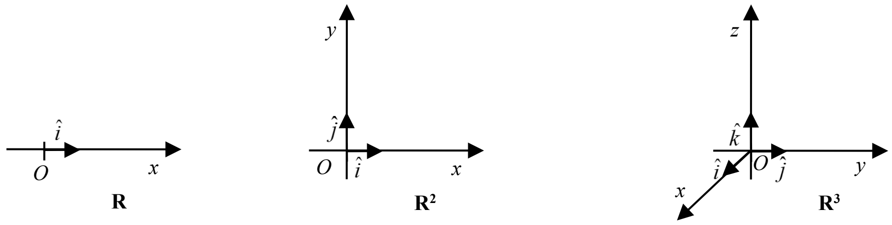
GUÍA DE EJERCITACIÓN 1 VECTORES GEOMÉTRICOS

Vectores geométricos en el sistema de coordenadas cartesianas



	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}^2$	$\mathbf{R}^3$
$\vec{a}$	$a_1\hat{i}$ $a_1 \in \mathbf{R}$	$a_1\hat{i} + a_2\hat{j}$ $a_1 \in \mathbf{R},\ a_2 \in \mathbf{R}$	$a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ $a_1 \in \mathbf{R},\ a_2 \in \mathbf{R},\ a_3 \in \mathbf{R}$
$\lvert\vec{a}\rvert$	$\lvert a_1\rvert$	$+\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$	$+\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
$\hat{a} = \dfrac{1}{\lvert\vec{a}\rvert}\vec{a}\ ,\ \ \vec{a} \neq \vec{0}$	$\dfrac{a_1}{\lvert\vec{a}\rvert}\hat{i} = (signa_1)\hat{i}$	$\dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}\hat{i} + \dfrac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}\hat{j}$	$\dfrac{a_1}{\lvert\vec{a}\rvert}\hat{i} + \dfrac{a_2}{\lvert\vec{a}\rvert}\hat{j} + \dfrac{a_3}{\lvert\vec{a}\rvert}\hat{k}$
cosenos directores de $\vec{a}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$	$\cos\alpha = \dfrac{a_1}{\lvert\vec{a}\rvert}$	$\cos\alpha = \dfrac{a_1}{\lvert\vec{a}\rvert}$ $\cos\beta = \dfrac{a_2}{\lvert\vec{a}\rvert}$	$\cos\alpha = \dfrac{a_1}{\lvert\vec{a}\rvert}$ $\cos\beta = \dfrac{a_2}{\lvert\vec{a}\rvert}$ $\cos\gamma = \dfrac{a_3}{\lvert\vec{a}\rvert}$
relación pitagórica	$\cos^2\alpha = 1$	$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$	$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$
$\vec{a} = \vec{b}$	$a_1 = b_1$	$a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2$	$a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge a_3 = b_3$
$\vec{a} + \vec{b}$	$(a_1 + b_1)\hat{i}$	$(a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j}$	$(a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}$
$\lambda\vec{a}$ con $\lambda \in \mathbf{R}$	$\lambda a_1\hat{i}$	$\lambda a_1\hat{i} + \lambda a_2\hat{j}$	$\lambda a_1\hat{i} + \lambda a_2\hat{j} + \lambda a_3\hat{k}$
$\vec{a}\cdot\vec{b}$	a_1b_1	$a_1b_1 + a_2b_2$	$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Propiedades de la suma de dos vectores

P.1 Ley de composición interna: $\forall\vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall\vec{b} \in \mathbf{R}^3,\ \vec{a} + \vec{b} \in \mathbf{R}^3$

P.2 Propiedad conmutativa: $\forall\vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall\vec{b} \in \mathbf{R}^3,\ \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

P.3 Propiedad asociativa: $\forall\vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall\vec{b} \in \mathbf{R}^3, \forall\vec{c} \in \mathbf{R}^3,\ \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

P.4 Elemento neutro: $\forall\vec{a} \in \mathbf{R}^3, \exists\,\vec{0} \in \mathbf{R}^3 /\ \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

P.5 Elemento opuesto: $\forall\vec{a} \in \mathbf{R}^3, \exists\left(-\vec{a}\right) \in \mathbf{R}^3 /\ \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Obs.: Estas propiedades de la suma también se verifican en $\mathbf{R}^2$ y en $\mathbf{R}$ (toda vez que aparezca $\mathbf{R}^3$ cambiarlo por $\mathbf{R}^2$ ó $\mathbf{R}$ según corresponda).

Propiedades para el producto de un escalar por un vector

P.1 Ley de composición externa: $\forall\vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall\lambda \in \mathbf{R},\ \lambda\vec{a} \in \mathbf{R}^3$

P.2 Notación: $\forall\vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall\lambda \in \mathbf{R},\ \lambda\vec{a} = \vec{a}\lambda$

P.3 Propiedad asociativa mixta: $\forall\vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall\lambda \in \mathbf{R}, \forall\mu \in \mathbf{R},\ \lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\cdot\mu)\vec{a}$

P.4 Observación: $\lambda\cdot\vec{0} = \vec{0}\ \forall\lambda \in \mathbf{R};\ 0\cdot\vec{a} = \vec{0}\ \forall\vec{a} \in \mathbf{R}^3$

P.5 $\forall \vec{a} \in \mathbf{R^3}, \forall \lambda \in \mathbf{R} - \{\vec{0}\}$, $\lambda\vec{a} \| \vec{a}$; $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \, |\vec{a}|$; si $\lambda > 0$, $\lambda\vec{a}$ tiene el mismo sentido que $\vec{a}$
si $\lambda < 0$, $\lambda\vec{a}$ tiene el sentido opuesto a $\vec{a}$

P.6 Propiedades distributivas: $\forall \vec{a} \in \mathbf{R^3}, \forall \vec{b} \in \mathbf{R^3}, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R}$

P.6.1 $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ **P.6.2** $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

Obs.: estas propiedades del producto de un escalar por un vector también se verifican en $\mathbf{R^2}$ y en $\mathbf{R}$ (toda vez que aparezca $\mathbf{R^3}$ cambiarlo por $\mathbf{R^2}$ ó $\mathbf{R}$ según corresponda).

Propiedades para el producto escalar de dos vectores

P.1 $\forall \vec{a} \in \mathbf{R^3}, \forall \vec{b} \in \mathbf{R^3}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} \in \mathbf{R}$

P.2 $\forall \vec{a} \in \mathbf{R^3}$, $\vec{a} \cdot \vec{a} \in \mathbf{R}_{\geq 0} \wedge \vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$. En particular, $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

P.3 Propiedad conmutativa: $\forall \vec{a} \in \mathbf{R^3}, \forall \vec{b} \in \mathbf{R^3}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

P.4 Prop. distributiva con respecto a la suma: $\forall \vec{a} \in \mathbf{R^3}, \forall \vec{b} \in \mathbf{R^3}, \forall \vec{c} \in \mathbf{R^3}$, $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

P.5 Propiedad asociativa: $\forall \vec{a} \in \mathbf{R^3}, \forall \vec{b} \in \mathbf{R^3}, \forall \lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b})$

P.6 $\forall \vec{a} \in \mathbf{R^3}$, $\vec{a} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{a} = 0$

P.7 $\forall \vec{a} \in \mathbf{R^3}, \forall \vec{b} \in \mathbf{R^3}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \, |\vec{b}| \cos \overset{\angle}{(\vec{a}, \vec{b})}$

P.8 $\forall \vec{a} \in \mathbf{R^3} - \{\vec{0}\}, \forall \vec{b} \in \mathbf{R^3} - \{\vec{0}\}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$. Condición de perpendicularidad

P.9 $\forall \vec{a} \in \mathbf{R^3} - \{\vec{0}\}, \forall \vec{b} \in \mathbf{R^3} - \{\vec{0}\}$, $\operatorname{Proy}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \overset{\angle}{(\vec{a}, \vec{b})} \, \hat{b} \Rightarrow \operatorname{Proy}_{\vec{b}} \vec{a} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \hat{b} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} \vec{b}$

Obs.: Estas propiedades del producto de un escalar por un vector también se verifican en $\mathbf{R^2}$ y en $\mathbf{R}$ (toda vez que aparezca $\mathbf{R^3}$ cambiarlo por $\mathbf{R^2}$ ó $\mathbf{R}$ según corresponda).

Producto vectorial de dos vectores de $\mathbf{R^3}$

Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R^3}$ tales que $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ y $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$, entonces $(\vec{a} \times \vec{b}) \in \mathbf{R^3}$ con

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\hat{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\hat{k}$$

Simbólicamente se puede escribir $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

Características: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \operatorname{sen} \overset{\angle}{(\vec{a}, \vec{b})}$;
dirección perpendicular al plano determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$;
sentido tal que la terna $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ sea del mismo tipo que la definida por el sistema de coordenadas elegido.

Propiedades del producto vectorial

P1. $\forall \vec{a} \in \mathbf{R^3}, \forall \vec{b} \in \mathbf{R^3}, (\vec{a} \times \vec{b}) = -(\vec{b} \times \vec{a})$ Propiedad anticonmutativa.

P2. $\forall \vec{a} \in \mathbf{R^3}, \forall \vec{b} \in \mathbf{R^3}, \forall \vec{c} \in \mathbf{R^3}, \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ Prop distributiva con respecto a la suma.

P3. $\forall \vec{a} \in \mathbf{R^3}, \forall \vec{b} \in \mathbf{R^3}, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$ Propiedad asociativa mixta.

P4. $\forall \vec{a} \in \mathbf{R^3}, (\vec{0} \times \vec{a}) = (\vec{a} \times \vec{0}) = \vec{0}$

P5. $\forall \vec{a} \in \mathbf{R^3}, \forall \vec{b} \in \mathbf{R^3} / \vec{a} \neq \vec{0} \wedge \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \| \vec{b}$. Condición de paralelismo

P6. $\forall \vec{a} \in \mathbf{R^3}, \forall \vec{b} \in \mathbf{R^3}$, $|\vec{a} \times \vec{b}|$ es igual al área del paralelogramo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$

Producto mixto de tres vectores de $\mathbf{R}^3$

Sean $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbf{R}^3$ con $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$, $\vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ y $\vec{c}=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\times c=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)\ \in\mathbf{R}$$

Propiedades del producto mixto

P1. $\forall\vec{a}\in\mathbf{R^3},\forall\vec{b}\in\mathbf{R^3}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ Prop. conmutativa de las operaciones.

P2. $\forall\vec{a}\in\mathbf{R^3},\forall\vec{b}\in\mathbf{R^3},\forall\vec{c}\in\mathbf{R^3}$, $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})$ Prop. conmt. por orden cíclico

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a})$$

P3. $\forall\vec{a}\in\mathbf{R^3},\forall\vec{b}\in\mathbf{R^3}$, $(\vec{a},\vec{b},\vec{0})=0$

P4. $\forall\vec{a}\in\mathbf{R^3},\forall\vec{b}\in\mathbf{R^3},\forall\vec{c}\in\mathbf{R^3}$, $|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$ volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

P5. $\forall\vec{a}\in\mathbf{R^3},\forall\vec{b}\in\mathbf{R^3},\forall\vec{c}\in\mathbf{R^3}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}=0\Leftrightarrow\vec{a},\vec{b}$ y $\vec{c}$ son coplanares. Condición de coplanaridad.

Doble producto vectorial de tres vectores de $\mathbf{R}^3$

Sean $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbf{R^3}$ con $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$, $\vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ y $\vec{c}=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$,

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}\quad\in\mathbf{R^3}$ (pertenece al plano determinado por $\vec{b}$ y $\vec{c}$)

$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}\quad\in\mathbf{R^3}$ (pertenece al plano determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$)

<u>Ecuación de la recta en $\mathbf{R}^2$</u>

Ecuación general $Ax+By+C=0$

$\vec{n}=(A,B)$ son las componentes de un vector perpendicular a la recta

Ecuación explícita $y=mx+b$

m: pendiente (tangente del ángulo que forma la recta con el semieje positivo de las *x*); *b*: ordenada al origen

Ecuación normal $x\cdot\cos\alpha+y\cdot sen\alpha=p$

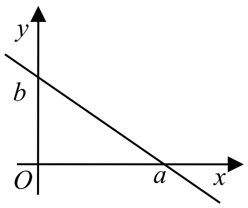
p: distancia orientada desde el origen hasta la recta

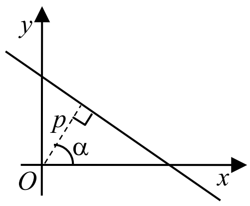
α: ángulo entre la perpendicular a la recta y el semieje positivo de las *x*

Ecuación segmentaria $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$; $a\neq 0\wedge b\neq 0$

a: intersección de la recta con el eje *x*

b: intersección de la recta con el eje *y*





Sean $P_1(x_1,y_1)$ las coordenadas de un punto que pertenece a la recta y $\vec{u}=(u_x,u_y)\neq\vec{0}$ las componentes de un vector paralelo a la recta.

Ecuación vectorial-paramétrica $\vec{x}=(x_1,y_1)+\lambda(u_x,u_y)\quad\forall\lambda\in\mathbf{R}$

Ecuaciones paramétrico-cartesianas $\begin{cases}x=x_1+\lambda u_x\\ y=y_1+\lambda u_y\end{cases}\quad\forall\lambda\in\mathbf{R}$

Ecuación simétrica $\dfrac{x-x_1}{u_x}=\dfrac{y-y_1}{u_y}$ si $u_x\neq 0\wedge u_y\neq 0$

Ecuación de la recta en $\mathbf{R}^3$

Sean $P_1(x_1,y_1,z_1)$ las coordenadas de un punto que pertenece a la recta y $\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)\neq\vec{0}$ las componentes de un vector paralelo a la recta.

Ecuación vectorial-paramétrica $\quad \vec{x}=(x_1,y_1,z_1)+\lambda(u_x,u_y,u_z) \quad \forall\lambda\in\mathbf{R}$

Ecuaciones cartesiano-paramétricas $\quad \begin{cases} x=x_1+\lambda u_x \\ y=y_1+\lambda u_y \\ z=z_1+\lambda u_z \end{cases}$

Ecuaciones simétricas $\quad \dfrac{x-x_1}{u_x}=\dfrac{y-y_1}{u_y}=\dfrac{z-z_1}{u_z}$ si $u_x\neq 0 \wedge u_y\neq 0 \wedge u_z\neq 0$

Ecuación del plano en $\mathbf{R}^3$

Ecuación general $\quad Ax+By+Cz+D=0$

$\vec{n}=(A,B,C)$ son las componentes de un vector normal al plano

Ecuación normal $\quad x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p$

p: distancia orientada desde el origen de coordenadas al plano.

α,β,γ: ángulos directores del vector normal al plano.

Sean $P_1(x_1,y_1,z_1)$ las coordenadas de un punto que pertenece al plano, $\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$ y $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$ las componentes dos vectores paralelos al plano (con $\vec{u}\times\vec{v}\neq\vec{0}$).

Ecuación vectorial paramétrica $\quad \vec{x}=(x_1,y_1,z_1)+\lambda(u_x,u_y,u_z)+\mu(v_x,v_y,v_z) \quad \forall\lambda\in\mathbf{R},\forall\mu\in\mathbf{R}$

Ecuaciones cartesianas-paramétricas $\begin{cases} x=x_1+\lambda u_x+\mu v_x \\ y=y_1+\lambda u_y+\mu v_y \\ z=z_1+\lambda u_z+\mu v_z \end{cases} \quad \forall\lambda\in\mathbf{R},\forall\mu\in\mathbf{R}$

Distancias en $\mathbf{R}^2$

Entre los puntos $P_0(x_0,y_0)$ y $P_1(x_1,y_1)$: $\quad d(P_0,P_1)=\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right|=+\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$

Entre el punto $P_0(x_0,y_0)$ y la recta $r\colon Ax+By+C=0$**:** $\quad d(P_0,r)=\left|\dfrac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$

Distancias en $\mathbf{R}^3$

Entre los puntos $P_0(x_0,y_0,z_0)$ y $P_1(x_1,y_1,z_1)$: $\quad d(P_0,P_1)=+\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$

Entre el punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ y la recta $d(P_0,r)=\dfrac{\left|\vec{u}\times\overrightarrow{P_1P_0}\right|}{|\vec{u}|}$

Entre el punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ y el plano $\pi\colon Ax+By+Cz+D=0$**:** $\quad d(P_0,\pi)=\left|\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$

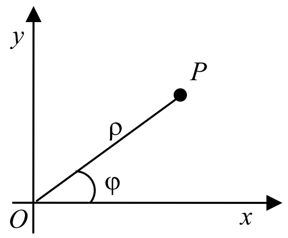
Si $\vec{n}\perp\pi\wedge P_1\in\pi\Rightarrow d(P_0,\pi)=d(P_1,P_0')=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_1P_0}\right|}{|\vec{n}|}$ siendo P_0' la proyección de P_1 sobre π.

Entre dos rectas alabeadas r_1 y r_2 con $\vec{u}\parallel r_1\wedge P_1\in r_1 \wedge\vec{v}\parallel r_2\wedge P_2\in r_2$**:** $\quad d(r_1,r_2)=\dfrac{\left|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\overrightarrow{P_2P_1}\right|}{|(\vec{u}\times\vec{v})|}$

Sistemas de coordenadas más usuales

Coordenadas del punto en R^2

Punto	Coordenadas cartesianas	Coordenadas polares
P	$(x\ ,y)\ \ x \in \mathbf{R}\ ,\ y \in \mathbf{R}$	$(\rho\ ,\varphi)\quad \rho \in \mathbf{R}_{\geq 0}\ ,\ \varphi \in [0, 2\pi)$

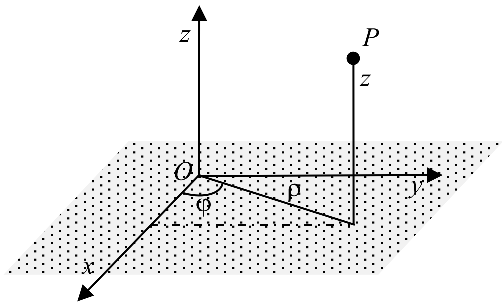


Coordenadas polares $(\rho\ ,\varphi)$

Ecuaciones de conversión cartesiana - polares: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\, sen\varphi \end{cases}$ $\begin{cases} \rho = +\sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = arc\, tg\,(y / x) \end{cases}$

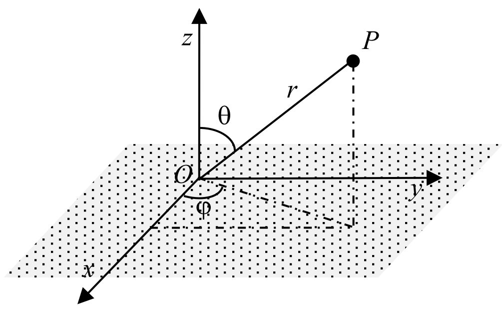
Coordenadas del punto en R^3

Punto	Coordenadas cartesianas	Coordenadas cilíndricas	Coordenadas esféricas
P	(x, y, z) $x \in \mathbf{R}\ ,\ y \in \mathbf{R},\ z \in \mathbf{R}$	(ρ, φ, z) $\rho \in \mathbf{R}_{\geq 0}\ ,\ \varphi \in [0, 2\pi), z \in \mathbf{R}$	(r, φ, θ) $r \in \mathbf{R}_{\geq 0}\ , \varphi \in [0, 2\pi), \theta \in [0, \pi]$



Coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z)

Ecuaciones de conversión cartesiana - cilíndrica $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\, sen\varphi \\ z = z \end{cases}$ $\begin{cases} \rho = +\sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = arc\, tg\,(y / x) \\ z = z \end{cases}$



Coordenadas esféricas (r, φ, θ)

Ecuaciones de conversión cartesiana - esférica $\begin{cases} x = r\, sen\theta\cos\varphi \\ y = r\, sen\theta\, sen\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ $\begin{cases} r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = arc\, tg\,(y / x) \\ \theta = arc\cos(z / r) \end{cases}$

Ejercicio 1.

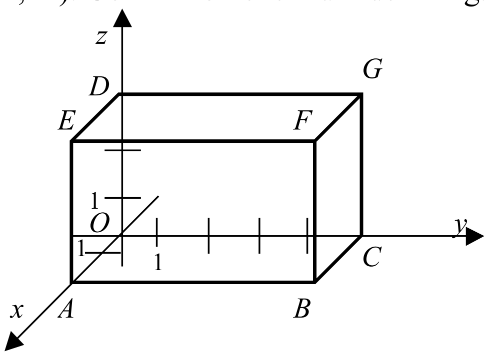
Empleo de un sistema ortonormal de referencia en el espacio tridimensional, visualización geométrica. Distinción entre coordenadas de puntos y de vectores libres. Generalizaciones.

1.1) Indicar las coordenadas de los vértices de los siguientes paralelepípedos y contestar las preguntas formuladas para cada cuerpo. En todos los casos utilizar un sistema de referencia cartesiano ortonormal $Oxyz$ con los ejes paralelos a las aristas de los cuerpos como se infiere de las figuras.

CI: Paralelepípedo de vértices en $O(0,0,0)$ y $F(2,5,3)$, ver Fig. Ej1(a). Dar las componentes de los vectores $\vec{OA}, \vec{CB}, \vec{GF}, \vec{FG}, \vec{OB}, \vec{DF}, \vec{CE}, \vec{GA}$. Identificar los vectores equipolentes. Hallar las longitudes de los lados y de las diagonales principales.

CII: Cubo de ancho a ubicado con el vértice V_1 coincidente con el origen de coordenadas $O(0,0,0)$, ver Fig. Ej1(b). Dar las componentes vectoriales de las diagonales principales.

CIII: Paralelepípedo tal que tiene dos vértices que forman una diagonal en $V_8(-1,-2,3)$ y $V_3(1,1,-1)$. Usar la nomenclatura de la Fig. Ej1(b). Graficar a escala.



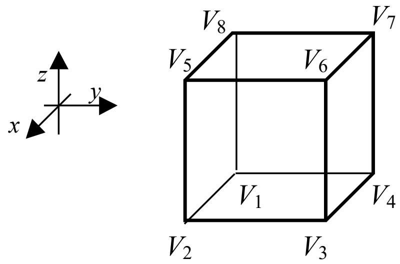


Figura Ej1. Paralelepípedos del ejercicio 1

1.2) ¿Cuál es la característica de las coordenadas de los puntos tales que pertenecen a cada uno de los ejes coordenados? ¿Y si pertenecen a rectas paralelas a los ejes coordenados que pasan por el punto $P_0(a,b,c)$ donde a, b y c son tres números reales arbitrarios?

1.3) ¿Cuál es la característica de las coordenadas de los puntos tales que pertenecen a cada uno de los planos coordenados? ¿Y si pertenecen a planos paralelos a los planos coordenados que pasan por el punto $P_0(a,b,c)$ donde a, b y c son tres números reales arbitrarios?

1.4) Describir en forma analítica el conjunto de puntos que forman cada una de las seis caras de CI, utilizando parámetros reales adecuados.

Ejercicio 2.

Manejo de expresiones algebraicas para particularizar vectores dados por sus características. Ubicación geométrica e identificación analítica de la existencia de más de una solución.

Hallar en $\mathbf{R}^3$ y graficar todos los vectores que verifiquen las condiciones pedidas en cada caso:

2.1) Paralelos al eje x de módulo 3.

2.2) De módulo 2 paralelos al plano yz, tal que su 2do y 3er coseno director sean iguales.

2.3) De módulo 2 perpendiculares al plano xy.

2.4) Paralelos al plano xz tales que el valor absoluto de sus proyecciones al eje x y al eje z sea el mismo.

2.5) De módulo $\sqrt{2}$ perpendiculares al eje z tales que sus componentes no nulas sean iguales.

Ejercicio 3.

Vinculación entre coordenadas de puntos y planteos vectoriales de un problema elemental. Noción de distancia entre puntos. Generalizaciones.

Resolver vectorialmente.

3.1) Dados los puntos $A(4,2)$ y $B(6,10)$, hallar:

3.1.a) Las componentes del vector que tiene por origen a A y extremo a B.

3.1.b) La distancia entre los puntos A y B.

3.1.c) Las coordenadas del punto medio del segmento de recta comprendido entre A y B.

3.1.d) Las coordenadas del punto perteneciente al segmento de recta comprendido entre A y B que está a 3/4 de la distancia entre A y B más cercano al punto B.

3.2) Encontrar las componentes del vector que tiene por origen a $A(x_1, y_1)$ y extremo a $B(x_2, y_2)$. ¿Cuál es la expresión correspondiente a los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$?

3.3) Encontrar la expresión de la distancia entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$. ¿Cuál es la expresión correspondiente a la distancia entre puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$?

3.4) Encontrar las coordenadas del punto medio del segmento de recta comprendido entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, M en la Fig. Ej3.4(a). ¿Cuál es la expresión correspondiente del punto medio entre los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$, M en la Fig. Ej3.4(b)?

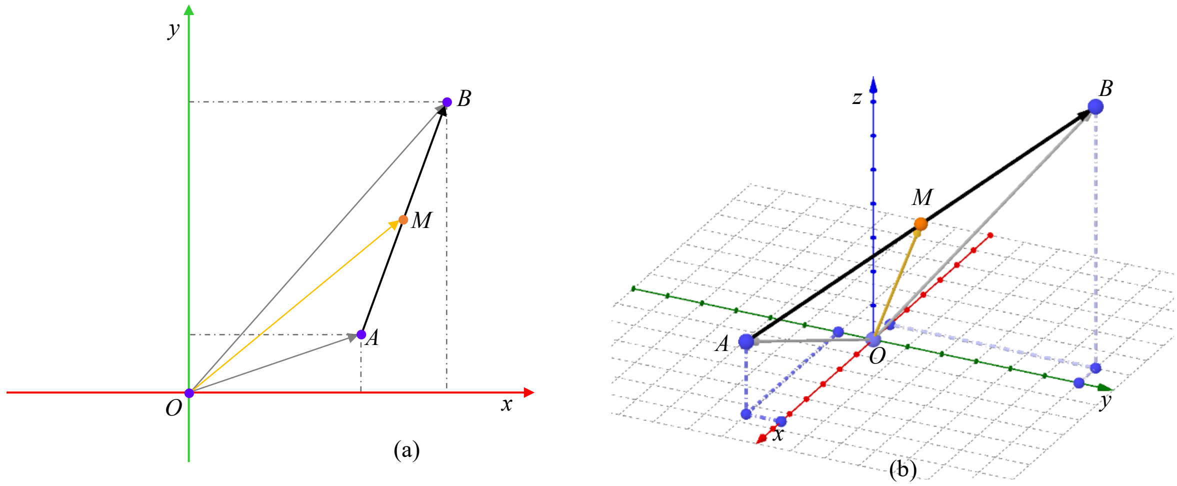


Figura Ej3.4. Punto medio entre dos puntos dados

Ejercicio 4.

Modelo simplificado. Visualización en el espacio tridimensional. Concatenar acciones simples.

Una chapa cuadrada de 3 cm de lado y de espesor muy fino se puede modelar en forma simplificada por un cuadrado $ABCD$. La chapa está inicialmente en reposo sobre un plano horizontal. Para facilitar la visualización de los movimientos que la chapa realiza, se considera un sistema ortonormal de referencia con origen en uno de los vértices, A, con los ejes x, y que contienen, respectivamente, a las aristas AB y AD en la posición inicial. La chapa realiza una rotación y luego una traslación hasta llegar a una posición final. Se consideran dos evoluciones distintas. Para cada una de ellas, calcular la distancia entre la posición inicial de cada vértice y su correspondiente posición final.

4.1) Desde la posición inicial, Fig Ej4.1(a), la chapa comienza a rotar alrededor de la arista AB en sentido antihorario hasta quedar vertical, Fig. Ej4.1(b). Desde allí se eleva verticalmente 2 cm, Fig. Ej4.1(c).

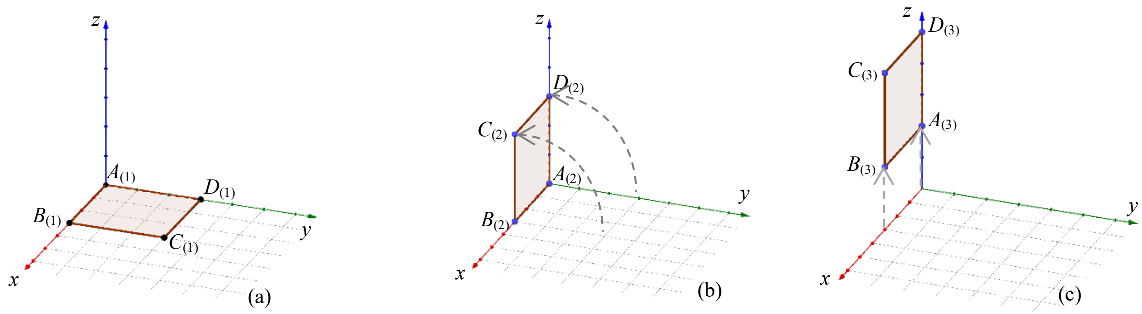


Figura Ej4.1 – Primera evolución

4.2) Desde la posición inicial, Fig Ej4.2(a), la chapa comienza a rotar alrededor de la arista AD en sentido horario hasta quedar vertical, Fig. Ej4.2(b). Desde allí se desplaza $2\,cm$ como se indica en la Fig. Ej4.2(c).

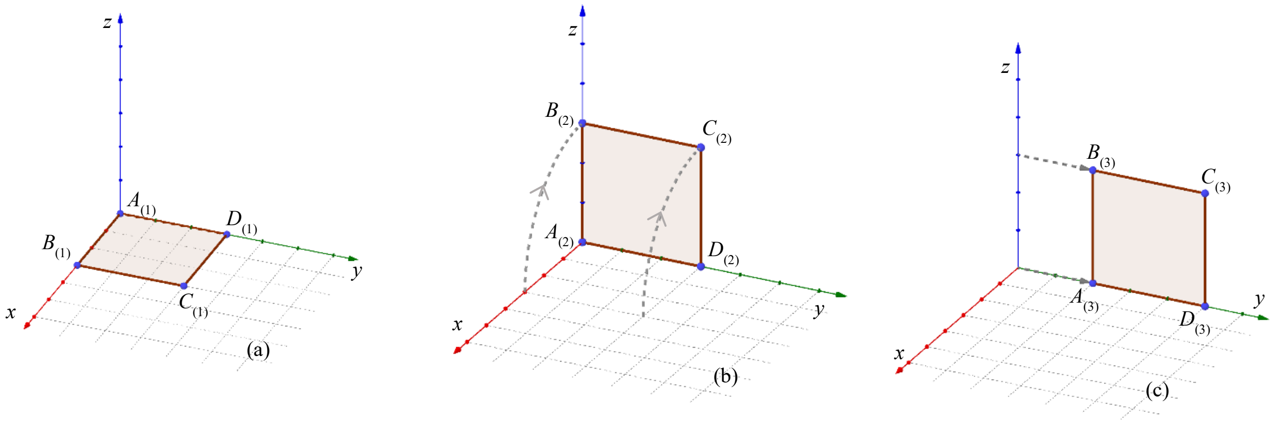


Figura Ej4.2 – Segunda evolución

Ejercicio 5.

Consolidación del concepto de combinación lineal. Manejo de operaciones elementales y de sus propiedades.

Sean $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}, \vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j}, \vec{c} = \hat{i} + \hat{k}$, vectores de $\mathbf{R}^3$.

5.1) Encontrar las componentes de: $\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{a} - \vec{c}$, $\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}$, $5(\vec{b} - 4\vec{c})$, $-3(2\vec{a} - 5\vec{b})$.

5.2) Evaluar la expresión indicada: $\left|\vec{a} + 2\vec{b}\right|, \left|\vec{a}\right| + 2\left|\vec{b}\right|, \left|-2\vec{c}\right| + \left|2\vec{c}\right|, \dfrac{1}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a}, \left|\dfrac{1}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a}\right|$.

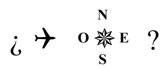
5.3) Hallar $\vec{x}$ tal que verifique la igualdad $2\vec{a} - \vec{b} + \vec{x} = 7\vec{x} + \vec{c}$.

Ejercicio 6.

Interpretación de enunciados. Formulación y resolución de problemas con métodos vectoriales.

6.1) Resolver las siguientes cuestiones aerodinámicas.

6.1.a) Mientras un avión se encuentra volando hacia el sur con una rapidez de $120\,km/h$, el viento sopla desde el este a razón de $100\,km/h$. Calcular la velocidad y orientación resultante del avión.



6.1.b) El viento sopla desde el oeste a razón de $50\,km/h$. La máxima rapidez que el motor de un avión desarrolla es de $300\,km/h$. El piloto quiere dirigirse hacia el norte a toda máquina. ¿Hacia dónde debe apuntar el avión? ¿Cuál es la rapidez con la que se desplaza visto desde la tierra?

6.2) Cierta partícula sólo puede moverse sobre una recta. Sobre ella actúa una fuerza (representada por un vector $\vec{f}$) de magnitud $20\,kgr$ y de dirección y sentido tales que forma un ángulo de $60°$ en sentido antihorario con la mencionada recta. Hallar la componente de la fuerza que aporta, efectivamente, al movimiento.

6.3) Demostrar en forma vectorial los siguientes enunciados geométricos.

6.3.a) Si se unen los puntos medios de dos lados de un triángulo arbitrario ABC, el segmento obtenido es paralelo al otro lado del triángulo y su longitud es igual a la mitad de la longitud de dicho lado.

6.3.b) Si se unen en forma sucesiva los puntos medios de un cuadrilátero $ABCD$ cualquiera, la figura generada es un paralelogramo.

Ejercicio 7.

Cálculo de ángulo entre vectores en casos particulares y aplicaciones vinculadas.

7.1) Dados los siguientes pares de vectores, $\vec{a}$ y $\vec{b}$, expresados por sus coordenadas cartesianas evaluar su producto escalar, $\vec{a}\cdot\vec{b}$, y determinar el ángulo entre ellos:

a) $\vec{a}=(1,2-\sqrt{3})$ y $\vec{b}=(\sqrt{3},3+2\sqrt{3})$; **b)** $\vec{a}=(2,-3)$ y $\vec{b}=(6,4)$; **c)** $\vec{a}=(1,1,1)$ y $\vec{b}=(5,0,0)$;

d) $\vec{a}=(-1,3,2)$ y $\vec{b}=(5,1,3)$.

7.2) Hallar el ángulo que forma una diagonal de un cubo con una diagonal de una sus caras.

7.3) Demostrar que el triángulo con vértices $P(4,1,5)$, $Q(1,0,-3)$ y $R(3,2,-4)$ es un triángulo rectángulo. ¿En qué vértice está el ángulo recto?

7.4) Dados los vectores $\vec{a}=(\alpha,-1,2)$ y $\vec{b}=(1,2,-4)$ hallar, en caso de existir, $\alpha\in\mathbf{R}$ para que $\vec{a}$ y $\vec{b}$:

a) Resulten perpendiculares; **b**) resulten paralelos; **c)** formen un ángulo cuyo coseno es (–6/21).

Ejercicio 8.

Demostraciones analíticas y vinculación con su interpretación geométrica.

Sean $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)\in\mathbf{R}^3$.

8.1) Demostrar la siguiente identidad: $|\vec{u}+\vec{v}|^2+|\vec{u}-\vec{v}|^2=2|\vec{u}|^2+2|\vec{v}|^2$ (Ley del paralelogramo).

8.2) Demostrar la siguiente identidad: $\vec{u}\cdot\vec{v}=(1/4)|\vec{u}+\vec{v}|^2-(1/4)|\vec{u}-\vec{v}|^2$ (Ley de polarización).

8.3) Probar que si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales, entonces $|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2$ (Ley pitagórica). Interpretar geométricamente la proposición.

8.4) Probar que si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales, entonces $|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}-\vec{v}|^2$. Interpretar geométricamente la proposición.

Ejercicio 9.

Manejo de producto vectorial. Reconocimiento de la plausibilidad de la no existencia de solución o de la aparición de una o más soluciones en planteos semejantes.

Dados los vectores $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k},\vec{b}=2\hat{i}-\hat{j},\vec{c}=2\hat{j}+2\hat{k}$, determinar:

9.1) $\vec{a}\times\vec{b}$; $\vec{a}\times(\vec{b}-2\vec{c})$; $\vec{a}\times\vec{b}-2\vec{c}$; $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

9.2) Un vector $\vec{d}$ perpendicular, simultáneamente, a $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de módulo 3. La respuesta, ¿es única?

9.3) Área del paralelogramo que tiene por lados a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

9.4) Área del triángulo que tiene por lados a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

9.5) $\alpha\in\mathbf{R}$ tal que área del triángulo que tiene por lados a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{d}=\hat{j}+\alpha\hat{k}$ sea 2.

9.6) Componentes de los lados y área del paralelogramo que tiene por diagonales a $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

9.7) Todos los vectores $\vec{x}$ que verifican $\vec{a}\times\vec{x}=\vec{b}$. De existir al menos una respuesta, ¿es única?

9.8) Todos los vectores $\vec{x}$ que verifican $\vec{a}\times\vec{x}=\vec{c}$. De existir al menos una respuesta, ¿es única? Comparar con el item anterior. Analizar, si hubiera, la diferencia.

Ejercicio 10.

Aplicación geométrica de la combinación de productos entre vectores. Planteos asociados.

10.1) Sean los vectores $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k},\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k},\vec{c}=\alpha\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$.

10.1.a) Determinar $\alpha\in\mathbf{R}$ para que los vectores resulten coplanares.

10.1.b) Hallar $\alpha\in\mathbf{R}$ de forma que el volumen del paralelepípedo definido por los vectores dados sea igual a 5. La respuesta, ¿es única?

10.2) Determinar si los puntos $P(1,-2,0)$, $Q(0,-1,3)$, $R(-1,1,0)$ y $S(0,2,-2)$ son coplanares.

10.3) ¿Para qué valores de $m \in$ **R** son coplanares los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ donde $\vec{u} = \hat{i} + \hat{j} + m\hat{k}$, $\vec{v} = \hat{i} + \hat{j} + (m+1)\hat{k}$ y $\vec{w} = \hat{i} - \hat{j} + m\hat{k}$?

10.4) Justificar en forma clara la validez de la siguiente sentencia:
Si $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$ están en el mismo plano, entonces $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{0}$.

Ejercicio 11.

Rigor en el lenguaje matemático y su cuestionamiento. Integración de conocimientos. Distinción entre resultados generales y particulares. Búsqueda de contraejemplos.

Sea el siguiente conjunto de vectores $\{\vec{u} = (u_1, u_2, u_3),\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3),\ \vec{w} = (w_1, w_2, w_3)\} \subset \mathbf{R}^3$.

11.1) Simplificar: $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$; $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$; $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$.

11.2) Dadas las siguientes expresiones:

$\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \vec{w}$, $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$, $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$, $\vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{w})$, $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$, $\vec{u} \cdot (3\vec{v})$, $\vec{u} \cdot (3 + \vec{v})$, $(\vec{u} \cdot \vec{v}) + 3$, $\vec{u}^{\,3}$, $(\vec{u} \cdot \vec{v})^3$, $\vec{u} \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$, $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$, $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}$, $\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{u})$, $\vec{u} \times \vec{v} \times \vec{w}$, $\vec{u} \times \vec{u} \times \vec{u}$, $(\vec{u} \times \vec{u}) \times (\vec{v} \times \vec{v})$, $(\vec{u} \times \vec{u}) \cdot (\vec{v} \times \vec{v})$.

11.2.a) ¿Cuáles de ellas no están matemáticamente bien expresadas y por qué?

11.2.b) De aquellas que corresponden a expresiones correctas, ¿se conoce el resultado cualesquiera sean los vectores que intervienen en las operaciones involucradas?

11.2.c) De las expresiones correctas, ¿se conoce el resultado si se sabe en forma adicional que el conjunto dado está constituido por versores mutuamente perpendiculares?

11.3) Justificar si son verdaderas o falsas, cada una de las siguientes afirmaciones. En caso de ser verdadera, demostrarla. Si es falsa, proponer un contraejemplo.

11.3.a) $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall \vec{b} \in \mathbf{R}^3, \forall \vec{c} \in \mathbf{R}^3,\ (\vec{a} - \vec{b}) \times 2\vec{c} = 2[\vec{c} \times (\vec{b} - \vec{a})]$.

11.3.b) $\forall \vec{v} \in \mathbf{R}^3,\ \hat{i} \times (\vec{v} \times \hat{i}) + \hat{j} \times (\vec{v} \times \hat{j}) + \hat{k} \times (\vec{v} \times \hat{k}) = 2\vec{v}$.

11.3.c) $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall \vec{b} \in \mathbf{R}^3,\ \vec{a} \times [\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})] = -|\vec{a}|^2 (\vec{b} \times \vec{a})$.

11.3.d) $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall \vec{b} \in \mathbf{R}^3, (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a} + \vec{b}|^2$.

11.3.e) $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall \vec{b} \in \mathbf{R}^3, (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$.

11.3.f) No existen vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en $\mathbf{R}^3$, tales que la terna de vectores $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ resulte coplanar.

Ejercicio 12.

Trabajo con parámetros. Concepto de lugar geométrico. Identificación de puntos del plano con el extremo de vectores con punto inicial en el origen de coordenadas. Imaginación geométrica.

12.1) Dados los vectores de $\mathbf{R}^2$ $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j}$, $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j}$, $\vec{c} = \hat{i}$, donde λ y μ son dos parámetros reales, hallar $\vec{v}$ gráfica y analíticamente. Si $\vec{v}$ es un único vector, marcar en el gráfico el punto del plano con el se vincula. Si la respuesta constituye un conjunto de infinitos vectores, marcar en el gráfico el lugar geométrico de todos los puntos del plano con los que se identifica dicho conjunto. Recordar que cada vector aplicado en el origen se identifica con un punto del plano (de la recta o del espacio, según corresponda), su extremo.

a) $\vec{v} = \vec{a} + 2\vec{b}$; **b)** $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$; **c)** $\vec{v} = \lambda\vec{a}\quad 0 \le \lambda \le 1$; **d)** $\vec{v} = \lambda\vec{a}\quad \forall\lambda$; **e)** $\vec{v} = \vec{c} + \lambda\vec{a}\quad \forall\lambda$;
f) $\vec{v} = \mu\vec{c} + \lambda\vec{a}\quad 0 \le \mu < 1, \lambda \ge 0$; **g)** $\vec{v} = \mu\vec{c} + \lambda\vec{a}\quad \forall\mu, \forall\lambda$.

12.2) Dadas las regiones de $\mathbf{R}^2$ de la Figura Ej12.2, describirlas en la forma $\vec{v} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, indicando los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ elegidos como así también el rango de variación de los parámetros reales λ y μ para cada caso.

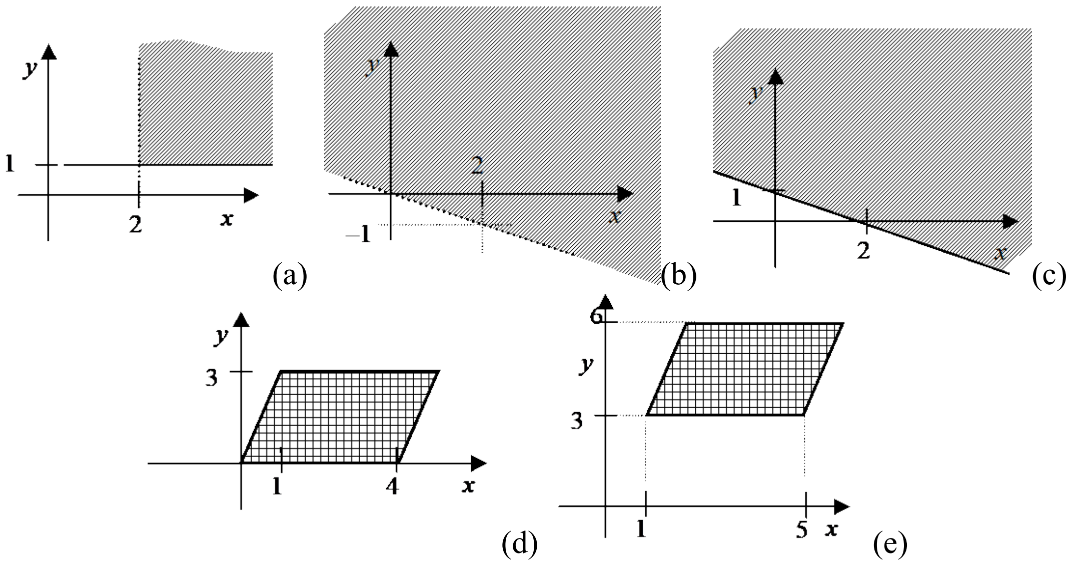


Figura Ej12.2. Regiones del ejercicio

Ejercicio 13.

Destreza en el manejo de distintas expresiones que definen rectas en el espacio. Hallar su expresión dados elementos que la determinan. Cálculo de ángulos.

Hallar la ecuación en las formas vectorial-paramétrica, cartesiano-paramétricas y simétricas de la recta de $\mathbf{R}^3$ tal que pase por el punto $A(1, -1, 2)$ y que además sea, según el caso:

13.1) Paralela al vector $\vec{u}_1 = (3,2,-2)$.

13.2) Paralela al vector $\vec{u}_2 = (1,0,1)$.

13.3) Paralela al eje z.

13.4) Perpendicular al plano yz.

13.5) Pasante por el punto $B(-1, 2, -2)$.

13.6) Paralela a la recta $r_1 \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda - 1 \\ z = 2 - \lambda \end{cases}, \forall \lambda \in \mathbf{R}$.

13.7) Paralela a la recta $r_2 \equiv \begin{cases} \dfrac{x+3}{2} = -z \\ y = 4 \end{cases}$.

13.8) Paralela a la recta $r_3 \equiv \begin{cases} x = -2 - \mu \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}, \forall \mu \in \mathbf{R}$.

En todos los casos anteriores hallar, en caso de existir, la intersección de la recta con los ejes coordenados y con los planos coordenados. Calcular los ángulos que forman, de a pares, las rectas r_1, r_2 y r_3.

Ejercicio 14.

Destreza en el manejo de distintas expresiones que definen planos en el espacio. Hallar su expresión dados elementos que lo determinan. Cálculo de ángulos.

Hallar la ecuación en las fomas vectorial-paramétrica, cartesiano-paramétrica y general del plano tal que cumpla con las condiciones requeridas en cada caso:

14.1) Contenga al punto $P_1(3, -1, 2)$ y sea perpendicular a la recta $r_1 \equiv \dfrac{x+1}{2} = y = \dfrac{4-2z}{3}$.

14.2) Contenga al punto $P_1(3, -1, 2)$ y sea paralelo al plano coordenado xz.

14.3) Contenga al punto $P_2(-1, 1, 2)$ y sea perpendicular al eje x.

14.4) Contenga al punto $P_3(1, -1, 0)$ y a la recta $r_2 \equiv \dfrac{x-1}{2} = y = \dfrac{z-2}{3}$.

14.5) Contenga al punto $P_4(1, -1, 0)$ y sea paralelo, simultáneamente, a las rectas:

$$r_2 \equiv \frac{x-1}{2} = y = \frac{z-2}{3} \quad \wedge \quad r_3 \equiv \vec{x} = (0,0,1) + \lambda(2,-3,1),\ \forall \lambda \in \mathbf{R}.$$

14.6) Paralelo al plano $\pi_1 \equiv 2x - 3y + 4z - 5 = 0$ y que pase por el punto $P_5(3, -1, 7)$.

14.7) Contenga a los puntos $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$.

14.8) Contenga a la recta r_4 y sea paralelo a la recta r_5 con $r_4 \equiv \begin{cases} x=-\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=1+5\lambda \end{cases}, \ \forall\lambda\in\mathbf{R} \ \wedge \ r_5 \equiv \begin{cases} y=-2x \\ z=x+3 \end{cases}$.

En todos los casos anteriores hallar, en caso de existir, la intersección del plano con los ejes coordenados y con los planos coordenados. Calcular el ángulo que forman entre sí, de a pares, los planos obtenidos (el ángulo que forman dos planos está definido como el ángulo que forman sus normales). Calcular el ángulo que forman cada una de las rectas r_1, r_2, r_3, r_4 y r_5 con el plano π_1 (el ángulo se determina a partir del ángulo que forma la recta con la normal al plano).

Ejercicio 15

Identificación de lugares geométricos vinculados a rectas y planos. Concientización de la importancia de conocer el contexto en el cual una expresión tiene validez. Desarrollo de la interpretación gráfica.

Identificar el lugar geométrico de los puntos que verifican las siguientes ecuaciones y/o condiciones y graficar. En caso de corresponder a rectas y/o planos hallar todas las formas de expresar su ecuación.

15.1) $x=3$ en **a) R** **b) R²** **c) R³**.

15.2) $x-2y=4$ en **a) R²** **b) R³**.

15.3) $\begin{cases} x-2y=4 \\ x+y=-2 \end{cases}$ en **a) R²** **b) R³**.

15.4) $\begin{cases} x-2y=4 \\ x+z=-2 \end{cases}$ en **R³**.

15.5) $(x,y,z)=(0,3,1)+\lambda(1,0,0) \ \ \forall\lambda\in\mathbf{R}$.

15.6) $(x,y,z)=(0,3,1)+\lambda(1,0,0)+\mu(0,1,0) \ \ \forall\lambda,\forall\mu\in\mathbf{R}$.

15.7) El conjunto de puntos que equidistan de $A(-1,2,4)$ y $B(1,2,4)$.

15.8) El conjunto de puntos que equidistan de $P_1(x_1,y_1,z_1)$ y $P_2(x_2,y_2,z_2)$.

15.9) El conjunto de todos los puntos que forman los planos y rectas nominados en la figura Ej15.9.

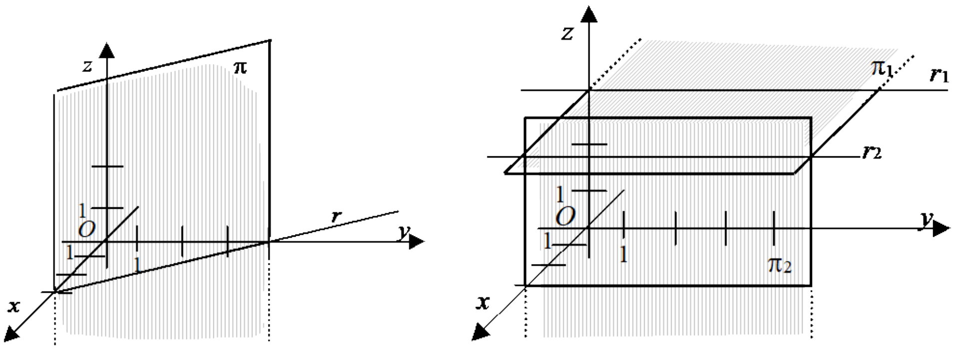


Figura Ej15.9. Planos y rectas del ejercicio

Ejercicio 16.

Cálculo de distancias entre rectas, planos y puntos en **R³**. Deducción y uso de expresiones generales.

16.1) Hallar la distancia entre los puntos $A(1,-1,1)$ y $B(1,-5,-2)$.

16.2) Reducir a la forma normal la ecuación del plano $\pi\equiv 8x+4y-z+18=0$ y calcular la distancia del origen al plano.

16.3) Hallar todos los $k\in\mathbf{R}$, tales que la distancia del origen al plano $\beta\equiv 3x-6y+kz+14=0$ sea igual a 2.

16.4) Hallar la distancia entre el punto $A(1,-1,1)$ y la recta $r\equiv\dfrac{-x+2}{2}=2y=\dfrac{z-1}{1}$.

16.5) Sea $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)\in\mathbf{R}^3-\{\vec{0}\}$ y sean r_1 y r_2 dos rectas paralelas de **R³**, Figura Ej16.5. Comprobar que la distancia de un punto P_2 cualquiera de r_2 a la recta r_1 es una constante que vale $d(P_2,r_1)=\dfrac{|\overrightarrow{P_2P_1}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}$.

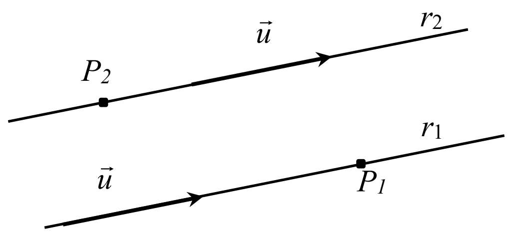


Figura Ej16.5. Distancia entre rectas paralelas

16.6) Comprobar que las siguientes r_1 y r_2 son alabeadas y calcular la distancia que las separa, siendo

$$r_1 \equiv (-2,-2,-5)+\lambda(4,1,1) \quad \forall\lambda \in \mathbf{R} \wedge r_2 \equiv (5,7,-6)+\mu(-2,-3,2) \ \forall\mu \in \mathbf{R}.$$

Desfío. Hallar $P_1 \in r_1 \wedge P_2 \in r_2 \,/\, d(P_1;P_2)=d(r_1;r_2)$.

16.7) Sea la recta r y sea el plano π definidos por

$$r \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=n+2\lambda\,, \forall\lambda \in \mathbf{R} \\ z=2+m\lambda \end{cases} \qquad \pi \equiv (0,1,2)+\alpha(1,0,1)+\beta(1,-1,0) \ \forall\alpha \in \mathbf{R}, \forall\beta \in \mathbf{R}.$$

Determinar en caso de ser posible, m y n reales de modo que: **a)** r y π sean paralelos; **b)** r esté contenida en π; **c)** r y π sean perpendicular. Calcular los valores de la distancia entre r y π en todos los casos.

Ejercicio 17.

Integración de conceptos. Interpretación de enunciados y visualización en $\mathbf{R}^3$.

17.1) En $\mathbf{R}^3$, ABC es un triángulo equilátero de lado de longitud 1 tal que ninguno de sus vértices A, B y C, tiene coordenadas negativas y además: A coincide con el origen de coordenadas; B pertenece al eje y; C pertenece al plano coordenado xy. Dar las coordenadas de los vértices A, B y C.

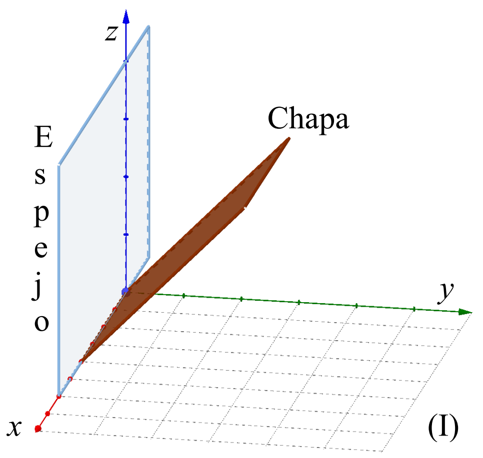
17.2) Hallar todos los puntos P del plano xy cuya distancia al plano $\pi \equiv 4y-3z-7=0$ sea igual a 1. ¿Qué lugar geométrico representa el conjunto hallado?

17.3) Una chapa cuadrada de $4\,cm$ de lado y de espesor muy fino se coloca frente a un espejo vertical con el que forma un ángulo de 45°. Se esquematiza la situación en la Figura Ej17.3(I) donde se asocia un sistema cartesiano ortogonal para facilitar la comprensión. El origen de coordenadas coincide con un vértice de la chapa. La Figura Ej17.3(II) es la vista de perfil de los elementos. En la Figura Ej17.3(III) también aparece la imagen especular que se forma de la chapa.

a) En el sistema solidario propuesto, ¿cuáles son las coordenadas del centro de la chapa?

b) ¿Cuál es la distancia entre el centro de la chapa y su imagen?

c) Dar la ecuación general del plano π que contiene a la chapa, y la del plano π' que contiene a la imagen.



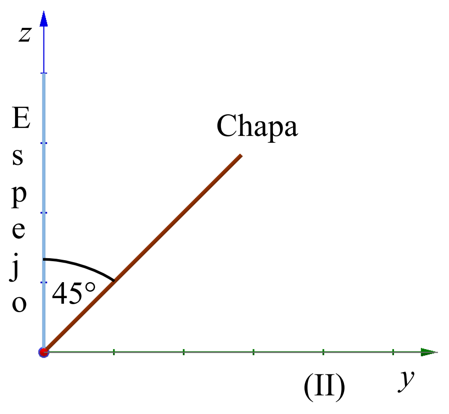


Figura Ej17.3 – Chapa frente a espejo

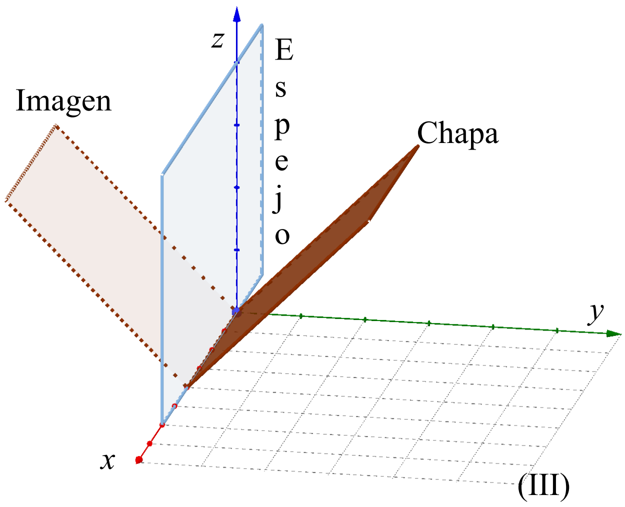


Figura Ej17.3 – Chapa frente a espejo

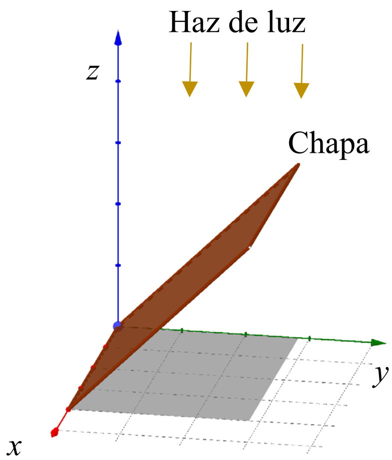


Figura Ej17.4 – Chapa iluminada

17.4) Se quita el espejo de la disposición descrita en el Ejercicio 17.3 y se ilumina la chapa con un haz de luz que incide sobre la misma en forma vertical, ver Figura Ej17.4. ¿Qué forma tiene y cuál es el área de la sombra proyecta la chapa sobre la superficie horizontal?

17.5) Hallar el punto A' simétrico del punto $A(-1, 0, 6)$ con respecto a los planos mencionados.

17.5.a) Plano coordenado yz.

17.5.b) Plano $\pi \equiv 2x - y + z + 2 = 0$. Ver Figura Ej17.5.b. Las figuras (I) y (II) corresponden a distintas perspectivas de la misma situación. En (II) se ve el plano de perfil.

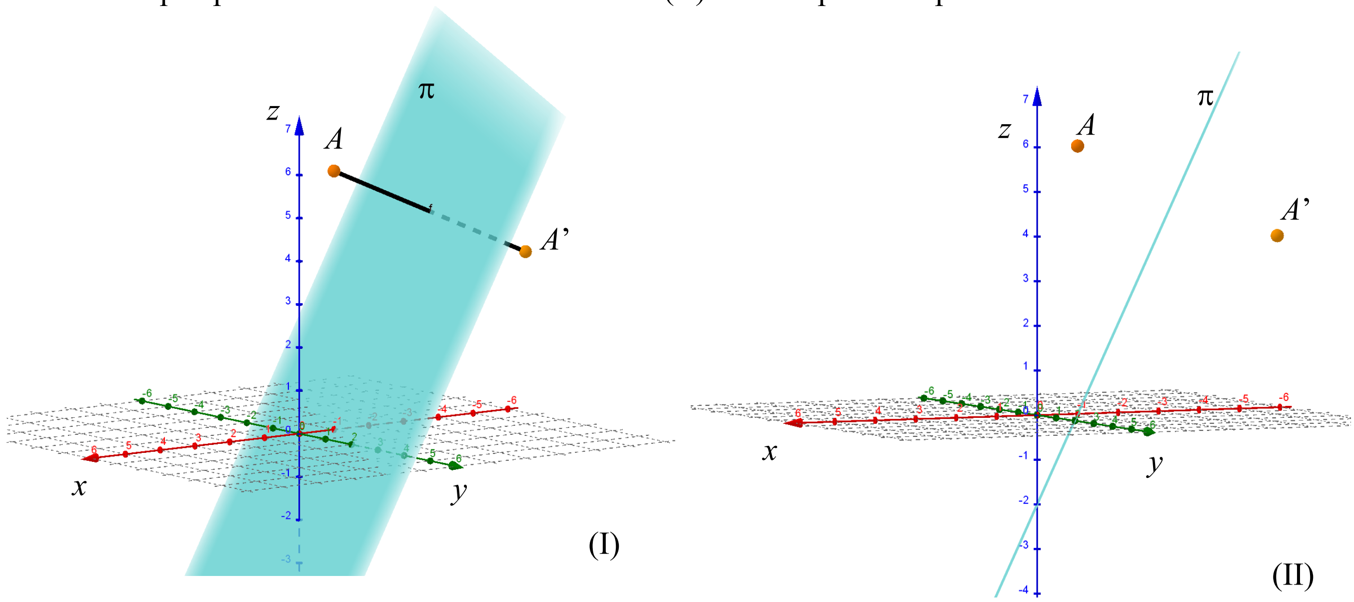


Figura Ej17.5.b – Simetría de un punto con respecto a un plano

Ejercicio 18.

Trabajo con distancia en R^2. Deducción de expresiones. Reconocimiento de cónicas.

18.1) Dada la ecuación de la recta $4x - 3y + 5 = 0$, pasarla a la forma normal e indicar la distancia del origen a la recta.

18.2) Calcular la distancia entre la recta $r \equiv (x, y) = (2,-1) + \lambda(-1,1)\ \ \forall \lambda \in \mathbf{R}$ y el punto $A(1,3)$.

18.3) **(Opcional)** Encontrar el lugar geométrico de todos los puntos $P(x, y)$ que verifican la condición propuesta, identificar a que curva corresponde y representarla, si:

18.5.a) $\vec{CP} \cdot \vec{CP} = 5$ con $C(-3,2)$ **18.5.b)** $d(F_1, P) + d(F_2, P) = 10$ con $F_1(-4,0) \wedge F_2(4,0)$

18.5.c) $d(F_1, P) - d(F_2, P) = 8$ con $F_1(0,-5) \wedge F_2(0,5)$ **18.5.d)** $d(F, P) = x + 3$ con $F(3,0)$

Miscelánea

M1 **En $\mathbf{R}^2$.** Hallar todos los valores reales del parámetro k en la ecuación $2x+3y+k=0$ de forma que la recta que representa forme con los ejes coordenados un triángulo de área 27 unidades de superficie.

M2 **En $\mathbf{R}^2$.** Dos lados de un paralelogramo están sobre las rectas $r_1 \equiv y-3x+1=0$ y $r_2 \equiv 4y-x-7=0$ siendo $A(5,4)$ uno de sus vértices. Hallar las coordenadas de los otros tres vértices.

M3 **En $\mathbf{R}^2$.** En una circunferencia de diámetro 10 cm y centro en el origen de coordenadas O, se inscribe un triángulo equilátero ABC como indica en forma esquemática la Figura M3. Hallar, justificando cada respuesta con un planteo y/o cálculo adecuado:

M3.a) La distancia entre O y el lado AC.

M3.b) Se unen los puntos medios de los lados de ABC formando un nuevo triángulo MNQ. ¿Cuánto vale el cociente entre el área de ABC y el área de MNQ?

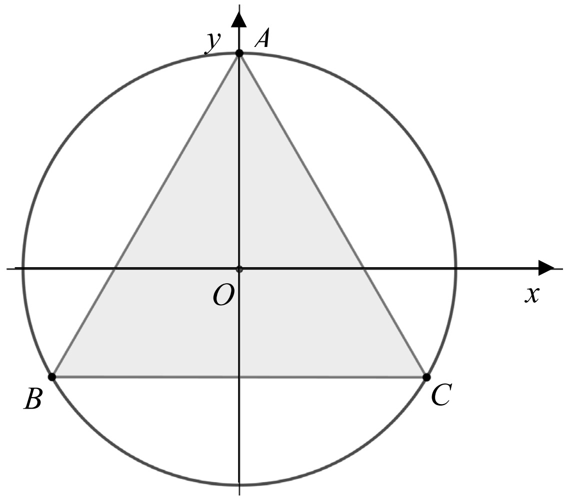


Figura M3

M4 Proyección en $\mathbf{R}^3$ de un vector sobre otro no nulo.

M4.a) Dados los puntos $O(0,0,0)$, $A(2,-1,2)$, $B(1,1,3)$ y $C(t, t+1, 3)$, hallar el valor real de t para que $proy_{\overline{OA}}\overrightarrow{CB} = \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

M4.b) Indicar si la siguiente proposición es verdadera o falsa. Si es verdadera, demostrarla indicando las propiedades usadas; si es falsa dar un contraejemplo.

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores de $\mathbf{R}^3$ tales que $|\vec{b}| = 2|\vec{a}| \wedge \left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \left|proy_{\vec{a}}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right| = 0$.

M5 Contestar los siguientes interrogantes sobre planos en el espacio tridimensional.

M5.a) ¿Es posible encontrar un plano que contenga simultáneamente a las rectas $\begin{cases} x=0 \\ z=3 \end{cases}$ y $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$?

M5.b) ¿Es posible encontrar un plano que contenga simultáneamente a las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x=0 \\ z=a \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$? Analizar todas las posibilidades en función de los distintos valores de $a \in \mathbf{R}$.

M6 Hallar el valor de m para que los puntos $A(3, m, 1)$, $B(1, 1, -1)$ y $C(-2, 10, -4)$ pertenezcan a la misma recta.

M7 Sean $r_1:(x,y,z)=(2+\lambda,4-\lambda,6+2\lambda)\ \forall\lambda\in\mathbf{R}$ y $r_2:(x,y,z)=(1-\mu,5+\mu,7+\mu)\ \forall\mu\in\mathbf{R}$ rectas secantes.

M7.a) Determinar el punto Q donde se cortan r_1 y r_2.

M7.b) Verificar que cualquiera sea el punto $A\in r_1$ y cualquiera sea el punto $B\in r_2$, entonces $\overrightarrow{QA}$ y $\overrightarrow{QB}$ son perpendiculares.

M7.c) Sea $C(3,3,8)\in r_1$. Encontrar el punto $D\in r_2$ tal que el área del triángulo CQD sea igual a $\sqrt{18}$.