11}\right)$

**M5** **a)** Las rectas son alabeadas, no existe un plano que las contenga.

**b)** Si  $a=0$ , las rectas están contenidas por el plano  $xy$  ( $z=0$ ). Si  $a \neq 0$ , no existe plano que contenga a las rectas.